ACTIVIDAD N° 01

OBJETIVO N° 01

Determinar y representar conjuntos.

Estudie la información destacando los conceptos básicos, notaciones y formas existentes para la determinación de conjuntos.

TEORIA DE CONJUNTOS

Así como en la Geometría las ideas de *Punto, Recta y Plano* son conceptos básicos que se admiten sin definición; las ideas de *Conjunto, Elemento y Pertenencia* son, también, ideas no susceptibles de definición.

NOCIÓN DE CONJUNTO

Conjunto: Intuitivamente un conjunto es la reunión, colección o agrupación de objetos reales o ideales, a estos objetos se les denominan ***elementos*** ó ***miembros*** del conjunto, y de ellos se dice que ***pertenecen*** al conjunto.

Notación: Para denotar a los conjuntos se usan letras mayúsculas: A, B, C, X, etc. y para representar a sus elementos se usan letras minúsculas: a, b, c, etc.

Relación de Pertenencia: Si un objeto "x" es elemento de un conjunto A, se dice que *"x pertenece al conjunto A"* ó que *"x está en A"*, y se denota por: $x \in A$. En caso contrario, *"x no pertenece a A" y* se denota por: $x \notin A$.

Ejemplo: Si A es el conjunto formado por: 8, -2, 6, {0,1}, 3 y 1; y B es el conjunto constituido por: 0 y 1; escribimos:

A = { 8, -2, 6, { 0, 1 }, 3 , 1]; B = { 0, 1 }.

En este caso:

$8 \in A$...(V) $-2 \in A$...(V)

$6 \notin A \ldots (V)$ $\quad$ $1 \in A \wedge 1 \in B \ldots (V)$

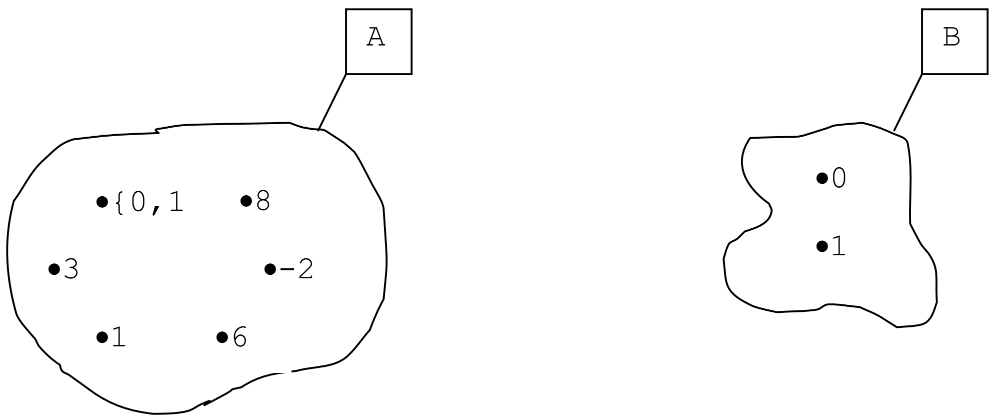
$0 \in A \ldots (V)$ $\quad$ $3 \notin B \ldots (V)$

$\{0, 1\} \in A \ldots (V)$ $\quad$ $\{\{0, 1\}\} \notin A \ldots (V)$

Se observa, además, que el conjunto B pertenece al conjunto A.

DIAGRAMAS DE VENN-EULER

Para representar gráficamente a los conjuntos se usan los ***Diagramas de Venn-Euler*** que son regiones planas limitadas por figuras geométricas cerradas, como se ilustra a continuación con los conjuntos A y B del ejemplo dado anteriormente.



$7 \notin A \wedge 7 \in B$ $\quad$ (V)

$9 \notin B \rightarrow 0 \in B$ $\quad$ (V)

$\{0, 1\} \in B \vee -2 \in A$ $\quad$ (V)

$\{1\} \in B \downarrow \{0, 1\} \notin A$ $\quad$ (V)

DETERMINACION DE CONJUNTOS

I. POR EXTENSION O EN FORMA TABULAR

Cuando se indica explícitamente cada uno de los elementos del conjunto.

Ejemplo :

$A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ $\quad$ $B = \{1, 4, 9, 16, 25\}$

$C = \{a, e, i, o, u\}$

II. POR COMPRENSION O EN FORMA CONSTRUCTIVA

Cuando los elementos del conjunto son caracterizados mediante una propiedad común.

Ejemplo:

A = { p / p es un número primo $\wedge$ p < 12 }

B = { x^2 / x $\in$ $\mathbf{Z}^+$ $\wedge$ x $\leq$ 5 }

C = { x / x es una vocal }

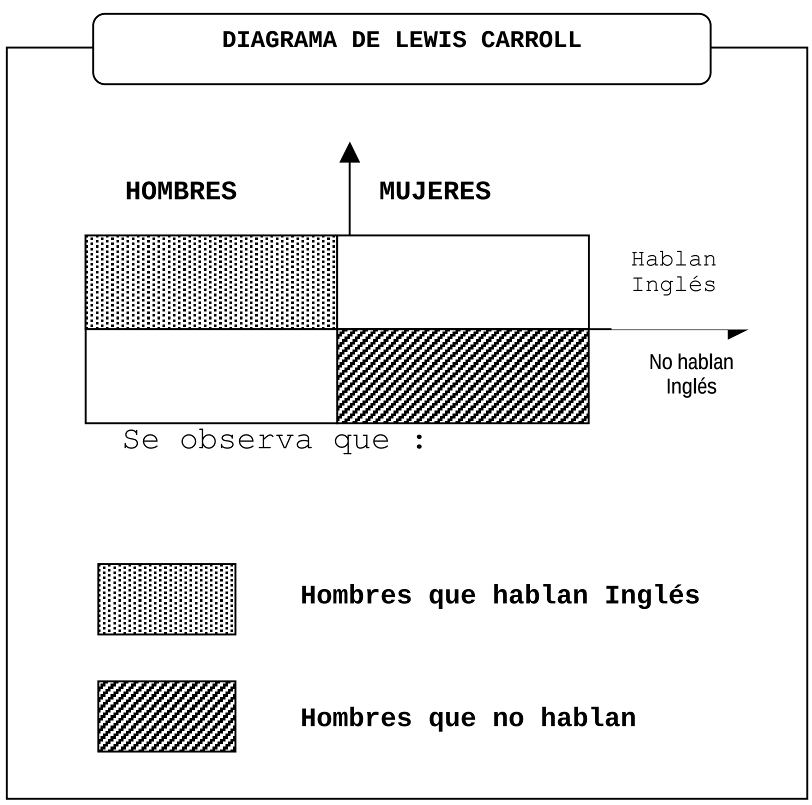
Esquema general:

$$\text{Conjunto} = \left\{ \textit{Forma del } \text{elemento} \Big/ \begin{matrix} \textit{Caracteristicas} \\ (\text{Pr}\,\textit{opiedadaes}) \end{matrix} \right\}$$

Ejemplo:

T = { x / x es un pronombre personal en Inglés }

Nota: Otro diagrama para representar gráficamente a los conjuntos es el **Diagrama de Lewis Carroll.**



Son típicos en matemática los siguientes conjuntos numéricos:

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,...\}$

$\mathbb{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{d} / n,d \in \mathbb{Z} \wedge d \neq 0 \right\}$

$\mathbb{Q}' = \{decimales\ que\ no\ pueden\ \exp resarse\ en\ forma\ de\ fraccion\}$

$\mathbb{R} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

$\mathbb{C} = \{\wedge x + iy / x, y \in \mathbb{R} \wedge \sqrt{-1} = i \leftrightarrow i^2 = -1\}$

CLASES DE CONJUNTOS

CONJUNTO FINITO

Un conjunto es finito cuando posee una cantidad limitada de elementos, es decir el proceso de contar sus elementos termina en algún momento.

Ejemplo :

A = { x / x es un hablante nativo de Quechua }

B = { x / x es un mes del año }

CONJUNTO INFINITO

Un conjunto es infinito cuando tiene una cantidad ilimitada de elementos diferentes, es decir el proceso de contar sus elementos nunca termina.

Ejemplo :

A = { p / p es un número primo }

B = { x / x ∈ R ∧ 8 < x < 9 }

C = { x / x es una estrella de universo }

CONJUNTOS ESPECIALES

1. CONJUNTO NULO O VACIO

Es aquel conjunto que carece de elementos.

Ejemplo :

A = { x / x es el actual Virrey del Perú }

B = { x / x ∈ N ∧ 7 < x < 8 }

Notación: ∅ = { } = $\{x / x \neq x\}$.

A = B = ∅ = { }.

2. CONJUNTO UNITARIO O SINGLETON

Es el conjunto que tiene un sólo elemento.

Ejemplo: $A = \{ x / x \in Z \wedge 10 < x < 12 \} = \{ 11 \}$

$B = \{ 2, 2, 2, 2, 2, ...\} = \{ 2 \}$

3. CONJUNTO UNIVERSAL

Es un conjunto referencial para el estudio de una situación particular que contiene a todos los conjuntos considerados. No existe un conjunto universal absoluto.

Ejemplo:

$A = \{ 1, 2, 3 \}$; $B = \{ 2, 4, 6, 8 \}$

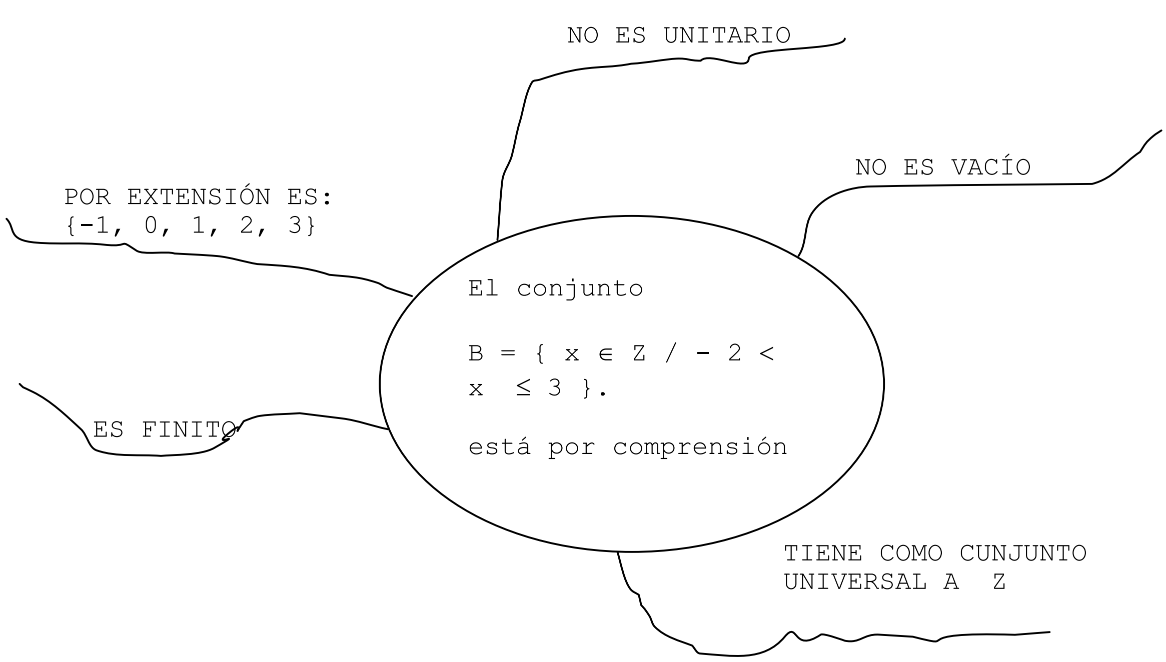
Pueden ser conjuntos universales:

$U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

$U = = \{x / x \in N \}$

* Gráficamente el conjunto universal se representa generalmente mediante un rectángulo.

ILUSTRACIÓN RESUMEN



ACTIVIDAD N° 02

Compruebe su aprendizaje, resolviendo los siguientes

EJERCICIOS GRUPO 1

1. Dado el conjuntos $A = \{ a, \{ a \}, \varnothing \}$. Indicar cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas.

   a. $\{ a \} \in A$

   b. El conjunto $\varnothing \in A$

   c. $\{ a, \{ a \} \} \in A$

   d. $\varnothing \in A$

   e. $\varnothing = \{ \varnothing \}$

2. Señalar cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas.

   a. $\varnothing = \{ \ \}$.

   b. $A = \{ x \in R \ / \ x^2+1 = 0 \}$ es un conjunto no vacío.

   c. $B = \{ x \in R \ / \ x^3 + 2x = 0 \}$ es unitario.

   d. El conjunto $A = \{ -1, 1, 3, 5, \ldots\ldots\ldots\}$ por comprensión es

   $$A = \{ x \ / \ x = 2n - 3, \ n \in Z^+ \}.$$

   e. Si $W = \{ x \ / \ x \in R, \ x^2 - 23 = 2 \}$, entonces $-5 \notin W$.

3. Determinar por extensión los siguientes conjuntos:

   a. $A = \{ x \in N \ / \ x - 1 < 5 \}$

   b. $C = \{ x \in Z \ / \ -2 < x \leq 3 \}$

   c. $M = \{ x \ / \ x$ es un pronombre personal en Inglés $\}$

4. Determinar por comprensión los siguientes conjuntos

   a. $A = \{ 4, 6, 8, 10 \}$

   b. $X = \{ 3, 5, 7, 9, \ldots\ldots\ldots\}$

   c. $Y = \{ 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

IMPORTANTE

Si sus respuestas no coinciden con la clave, intente nuevamente resolver el problema cuya respuesta es errónea.

CLAVE DE RESPUESTAS

1. Son verdaderas a y d.
2. Son verdaderas a, b y c.
3. **a.** A = { 5, 4, 3, 2, 1, 0 } **b.** C = { -1, 0, 1, 2, 3 }

   c. M = { I am, You are, She is, He is, It is, We are, You are, They are }.
4. **a.** $A = \{ x / x$ es par $\wedge\ 4 \leq x \leq 10 \}$

   b. $X = \{ x / x$ es impar $\wedge\ x \geq 3 \}$

   c. $Y = \{ x / x \in Z^+ \wedge x^2\}$

ACTIVIDAD N° 02

Analice los ejemplos que se desarrollan a continuación haciendo hincapié en el uso correcto de la simbolización e identificación de elementos de un conjunto.

CUANTIFICADORES Y CONJUNTOS

Una ***función proposicional*** P(x), relacionada con una ***proposición cuantificacional***, se convierte en una ***proposición lógica*** (V ó F) de acuerdo con el valor que asume la variable x.

Por ejemplo, la función P(x): $x^2 - 4 = 0$ es una función preposicional que se convierte en verdadera si x = 2 ó x = -2, y es falsa cuando x toma otros valores.

Ahora consideremos un conjunto cualquiera A, por ejemplo :

$$A = \{ -2, 1, 2, -3, 0 \}$$

La proposición:

"Existe por lo menos un x ∈ A, tal que se verifica P(x)"

ó equivalentemente:"$\exists\ x \in A / P(x)$",

es verdadera, pues existe x = -2 ∈ A, tal que: $x^2 - 4 = 0$.

Así mismo, la proposición:

"Para todo x ∈ A, se verifica P(x)" ó equivalentemente *"$\forall x \in A / P(x)$"*, es falsa, pues no todo elemento de A, verifica $x^2 - 4 = 0$, basta tomar x =1∈ A / $1^2 - 4$ es diferente de 0.

A la frase: *"Existe un"*, *"Para algún" ó "Algunos"*, etc. que denota una parte de un universo, se llama cuantificador existencial y se denota por ∃; mientras que a la frase: *"Para todo"*, *"Para cada" ó "Para cualquier"*, etc. que denota la totalidad de objetos, se llama cuantificador universal y se denota por ∀.

1. **Negar que existe un x $\in$A, tal que se verifica P(x)**; equivale a decir que*:* **Ningún x $\in$ A, verifica P(x)**, ó que: **Todo x, no verifica P(x)**; simbólicamente:

   $\sim[\exists\ x \in A\ /\ P(x)] \Leftrightarrow \forall\ x \in A\ /\ \sim P(x)$.

2. **Negar que para todo x$\in$A, verifica P(x)**, equivale a decir que: **Para algunos x$\in$A, no se verifica P(x)**; simbólicamente:

   $\sim[\forall\ x \in A\ /\ P(x)] \Leftrightarrow \exists\ x \in A\ /\ \sim P(x)$

Ejemplo 01: Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones, siendo el conjuntoA = { 0, 1, 2, 3, 4, 5 }.

a. $\forall\ x \in A\ /\ x^2 - 5x + 6 = 0$.

b. $\exists\ x \in A\ /\ x^3 + x^2 - 2x = 0$.

c. $\forall\ x\in A, \exists\ y \in A\ /\ x + y \leq 4$

Solución:

a. Es falsa, pues x^2 -4x + 5 = 0 se cumple sólo para x = 1, y x = 5 y no para todos los demás elementos de A.

b. Es verdadera, puesto que la ecuación x3 + x2 - 2x = 0 tiene dos soluciones x = 0, y x = 1 en el conjunto A; bastaba que hubiera una.

c. Es falsa, pues para $5 \in A$ no existe ningún valor **y** $\in$ A / $5 + y \leq 4$.

$\forall\ x \in A$	$\exists\ y \in A$	$/\ x + y \leq 4$
0	2	$0 + 2 \leq 4$
1	3	$1 + 3 \leq 4$
2	0	$2 + 0 \leq 4$
3	1	$3 + 1 \leq 4$
4	0	$4 + 0 \leq 4$
5	No existe	No se cumple

Ejemplo 02: Determinar el valor de verdad y negar las siguientes proposiciones; dado el conjunto $B = \{ x\ /\ x \in Z, x \leq 4 \}$.

a. $\forall\ x \in B\ /\ x - 1 < 2$.

b. $\forall\ x \in B, \exists\ y \in B\ /\ x^2 + y^2 \geq 8$.

c. $\exists\ x \in B, \exists\ y \in B\ /\ x - y = 0$.

Solución:

a. Falsa, pues para x = 3, y para x = 4 no se satisface la inecuación, burlando el cuantificador $\forall$. Por otro lado, su negación es:

$$\sim [\ \forall\ x \in B / x - 1 < 2\ ] \Leftrightarrow \exists\ x \in B / x - 1 \geq 2 \ \ldots.(V)$$

b. Verdadera.

$\forall$ x $\in$ B,	$\exists$ y $\in$ B	/ $x^2+y^2 \geq 8$
1	3	$1^2 + 3^2 \geq 8$
2	2	$2^2 + 2^2 \geq 8$
3	1	$3^2 + 1^2 \geq 8$
4	1	$4^2 + 1^2 \geq 8$

Su negación es:

$$\sim [\ \forall\ x \in B, \exists\ y \in B / x^2 + y^2 \geq 8\ ] \Leftrightarrow$$

$$\forall\ x \in B, \exists\ y \in B / x^2 + y^2 < 8 \ldots.(V)$$

c. Verdadera.

$\exists$ x $\in$ B,	$\exists$ y $\in$ B	/ x - y = 0
1	1	1 - 1 = 0
2	2	2 - 2 = 0
3	3	3 – 3 = 0
4	4	4 – 4 = 0

Su negación es:

$$\sim [\exists\ x \in B, \exists\ y \in B / x - y = 0] \Leftrightarrow$$

$$\forall\ x \in B, \forall\ y \in B / x - y \neq 0 \ \ldots\ldots\ldots..(F)$$

ILUSTRACIÓN RESUMEN

Es verdadero

$\forall$: es el Cuantificador

$\exists$: es el Cuantificador

La proposición
$\forall\, x \in B, \exists\, y \in B \,/\, x^2 + y^2 \geq 8$. donde

$B = \{\, x \,/\, x \in Z, x \leq 4 \,\}$.

Su negación es (F):
$\exists\, x \in B$, tq $y \in B \,/\, x^2 + y^2 < 8$.

$x^2 + y^2 \geq 8$ es la función

ACTIVIDAD N° 03

Analice los ejemplos que se desarrollan a continuación haciendo hincapié en el uso correcto de la simbolización e identificación de elementos de un

EJERCICIOS GRUPO 2

1. Determinar por extensión el conjunto Z que satisface la proposición que se da en cada caso.
   a. $Z = \{ x \,/\, x \in Z \,,\, x - 2 < 4 \,.\}$.
   b. $Z = \{ x \,/\, \exists\, x \in Z,\ \exists\, y \in Z \,/\, x^2 + y^2 < 8 \}$.

2. Indicar cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas. Así mismo, escribir la negación en cada caso.
   a. $\forall\, x \in R,\ \forall\, y \in R \,/ (- x)\, y = - (x\, y)$.
   b. $\exists\, r \in Q,\ \forall\, p \in Z \;/\; p > r$.

¡Compare sus respuestas con la clave!

CLAVE DE RESPUESTAS

1. a. $Z = \{ \ldots, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$.
   b. $Z = \{ 0, \pm 1, \pm 2 \}$.
2. a. V, $\exists\, x \in R,\ \exists\, y \in R \,/\, (- x)\, y \neq - x\, y$.
   b. F, $\forall\, r \in Q,\ \exists\, p \in Z \,/\, p \leq r$.

ACTIVIDAD N° 01

OBJETIVO N° 02

Establecer la relación entre conjuntos y demostrar las propiedades de Inclusión e Igualdad de conjuntos.

Analice el siguiente texto remarcando las definiciones, ilustraciones y propiedades de la Inclusión e Igualdad de conjuntos.

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Entre dos conjuntos cualesquiera se pueden establecer las siguientes relaciones:

A. **INCLUSIÓN:** $\subset$

Se dice que **un conjunto A está incluido, contenido ó es un subconjunto del conjunto B**, si todo elemento de A es también elemento de B. Se denota por: $A \subset B$.

Es decir: $A \subset B \Leftrightarrow [\ \forall\ x \in A \ /\ x \in A \Rightarrow x \subset B\ ]$.

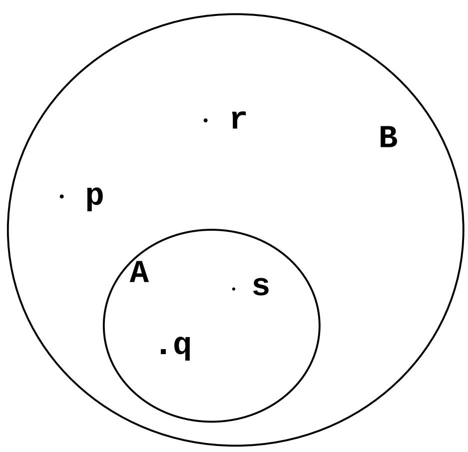
Se lee :"A es subconjunto de B si y sólo si todo **x** de A es tal que si **x** $\in$ A entonces **x** $\in$ B".

Observación: A partir de la definición, basta que un sólo elemento de A no pertenezca B para asegurar que A no está incluido o contenido en B; en tal caso se denota por: $A \not\subset B$.

Ejemplo. Si $A = \{ q, s \}$

$B = \{ p, q, r, s \}$

$\Rightarrow A \subset B$



Observación: Si un conjunto tiene "**n**" elementos entonces tiene: 2^n subconjuntos

Ejemplo. Si $B = \{ a, b \} \Rightarrow$

Los subconjuntos de B son: $\varnothing$, { a }, { b }, { a, b }.

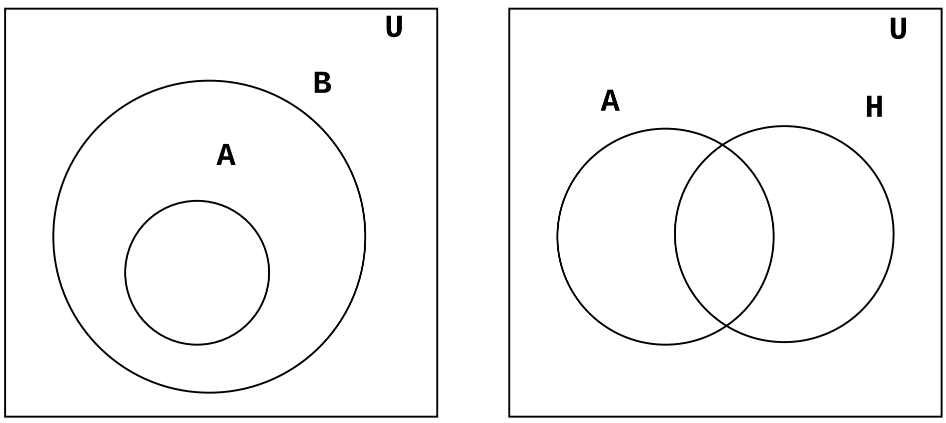
$\therefore$ Numero de subconjuntos de B es: $2^2 = 4$.

Ejemplo. Siendo B = { 3, { 3 }, { 4 }, { { 4 } } }.

Dar el valor de verdad a las siguientes proposiciones :

- $\{ 3 \} \in B$ ………… (V)
- $\{ 3 \} \subset B$ ………… (V)
- $\{ \{ 3 \} \} \subset B$ ………… (V)
- $\{ \{ \{ 4 \} \} \} \subset B$ ………… (V)
- $\{ \{ 4 \} \} \subset B$ ………… (V)
- $7 \subset B$ ………… (F)
- $7 \not\subset B$ ………… (F)

Gráficamente se representa:



$A \subset B$ $A \not\subset H$

Ejemplo: Demostrar que la proposición **$A \not\subset B$**, equivale a demostrar que:

"Existe al menos un $x \in A$ tal que $x \notin B$".

En efecto, la proposición: $A \not\subset B$ equivale a decir: "No es cierto que A está contenido en B"; esto es :

$A \not\subset B \Leftrightarrow \sim [A \subset B]$

$\Leftrightarrow \sim [\forall \in A / \ x \in A \Rightarrow x \in B]$ Definición

$\Leftrightarrow \exists x \in A / \sim (x \in A \Rightarrow x \in B)$ Aplicando la negación

$\Leftrightarrow \exists x \in A / \ x \in A \wedge \neg (x \in B)]$ Ley de $p \Rightarrow q$

$\Leftrightarrow \exists x \in A / [x \in A \wedge x \notin B]$ Negación

$\therefore A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x \in A / (x \in A \wedge x \notin B)$

Propiedades de la Inclusión.

La relación de Inclusión entre conjuntos goza de las siguientes propiedades:

1.1 Reflexiva: $A \subset A$, $\forall$ conjunto A.

1.2 Antisimétrica: Si $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces $A = B$. (*)

1.3 Transitiva: Si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$.

1.4 $\forall$ A, $\varnothing \subset A$.

(*) Corresponde a la definición de Conjuntos Iguales, que se verá mas adelante.

Demostración de 1.1

Demostrar que: $A \subset A$ equivale a demostrar que,

$\forall x \in A / x \in A \Rightarrow x \in A$, la cual es una proposición siempre verdadera, pues: $p \Rightarrow p$ es una tautología como se ilustra a continuación:

P	P ⇒ P
V	V
F	V

$\therefore A \subset A$

Demostración de 1.3

Si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$.

$\forall x \in A / x \in A \Rightarrow x \in B$ pues $A \subset B$.

Además, $\forall x \in B / x \in B \Rightarrow x \in C$ pues $B \subset C$.

Por la propiedad transitiva de la Condicional:

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow r]$.

En consecuencia, $\forall x \in A / x \in A \Rightarrow x \in C$.

Es decir $A \subset B$

Demostración de 1.4 $\varnothing \subset A, \forall A$.

Recuerde que la proposición $p \Rightarrow q$ es <u>falsa</u> sólo si p es verdadera y q es falsa. Luego,

$\varnothing \subset A \Leftrightarrow \forall x \in \varnothing / (x \in \varnothing) \Rightarrow (x \in A)$, esta ultima proposición es <u>verdadera</u> puesto que el antecedente ($x \in \varnothing$) es <u>falso</u>, por que el conjunto vacío carece de elementos.

Conjuntos Comparables.

Los conjuntos A y B son comparables si: $A \subset B$ ó $B \subset A$.

Si $A \not\subset B$ ó $B \not\subset A$ se dice que A y B son **no comparables**.

B. IGUALDAD DE CONJUNTOS: =

Los conjuntos A y B son iguales si y sólo si tienen exactamente los mismos elementos.

Se denota por: $A = B \Leftrightarrow [(A \subset B) \wedge (B \subset A)]$.

En caso contrario se escribe: $A \neq B$.

Nota: La definición establece la necesidad de demostrar la doble inclusión a fin de demostrar la igualdad de dos conjuntos.

Ejemplo. Establecer si los siguientes conjuntos son iguales:

$A = \{ 1, -2, 6 \}$, $B = \{ 1, -2, 6, 1, 6 \}$.

Se verifica que A = B pues todo elemento de B es también elemento de A, $B \subset A$; y todo elemento de A es elemento de B, $A \subset B$.

Observación. Del ejemplo se concluye que un conjunto no varía si sus elementos repetidos se escriben una sola vez, en este caso $\{ 1, -2, 6, 1, 6 \} = \{ 1, -2, 6 \}$.

Propiedades de la Igualdad

2.1 Reflexiva: $A = A, \forall A$.

2.2 Simétrica: $A = B \Rightarrow B = A$.

2.3 Transitiva: $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$.

Demostración de 2.2

Debemos demostrar que B = A, es decir. $B \subset A$ y $A \subset B$.

Por hipótesis A = B y por definición:

$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$

$\Leftrightarrow (B \subset A) \wedge (A \subset B)$ Prop. Conmutativa de $\wedge$

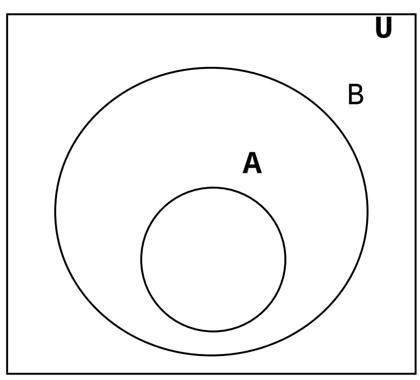
$\Leftrightarrow B = A$.

$\therefore A = B \Rightarrow B = A$.

C. SUBCONJUNTO PROPIO.

Se dice que el conjunto A es un subconjunto propio del conjunto B, si $A \subset B \wedge A \neq B$.

En otras palabras, A es subconjunto propio de B, si $A \subset B \wedge$ B tiene uno ó más elementos que no pertenecen a A. Gráficamente,



Ejemplo. Dados los conjuntos:

$A = \{ x / x \in Z \wedge x + 3 = x^2 - 9 \}$

$B = \{ -3, 4 \}$.

De A : $x + 3 = x^2 - 9$

$x^2 - x - 12 = 0$

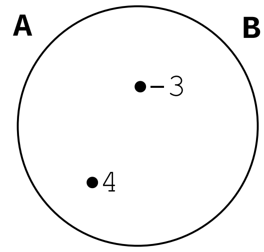
x -4

x 3

$(x-4)(x+3) = 0$

$x = -3$ ó 4

$\therefore A = B$



D. CONJUNTOS DIFERENTES: $\neq$

Dos conjuntos son diferentes si <u>uno de ellos tiene por lo menos un elemento que no posee el otro.</u>

Se define :

$$\mathbf{A \neq B \Leftrightarrow A \not\subset B \vee B \not\subset A}$$

Ejemplo. Dados:

$A = \{ x \,/\, (x-1)(x-2)(x-3)\,x = 0 \}$

$B = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$

De A: $(x-1)(x-2)(x-3)\,x = 0$

$x = 0; 1; 2; 3$

$\therefore A \neq B.$

E. CONJUNTOS DISJUNTOS

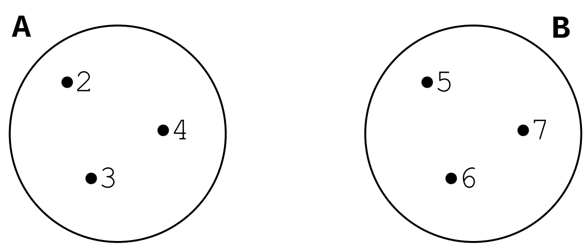
Se dice que los conjuntos A y B son disjuntos cuando <u>no poseen elementos comunes</u>

Simbólicamente :

$$\mathbf{A \text{ y } B \text{ son disjuntos} \Leftrightarrow \exists\, x \,/\, x \in A \wedge x \in B}$$

Ejemplo. Siendo: $A = \{2,3,4\}$ y $B = \{5,6,7\}$. $\therefore$ A y B son disjuntos

Gráficamente :



F. CONJUNTOS EQUIPOTENTES O COORDINABLES.

Para hablar de estos conjuntos de alguna forma, <u>el proceso de contar sus elementos siempre termina</u>.

Dos conjuntos son equipotentes o coordinables cuando <u>el número de sus elementos son iguales</u>.

Ejemplo. Siendo:

$A = \{ 10, 11, 12 \}$

B = { m, n, p }

$\therefore$ A y B son equipotentes.

Simbólicamente:

$$\boxed{A <> B \Leftrightarrow n(A) = n(B)}$$

DIAGRAMAS LINEALES

Son <u>representaciones graficas</u> que sirven para indicar <u>relaciones de inclusión entre conjuntos</u>

Si : $A \subset B \Rightarrow$ $\begin{array}{c} A \\ | \\ B \end{array}$

Si : $A = B \Rightarrow A — B$

PROPIEDAD

$$\boxed{N \subset Z \subset Q \subset R \subset C}$$

ILUSTRACIÓN RESUMEN

Es unitario

∅ es sólo un símbolo

Tiene $2^1 = 2$ subconjuntos

Dado el conjunto
A = {{ϕ}}

Sus subconjuntos son
{ A, conjunto ϕ }

ACTIVIDAD N° 02

Resuelva los siguientes ejercicios para reafirmar su aprendizaje, compare sus resultados con la clave.

EJERCICIOS GRUPO 3

1. Si $A = \{ 2, 4, 6, 0, \sqrt{5} \}$, indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

   a. $\{ 2 \} \subset A$ b. $\{ x / (x^2 - 5)(x - 2) = 0; x \in Z^+ \} \not\subset A$

   b. $4 \subset A$ c. $A \subset R$ e. $\{ 6 \} \not\subset A$

   f. $\sqrt{5} \in A$ g. $\varnothing \in A$ h. $\varnothing \subset A$

   i. $\{ \varnothing \} \not\subset A$

2. Dados los conjuntos $A = \{ x / x \in N, 2 \leq x \leq 9 \}$,
   $B = \{ 2, 4, 6, 8 \}$
   $C = \{ 3, 5, 7 \}$, $D = \{ 2, 4 \}$, $E = \{ 1, 3 \}$. Determinar en cada caso, cuál de estos conjuntos puede ser el conjunto X tal que:

   a. $X \subset A$ y $X \subset B$ b. $X \not\subset A$ y $X \subset E$

   c. $X \not\subset B$ y $X \not\subset E$ d. $X \subset A$ y $X \subset E$

   e. $X \not\subset C$ y $X \subset D$.

   Sugerencia: Apóyese con un diagrama.

3. Representar gráficamente las siguientes relaciones:

   a. $A \subset B$ b. $B \subset A$ c. $A = B$

   d. A y B son comparables.

4. Hallar todos los subconjuntos de A, si:

   a. $A = \{ 2, -3, 4 \}$ b. $A = \{ \{ \varnothing \} \}$ c. $A = \varnothing$

   ¿Cuántos subconjuntos tiene A en cada caso?

5. Demostrar las siguientes propiedades:

a. Si A ⊂ B y B ⊂ A, entonces A = B.

b. A = A, ∀ A.

c. Si A = B y B = C, entonces A = C.

d. Si H ⊂ M ∧ M ⊂ N, entonces H ⊂ N.

e. Si A ⊂ ∅, entonces A = ∅.

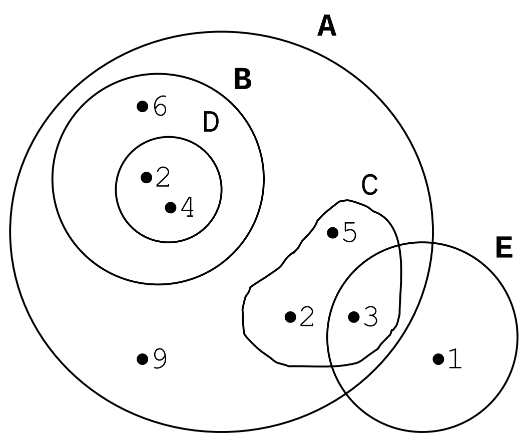
CLAVE DE RESPUESTAS

1. Son verdaderas: a, d, e, f, h, i.
2. X puede ser igual al conjunto que se indica en cada caso

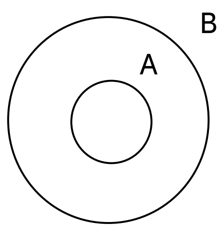
   a. D ó B   b. Sólo B   c. Sólo C

   d. Ninguno   e. D

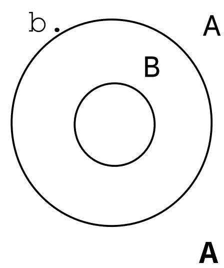
   Gráficamente:



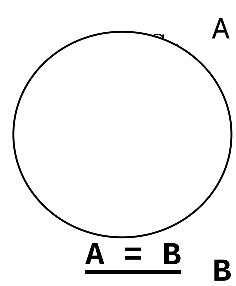
3. a.



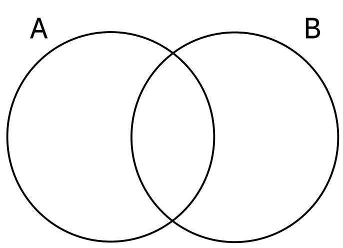
b.



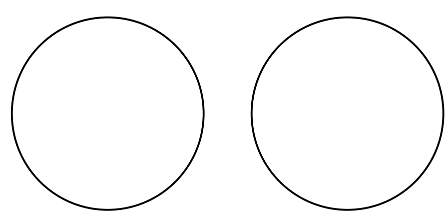
c.



d.



e.



ACTIVIDAD N° 01

OBJETIVO N° 03

Efectuar operaciones con conjuntos e interpretar gráficamente los resultados.

Infórmese sobre las operaciones entre conjuntos: definición, notación, representación e ilustración gráfica, leyendo el siguiente texto.

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

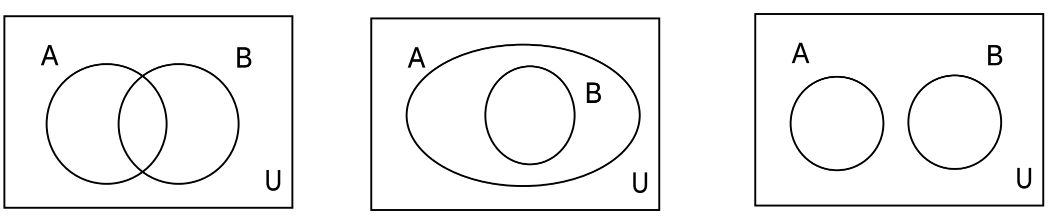
Entre conjuntos se pueden realizar las siguientes operaciones: Unión, Intersección y Diferencia.

1. UNIÓN DE CONJUNTOS

La Unión de los conjuntos A y B es otro conjunto, denotado por $A \cup B$ formado por todos los elementos que pertenecen a A, a B ó a ambos.

$A \cup B = \{ x \,/\, x \in A \;\vee\; x \in B\}$; $\vee$ = Símbolo de la

Para representar gráficamente $A \cup B$, se tendrá presente las relaciones entre los conjuntos dados en cada caso particular.



Observación. De la definición se deduce que $A \subset (A \cup B)$ y $B \subset (A \cup B)$.

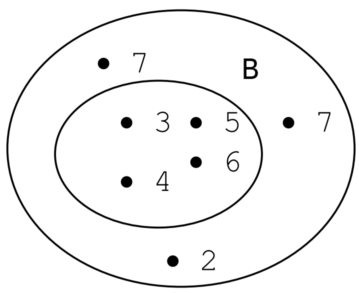
Ejemplo. Si A = { 2, 3, 4, 5, 6, 7 }, B = { 3, 4, 5, 6 }, C = { 2, 3, 6, 8, 10 }. Hallar (a) A ⋃ B (b) B ⋃ C. Representar gráficamente cada caso.

Solución.

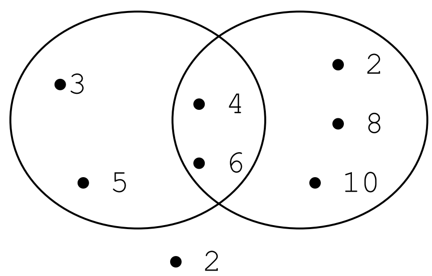
A ⋃ B = { x / x ∈ A ∨ x ∈ B } = { 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

B ⋃ C = { x / x ∈ B ∨ x ∈ C} = { 3, 4, 5, 6, 2, 8, 10 }

Se observa que B ⊂ A, y que B y C son no comparables con algún elemento común, luego se tiene:



A ∪ B



B ∪ C

Ejemplo. Sea A = {x ∈ R / x^2 – 1 = 0},

B = {x ∈ R / x^2 + 3 = 0} y M = R.

Hallar (a) A ⋃ B (b) M ⋃ B (c) A ⋃ M

Solución.

A = {-1, 1 }, B = ∅, M = R;

luego:A ⋃ B = A ⋃ ∅ = { x / x ∈ A ∨ x ∈ ∅ }

pero no existe x ∈ ∅.

Entonces:

a. A ⋃ B = {-1, 1}, es decir A ⋃ ∅ = A, ∀ A.

b. M ⋃ B = R

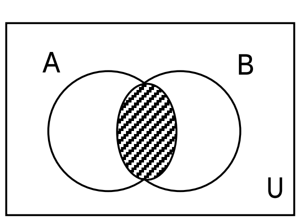
c. A ⋃ M = { x / x ∈ A ∨ x ∈ M } } = R.

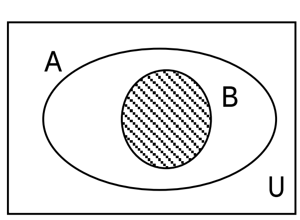
2. INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

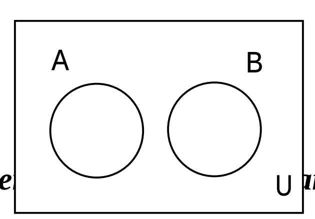
La Intersección de los conjuntos A y B es el conjunto denotado con A ∩ B formado por los elementos comunes a ambos conjuntos. Es decir,

$$\boxed{A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}}$$

Gráficamente.







Nota : $(A \cap B) \subset A$ y $(A \cap B) \subset B$

Conjuntos Disjuntos: A y B son disjuntos si $A \cap B = \varnothing$.

Ejemplo. Siendo A = { 2, 4, a }, B = { a, b, c, d }, C = { b, c }. Hallar

a. $A \cap B$, b. $B \cap C$ c. $A \cap C$

Representar gráficamente cada caso.

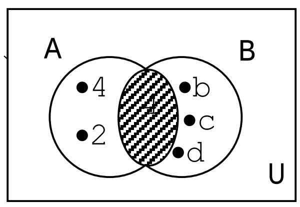
Solución.

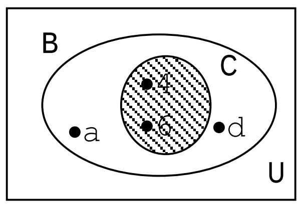
$A \cap B = \{ x / \{ x / x \in A \wedge x \in B \} = \{ a \}$

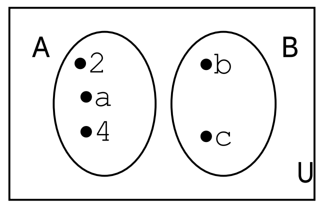
$B \cap C = \{ x / x \in B \wedge x \in C \} = \{ b, c \}$

$A \cap C = \{ x / x \in A \wedge x \in C \} = \varnothing$

Tenemos:







a. $A \cap B$, b. $B \cap C$ c. $A \cap C$

Nota. Si $X \subset Y$, entonces $X \cap Y = X$.

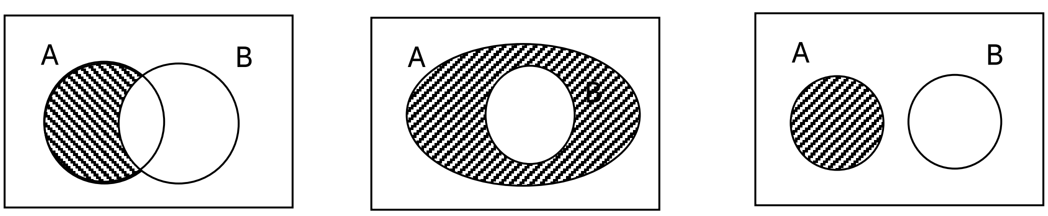
3. DIFERENCIA DE CONJUNTOS

La Diferencia de los conjuntos A y B, en ese orden, denotado por A – B, es el conjunto formado por todos los elementos de A que no pertenecen a B. Es decir,

$$A - B = \{ x / x \in A \wedge x \notin B \}$$

Se lee : "A diferencia B" ó "A menos B"

Gráficamente:



A - B

A partir de la definición se deduce que:

a. $A - B \neq B - A$ b. $A - A = \varnothing$ c. $A - B = A \cap B'$

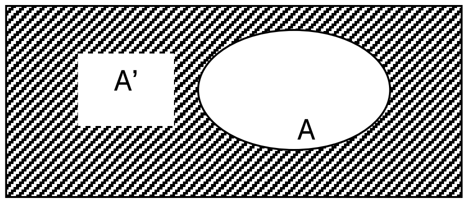
Complemento de un Conjunto.

El complemento del conjunto A respecto al conjunto universal **U**, es el conjunto A' formado por todos los elementos de U que no están en A. Es decir,

$$A' = \{ x / x \in \mathbf{U} \wedge x \notin A \}$$

En otras palabras, el complemento de A es el conjunto formado por los $x \notin A$, esto es:

$A' = \mathbf{U} - A$. Gráficamente:



Otras notaciones : $\complement A$ ó $A°$.

Observaciones : a. $A \cup A' = \mathbf{U}$

b. $A \cap A' = \phi$

Ejemplo. Demostrar que $A - B = A \cap B'$.

Solución.

$A - B = A \cap B'$ equivale a demostrar que:

(I) $(A - B) \subset (A \cap B')$ y (II) $(A \cap B') \subset (A - B)$.

Demostración de (I):

$[(A - B) \subset (A \cap B')] \Leftrightarrow x \in (A - B) \,/\, x \in (A - B) \Rightarrow$

$x \in (A \cap B')$

Pero $x \in (A - B) \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)$ Def. de diferencia

$\Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in B')$ Def. de B'

$\Rightarrow x \in (A \cap B')$ Def. de intersección

Se ha demostrado que si un elemento cualquiera x, tal que $x \in (A - B)$ implica que $x \in (A \cap B')$.

Por definición de inclusión, se concluye que :

$(A - B) \subset (A \cap B')$.

Demostración de (II):

$[(A \cap B') \subset (A - B)] \Leftrightarrow x \in (A \cap B') / x \in (A \cap B') \Rightarrow x \in (A - B)$.

Pero $x \in (A \cap B') \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in B')$ Def. Intersección

$\Rightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B')$ Def. de B'

$\Rightarrow x \in (A - B)$ Def. Diferencia

Luego, $x \in (A \cap B') \Rightarrow x \in (A - B)$.

De (I) y (II) se concluye la demostración.

Ejemplo. Hallar A', si $A = \{ x / x \in Z, x \text{ es impar } \}$.

Solución: $A' = \{ x / x \in U \wedge x \notin A \}$

Siendo: $U = Z$

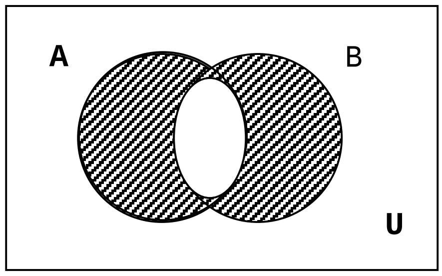
$A' = \{ x / x \in Z, x \text{ es par } .\}$

4. DIFERENCIA SIMÉTRICA DE CONJUNTOS.

La Diferencia Simétrica de los conjuntos A y B, denotado por $A \Delta B$, es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen solamente a A ó solamente a B, es decir:

$$\boxed{A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)}$$

Gráficamente:



$A \Delta B$

Ejemplo. Si A = {2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {1, 4, 6, 7, 9 } y C = { 1, 9 }. Hallar:

a. $A \Delta B$ b. $B \Delta C$ c. $A \Delta C$

Solución.

a. $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, donde:

$A - B = \{ x / x \in A \wedge x \notin B \} = \{ 2, 3, 5 \}$

$B - A = \{ x / x \in B \wedge x \notin A \} = \{ 1, 9 \}$

Entonces $A \Delta B = \{ 2, 3, 5, 1, 9 \}$.

b. $B \Delta C = (B - C) \cup \varnothing = B - C$;

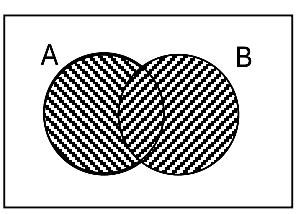
es decir: $B \Delta C = \{x / x \in B \wedge x \notin C \} = \{4, 6, 7\}$

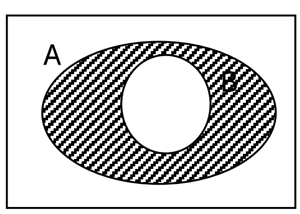
$C - B = \{x / x \in C \wedge x \notin B\} = x \notin \varnothing$ pues $C \subset B$.
Luego, $B \Delta C = (B - C) \cup \varnothing = B - C$,
es decir: $B \Delta C = \{ 4, 6, 7 \}$.

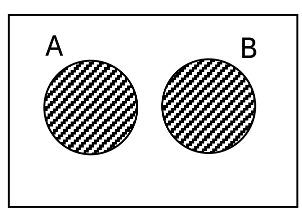
b. Análogamente, siendo A y C conjuntos disjuntos:

$A \Delta C = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 9 \}$

Gráficamente,







a. $A \Delta B$

Observaciones :

1. Si $C \subset B$ entonces $B \Delta C$ es el complemento de C con respecto a B.
2. Si A y B son conjuntos disjuntos entonces $A \Delta B = A \cup B$.
3. $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

ACTIVIDAD N° 02

Analice los ejercicios resueltos sobre operaciones con conjuntos y su interpretación grafica.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos sobre uso de las definiciones y operaciones con conjuntos.

1. La proposición $x \in (A \cap B')$ es equivalente a:

a. $(x \in A) \vee (x \in B)$

b. $(x \in A) \wedge (x \notin B')$

c. $x \in (A - B)$

d. $(x \in A) \wedge (x \in B')$

Solución.

$x \in (A \cap B') \Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B')]$ Def. de Intersec.

$\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \notin B)]$ Def. de B'

$\Leftrightarrow [x \in (A - B)]$ Def. de diferencia.

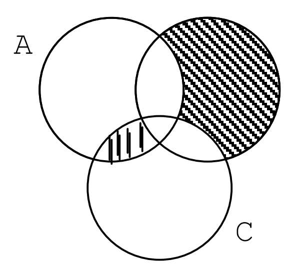
Luego, las expresiones equivalentes a $x \in (A \cap B')$ son (c) y(d).

2. ¿A cuál de las expresiones corresponde la región sombreada?

a. $[B - (A \cap C)] \cup [(A \cap C) - B]$

b. $[B - (A \cup C)] \cup [(A \cap C) - B]$

c. $[B \cap (A \cup C)] \cup [(A \cap B) \cap C]$



Solución.

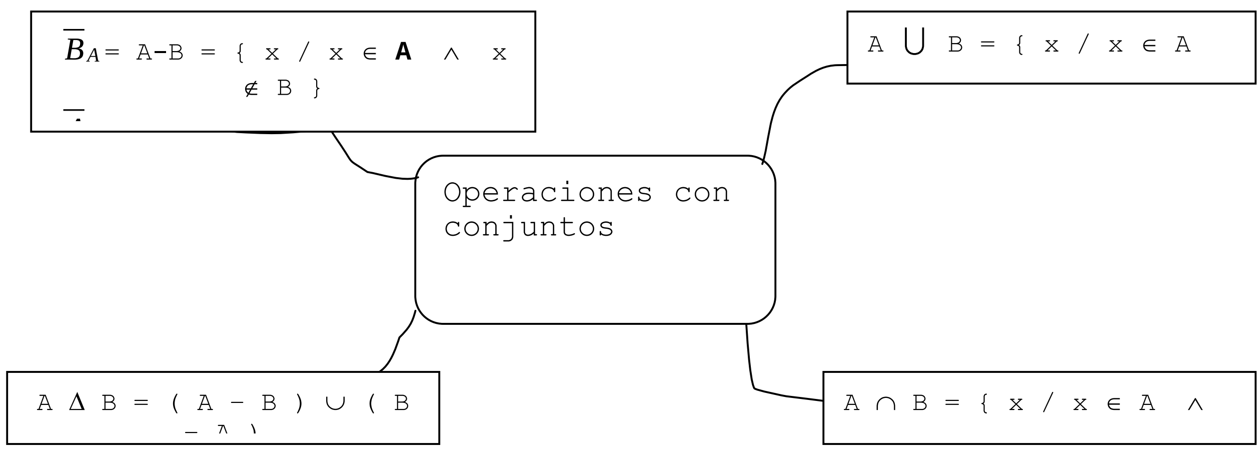
Distinguimos la reunión de dos regiones sombreadas:

- La superficie formada por elementos que solo están en B y no en A ó C; esto se expresa por: $B - (A \cup C)$.

- La inferior formada por los elementos que están en la intersección de A con C pero que no pertenecen a B; esto es: $(A \cap B) - B$.

  Luego la expresión dada es (b) correspondiente a la región sombreada.

ILUSTRACIÓN RESUMEN



ACTIVIDAD N° 02

Resuelva los siguientes ejercicios para autoevaluar su aprendizaje.

EJERCICIOS GRUPO 4

1. Dados los conjuntos: A = $\left\{x \in Z^{+}:\ x < 10\right\}$, B = $\left\{2x:\ x \in Z^{+}, x < 5\right\}$,

   C = $\left\{2x-1:\ x \in Z^{+}, x \leq 5\right\}$, D ={3, 4, 5}, E = {3, 5}.

   Hallar:

   a. $\left[\left(C \,\Delta\, B\right)'_{A} \cap \left(D \cup E\right)\right]'_{D}$ b. $\left[\left(A \cap E\right) \Delta \left(B\ -\ C\right)'_{(D\Delta E)}\right]$

   c. $\left\{\left(D \cup\ E'_{B}\right) \cap \left[\left(A'_{E}\ \ \Delta\ \ B'_{C}\right) \Delta \left(C\ \ \cup\ \ E'_{A}\right)\right]\right\} \bigcup \left[\left(C \,\Delta\, B\right)'_{A} \cap \left(D \cup E\right)\right]'_{D}$

   d. $\left\{\left(D' \Delta\ C'_{B}\right) \cap \left[\left(D'_{E} \cap B'_{C}\right)'_{(A\Delta E)} \Delta \left(B \cup C'_{E}\right)\right]\right\} \bigcap \left[\left(A \cap E\right) \Delta \left(B - C\right)'_{(D\Delta E)}\right]$

2. ¿Qué condiciones deben cumplir los conjuntos Ay B para que se verifiquen las siguientes relaciones?

   a. $A \cap B = \Phi$ b. $A \cup B = B$ c. $A \cap B = U$

   d. $A \cup \Phi = U$ e. $A - B = A$ f. $A \cap B' = B'$

   g. $A - B = B - A$ h. $A \,\Delta\, B = A \cup B$ i. $A \,\Delta\, B = B - A$

1. Si

   $$A = \left\{x \in \square^{+} : x > 4 \rightarrow x = 6\right\}$$

   $$B = \left\{x \in \square^{+} : x > 0\ \wedge\ x \leq 6\right\}$$

   $$C = \left\{x \in \square \,/\, \square\ (x \geq 1 \rightarrow x^{2} \neq 4x - 3)\right\}$$

   Hallar:

   a. $\left[\left(C \,\Delta\, B\right)'_{A} \cap \left(A \cup C'\right)\right]'_{B}$ b. $\left[\left(A \cap C'\right) \Delta \left(B\ -\ C\right)'_{(D\Delta E)}\right]$

   c. $\left\{\left(A' \Delta\ C'_{B}\right) \cap \left[\left(A'_{C} \cap B'_{C}\right)'_{(A\Delta C)} \Delta \left(B\ \ \cup\ \ C'_{B}\right)\right]\right\} \bigcap \left[\left(A \cap C\right) \Delta \left(B - A'\right)'_{(A\Delta C)}\right]$

ACTIVIDAD N° 01

OBJETIVO N° 03

Demostrar las leyes del álgebra de conjuntos.

Analice la siguiente información sobre las propiedades de las operaciones con conjuntos y las demostraciones realizadas.

LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Las definiciones de las operaciones con conjuntos, son:

1) $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \;/\; x \in A \Rightarrow x \in B$

2) $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

3) $A \cup B = \{ x \;/\; x \in A \vee x \in B \}$

4) $A \cap B = \{ x \;/\; x \in A \wedge x \in B \}$

5) $A - B = \{ x \;/\; x \in A \wedge x \notin B \}$ ó $A - B = A \cap B'$

6) $A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$

7) $A' = \{ x \;/\; x \in \mathbf{U} \wedge x \in A \}$ ó $A' = \{ x \;/\; x \notin A \}$

A continuación se presentan las Propiedades de las Operaciones con conjuntos, bajo el título de **Leyes Básicas del Álgebra de Conjuntos.** Se demuestran algunas de ellas.

LEYES BÁSICAS DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

1. **Idempotencia**

   1 a) $A \cup A = A$ 1 b) $A \cap A = A$

2. **Conmutativa**

   2 a) $A \cup B = B \cup A$ 2 b) $A \cap B = B \cap A$

3. **Asociativa**

   3 a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

   3 b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4. **Distributiva**

4 a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4 b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5.

5 a) $A \cup \varnothing = A$ 5 a) $A \cap \varnothing = A$

6.

6 a) $A \cup \mathbf{U} = A$ 6 b) $A \cap \mathbf{U} = A$

7.

7 a) $A \cup A' = \mathbf{U}$ 7 b) $A \cap A' = \varnothing$

8.

8 a) $(A')' = A$ 8 b) $\mathbf{U}' = \varnothing$ **,** $\varnothing' = \mathbf{U}$

9. <u>Leyes de D' Morgan</u>

9 a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

9 b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

10. <u>Leyes de Absorción</u>

10 a) $A \cup (A \cap B) = A$

10 b) $A \cap (A \cup B) = A$

A continuación se demuestran: 2 (a), 4 (b), 8 (a) y 9 (b).

<u>Demostración (2a)</u> $\mathbf{A \cup B = B \cup A.}$

Recuerde que dos conjuntos son iguales si y sólo si se verifica la doble inclusión:

(I) $(A \cup B) \subset (B \cup A)$ y (II) $(B \cup A) \subset (A \cup B)$

Entonces debe demostrarse (I) y (II); recurriendo a la definición de Inclusión.

(I) $(A \cup B) \subset (B \cup A) \Leftrightarrow \forall\, x \in (A \cup B) \,/\, x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in (B \cup A)$

Pero, $x \in (A \cup B) \Rightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$ Def. Unión

$\Rightarrow (x \in B) \vee (x \in A)$ Conmut. de $\vee$

$\Rightarrow x \in (B \cup A)$ Def. Unión

Luego, $x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in (B \cup A)$.

Con lo que queda demostrado: $(A \cup B) \subset (B \cup A)$ Def. Inclusión

II) $(B \cup A) \subset (A \cup B) \Leftrightarrow \forall\, x\, (B \cup A) / x \in (B \cup A) \Leftrightarrow x \in (A \cup B)$

Pero, $x \in (B \cup A) \Rightarrow (x \in B) \vee (x \in A)$ Def. Unión

$\Rightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$ Conmut. de $\vee$

$\Rightarrow x \in (A \cup B)$ Def. Unión

$\therefore$ $x \in (B \cup A) \Rightarrow x \in (A \cup B)$, esto es $(B \cup A) \subset (A \cup B)$ por

definición de Inclusión.

De (I) y (II) se sigue: $A \cup B = B \cup A$.

<u>Demostración (4b)</u> $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Equivale a demostrar:

(I) $[A \cap (B \cup C)] \subset [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$ y

(II) $[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \subset [A \cap (B \cup C)]$.

(I) $\forall x \in A \cap (B \cup C) / x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Pero $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \cup C)$ Def. Intersec

$\Rightarrow x \in A \wedge [x \in B \vee x \in C]$ Def. Unión

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$ Propiedad distributiva de $\wedge$ con respecto a $\vee$:

$[p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.

$\Rightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)$ Def. Intersec

$\Rightarrow x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$ Def. Unión

Entonces $x \in [A \cap (B \cup C)] \Rightarrow x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

$[A \cap (B \cup C)] \subset [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$ Def. de $\subset$.

Análogamente se demuestra (II). En efecto,

$\forall x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)] / x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)$ Def. de Intersección

$\Rightarrow [x \in A \wedge x \in B] \vee [x \in A \wedge x \in C]$

$[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \Leftrightarrow p \wedge (q \vee r) \Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$

Def. de Unión $\Rightarrow x \in A \wedge [x \in (B \cup C)]$

Def. de Intersección $\Rightarrow x \in [A \cap (B \cup C)]$

Luego $x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \Rightarrow x \in [A \cap (B \cup C)]$

Def. de Inclusión

$\therefore [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \subset [A \cap (B \cup C)]$.

De (I) y (II) se concluye que:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

<u>Demostración (8a)</u> $(A')' = A$.

Debe demostrarse que : (I) $(A')' \subset A$ y (II) $A \subset (A')'$.

(I) $\forall x \in (A')' / x \in (A')' \Rightarrow x \notin A'$ Def. Complemento

$\Rightarrow \sim [x \in A']$ Negación de $\in$

$\Rightarrow \sim [x \notin A]$ Def. Complemento

$\Rightarrow \sim [\sim(x \in A)]$ Negación de $\in$

$\Rightarrow \sim x \in A$ pues: $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$

Luego $(A')' \subset A$ por definición de Inclusión.

(II) $\forall x \in A / x \in A$ $\Rightarrow \sim [\sim(x \in A)]$ Doble Negación

$\Rightarrow \sim [x \notin A]$ Negación de $\in$

$\Rightarrow \sim [x \in A']$ Def. Complemento

$\Rightarrow x \notin A'$ Negación de $\in$

$\Rightarrow x \in (A')'$ Def. Complemento

$\therefore$ $A \subset (A')'$ por definición de Inclusión.

De (I) y (II) se sigue la igualdad.

<u>Demostración (9b)</u> $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Debe demostrarse:

(I) $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$ y (II) $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$

<u>Para I</u>

$\forall x \in (A \cap B)' / x \in (A \cap B)' \Rightarrow x \notin A \cap B$ Def. Complemento

$\Rightarrow \sim [x \in (A \cap B)]$ Negación de $\in$

$\Rightarrow \sim [x \in A \wedge x \in B]$ Def. Intersección

Recuerda que: $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

$\Rightarrow \sim (x \in A) \vee \sim (x \in B)$

$\Rightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B)$ Negación de $\in$

$\Rightarrow (x \in A') \vee (x \in B')$ Def. Complemento

$\Rightarrow x \in (A' \cup B')$ Def. Unión

Luego, $x \in (A \cap B)' \Rightarrow x \in (A' \cup B')$

$\therefore$ $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$ Por Def. de Inclusión

<u>Para II</u>

$\forall x \in (A' \cup B')' / x \in (A' \cup B') \Rightarrow (x \in A') \vee (x \in B')$ Def. Unión

$\Rightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B)$ Def. Complemento

$\Rightarrow \sim (x \in A) \vee \sim (x \in B)$ Negación de $\in$

$\Rightarrow \sim [(x \in A) \wedge (x \in B)]$

Por que $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \wedge q)$

$\Rightarrow \ \sim [\, x \in A \cap B \,]$ Def. Intersección

$\Rightarrow \ x \notin A \cap B$ Negación de $\in$

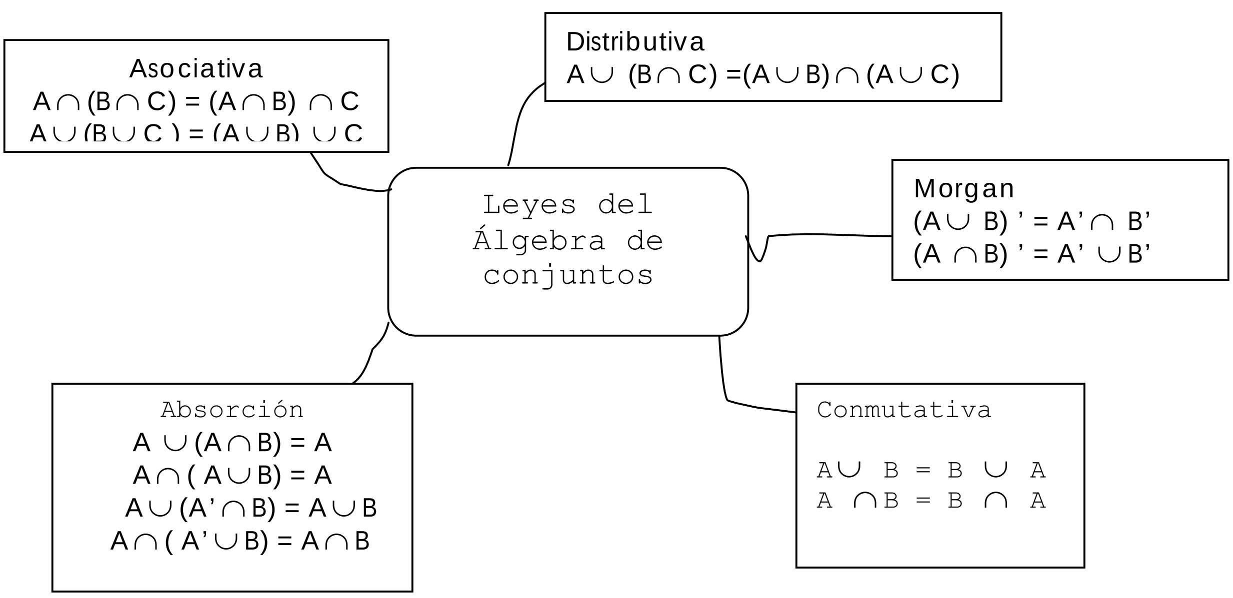
$\Rightarrow \ x \in (A \cap B)'$ Def. Complemento

Luego, $x \in (A' \cup B') \Rightarrow x \in (A \cap B)'$, lo cual demuestra que:

$$(A' \cup B') \subset (A \cap B)'.$$

De (I) y (II) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

ILUSTRACIÓN RESUMEN



ACTIVIDAD N° 02

Demuestre a continuación las leyes del álgebra que se mencionan

EJERCICIOS GRUPO 5

I. Utiliza convenientemente las definiciones de las operaciones con conjuntos para resolver los problemas que se plantean a continuación.

1. ¿Cuál es la expresión equivalente a: $x \in [A \cup (A \cap B)]$?
   a. $x \in A \wedge x \in B$
   b. $x \in A$
   c. $(x \in A) \vee (x \in B)$
2. ¿Cuál es la expresión equivalente a: $x \in [A \cap (B - C)]$?
   a. $x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)$
   b. $x \in (A \cap B) \vee x \notin (A \cup B)$
   c. $x \in (A \cap B) \wedge (x \in C')$
   d. $x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$
3. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son siempre verdaderas?
   a. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$ b. $A \,\Delta\, B' = B' \cap A'$
   c. $A \subset B' \Rightarrow B' \cap A' = (A \cap B)'$
   d. $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$

II. Desarrollar:

1. Dados los conjuntos A, B, C y D, efectuar las operaciones indicadas y representar gráficamente los resultados, siendo:

$$A = \{ x \,/\, x = \frac{2n-1}{3},\ n \in \mathbb{N} \}$$

$$B = \{ x \,/\, x^2 - 7x = 0 \}$$

$C = \{ x / (x - 2)(x^2 - 9)(x - 4) = 0 \}$

a. $(B - A) \cup C$ b. $(B \cup C) - A$

c. $(B \Delta C) \cap A'$ d. $A' \cap C$

Nota. U = □ .

2. Con los conjuntos A y B se define una nueva operación Ξ, tal que :

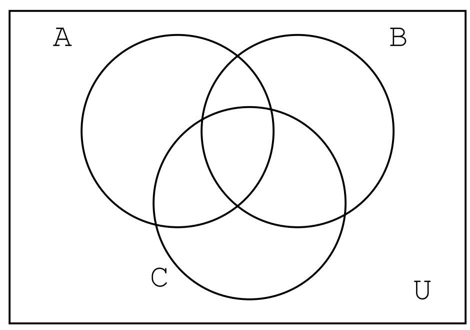
$$A \Xi B = (A - B) \cap B'.$$

Si $A = \{5, 4, 7, 6, 2\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Hallar:

a. $A \Xi B$ b. $B \Xi A$ c. $(B \Xi A) \Xi B$

II. Repetir el siguiente diagrama y sombrear la región que se solicita en cada caso.



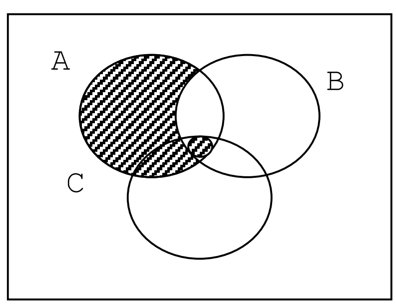
a. $A \cap (B \cup C)$

b. $A \cup (B \cap C)$

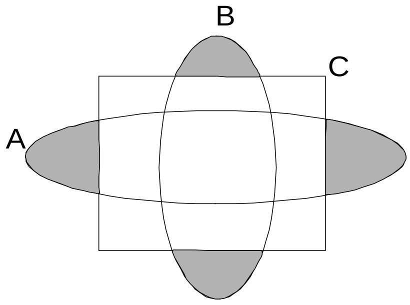
c. $(A \cap B) - C$

d. $(A \Delta C) \cap A'$

III. Hallar la expresión que representa la siguiente región sombreada.



IV. ¿Qué relación conjuntista representa la región sombreada?.



a) $[(A \cup B) \cap C'] \cup (A' \cup B' \cup C')'$

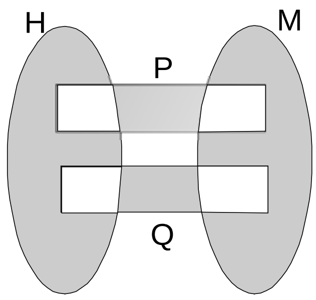
b) $(A \Delta B) \cup C$

c) $(B \Delta C) \cup (A \cap B \cap C)$

d) $(A' \cup B' \cup C')' \cup (A \cap C') \cup (B \cap C')$

e) $(A \cap B \cap C) \cup (C \cap A') \cup (C \cap B')$

V. Deducir del siguiente diagrama las operaciones que se han realizado para obtener la región sombreada.



a) $(P \cup Q) \Delta (H' \cap M)$

b) $(H' \cap M) \Delta (P \cup Q)$

c) $(P \cap Q) \Delta (H \cup M)$

d) $(H \cup M) \bigcup (P \cup Q)$

e) $(P \cup Q) \Delta (H \cup M)$

ACTIVIDAD N° 01

OBJETIVO N° 03

Hallar el Conjunto Potencia de un Conjunto cualquiera y demostrar sus propiedades.

Estudie la siguiente información que se ofrece sobre el Conjunto potencia y sus propiedades.

CONJUNTO POTENCIA O CONJUNTO DE PARTES

Definición. El Conjunto Potencia de un conjunto A, denotado por $\mathcal{P}$ (A), es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A. Es decir,

$$\mathcal{P}(A) = \{ X / X \subset A \}$$

Nota. 1) $X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subset A$.

2) $A \in \mathcal{P}(A)$, $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$; pues: $A \subset A$, $\varnothing \subset A$.

Ejemplo 1. Si $A = \{ 1, 2, 3 \}$, entonces $\{ 1 \} \subset A$, $\{ 2 \} \subset A$, etc.

Entonces:

$$\mathcal{P}(A) = \{ \varnothing, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 3 \}, \{ 1, 2 \}, \{ 1, 3 \}, \{ 2, 3 \}, A \}.$$

Ejemplo 2. $\mathcal{P}(\varnothing) = \{ \varnothing \}$.

Ejemplo 3. $A = \{ x / x - 4 = 0 \} \quad \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{ \varnothing, A \}$.

Ejemplo 4. Dado el siguiente conjunto:

$$A = \{ \varnothing, \{ \varnothing \}, \{ \{ \varnothing \} \}, \{ \{ \{ \varnothing \} \} \} \}$$

Determinar el valor de verdad de cada proposición.

- $\varnothing \in A$ .... (V)
- $\varnothing \subset A$ .... (V)
- $\{ \{ \varnothing \} \} \in A$ .... (V)
- $\{ \{ \varnothing \} \} \subset A$ .... (V)
- $\{ \{ \varnothing \} \} \in P(A)$ .... (V)
- $\{ \{ \{ \varnothing \} \} \} \subset P(A)$ .... (V)
- $\{ \{ \{ \{ \varnothing \} \} \} \} \in P(A)$ .... (V)

Propiedades del P (A):

1) $A \subset B \Leftrightarrow P(A) \subset P(B)$.
2) $A = B \Rightarrow P(A) = P(B)$.
3) $[P(A) \cup P(B)] \subset P(A \cup B)$.
4) $P(A \cup B) = P(A) \cap P(B)$.

Demostración de (1): $A \subset B \Leftrightarrow P(A) \subset P(B)$.

$\Rightarrow$) Si $A \subset B \Rightarrow P(A) \subset P(B)$.

En efecto, sea $X \in P(A) \Rightarrow X \subset A$ Def. de $P(A)$

$\Rightarrow X \subset B$ Prop. Transitiva de la Inclusión.

$\Rightarrow X \in P(B)$ Definición de $P(B)$

Luego, $X \in P(A) \Rightarrow X \in P(B)$

$\therefore P(A) \subset P(B)$.

$\Leftarrow$) $P(A) \subset P(B) \Rightarrow A \subset B$

Sea $x \in A \Rightarrow \{ x \} \subset A$ Subconjunto de A

$\Rightarrow \{ x \} \in P(A)$ Def. $P(A)$

$\Rightarrow \{ x \} \in P(B)$ pues $P(A) \subset P(B)$

$\Rightarrow \{ x \} \subset B$ Def. $P(B)$

$\Rightarrow x \in B$ Sub conjunto de B

$\therefore$ $A \subset B$ por definición de Inclusión.

<u>Demostración de (3)</u> $\mathbf{[P(A) \cup P(B)] \subset P(A \cup B)}$.

Sea $X \in [P(A) \cup P(B)] \Rightarrow [X \in P(A)] \vee [X \in P(B)]$

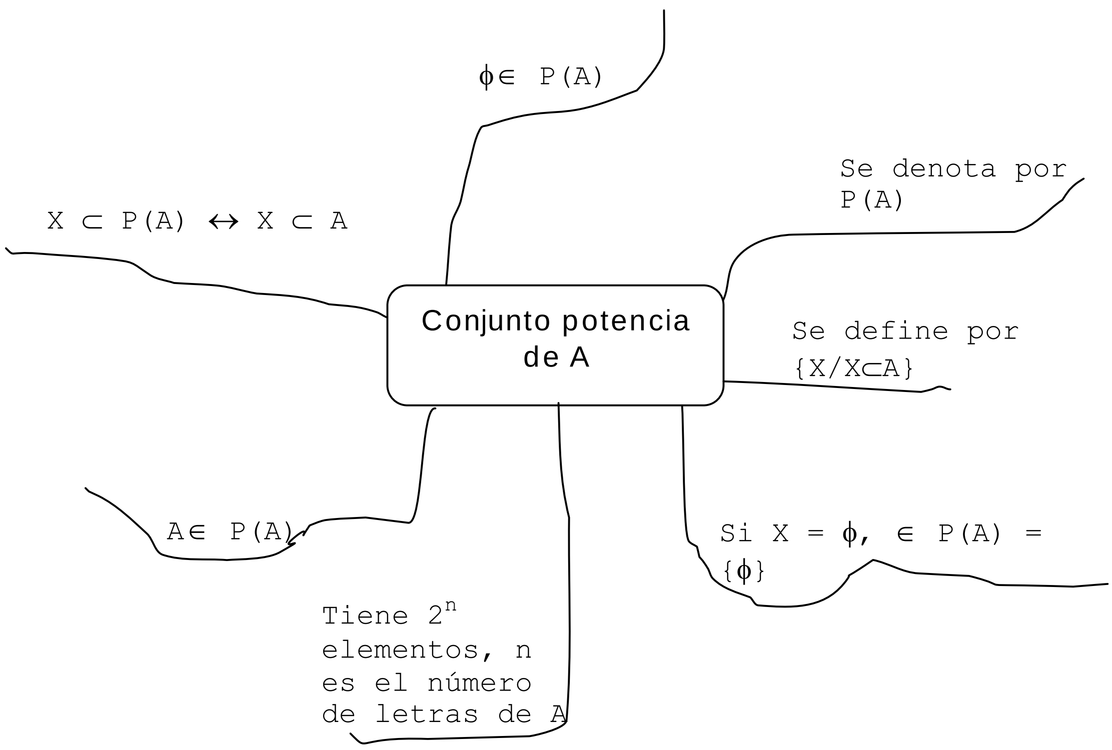
Def. Unión

$\Rightarrow (X \subset A) \vee (X \subset B)$ **Def. Conj. Pot.**

$\Rightarrow X \subset (A \cup B) \Rightarrow X \in P(A \cup B)$

Luego $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

ILUSTRACIÓN RESUMEN



ACTIVIDAD N° 02

Resuelva los siguientes ejercicios para evaluar su aprendizaje.

EJERCICIOS GRUPO 5

1) Hallar el Conjunto Potencia de C, siendo C = { ∅ , c , { ∅ } }.

2) ¿En qué caso se cumple que: $A \subset P(A)$?

3) Siendo A = { a , ∅ } y B = { { ∅ } , { a } } , hallar:

   a. $P(A) \cap P(B)$

   b. $P(A \cup B)$

4) Demostrar que:

   a. $A = B \Rightarrow P(A) = P(B)$

   b. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

CLAVE DE RESPUESTAS

1) $P(C)$ = { ∅ , { ∅ } ,{ c }, { { ∅ } } , { ∅,c } , { ∅,{ ∅ } } , { c, { ∅ } } , C}

2) Si A = ∅ ó A = {∅}

3) $P(A) \cap P(B) = \emptyset$

$P(A)$ = {∅,{a},{∅},{{∅}},{{a}},{a,∅},{a,{∅}},{a,{a}},{∅,{∅}},{∅,{{a}},{{∅}},{a}},{a,∅,{∅}},{a,{∅},{a}},{∅,{∅},{a}},{a,∅,{a}},A∪B}

ACTIVIDAD N° 01

<u>OBJETIVO N° 06</u>

Resolver problemas diversos relativos al Número Cardinal de Conjuntos.

Infórmese sobre las propiedades del número cardinal de conjuntos y sus aplicaciones que se ofrecen en el siguiente texto.

NÚMERO DE ELEMENTOS O NÚMERO CARDINAL DE UN CONJUNTO

Naturalmente que la idea del número de elementos de un conjunto finito cualesquiera, es primitiva por lo que se admite como la cantidad de elementos que hay en un conjunto. Se denota por,

$$n(A) = \text{card}(A).$$

<u>Nota.</u> (A) también se llama número cardinal del conjunto A.

<u>Ejemplo.</u> Si $A = \{a,b,c\}$ y $B = \{1,-3,5,\{3\},2\}$, entonces
$n(A) = 3$, $n(B) = 5$, $n[P(A)] = 2^3 = 8$, $n[P(B)] =^5 = 32$.

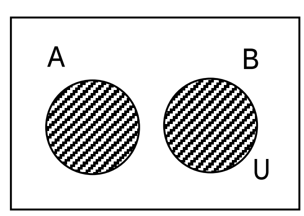
<u>Propiedades:</u>

1) Si A y B son conjuntos finitos disjuntos, entonces:

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B),\ \text{si } A \cap B}$$

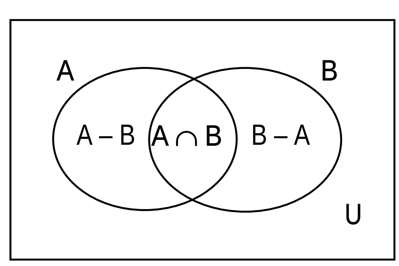
Obviamente que si $A \cap B = \varnothing$, entonces $n(A \cap B) = 0$.

$A \cup B$ es la parte sombreada del gráfico, entonces:



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

2) Si A y B son conjuntos finitos arbitrarios, no necesariamente disjuntos, expresamos:



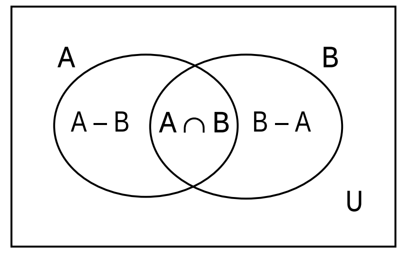
$A = (A - B) \cup (A \cap B)$,

Con $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$.

Entonces por (1):

$\boxed{n(A - B) = n(A) + n(A \cap B)}$ ó $\boxed{n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)}$

3) Si A y B son conjuntos finitos arbitrarios, no necesariamente disjuntos, entonces:



$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$

En efecto, en el gráfico dado observamos que:

$A \cup B = [(A - B) \cup (A \cap B)] \cup (B - A)$; es decir

$A \cup B$ es la unión de tres conjuntos disjuntos entre sí.

Luego:

$n(A \cup B) = n[(A - B) \cup (A \cap B)] + n(B - A)$ por (1)

$= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$ por (1)

$= [n(A) - n(A \cap B)] + n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$ por (2)

$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

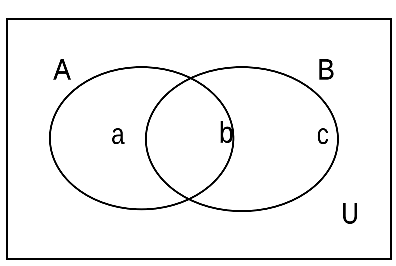
Nota .- Ud. puede tomar $A \cup B = (A - B) \cup B$ y demostrar lo mismo.

4) Si A, B y C son conjuntos finitos tales que: $A \cap B \cap C \neq \varnothing$ entonces:

$$\boxed{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).}$$

Basta tomar: $(A \cup B \cup C) = A \cup (B \cup C)$ y aplicar (1) y (3).

Para fines prácticos es conveniente representar $A \cup B$ en un diagrama de Venn compuesto por zonas disjuntas como se ilustra a continuación:



Donde: $a = n(A - B)$

$b = n(A \cap B)$

$c = n(B - A)$

Ejemplo 1. De un grupo de 100 alumnos: 49 no hablan Inglés, 53 no hablan Francés y 27 no hablan Inglés ni Francés.¿Cuántos alumnos hablan uno de los idiomas?

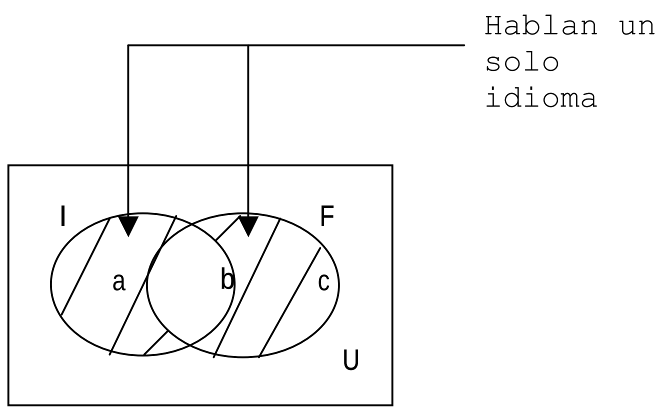
Solución:

Hablan Inglés = I Hablan Francés = F

$n(I') = 49 \Rightarrow n(I) = 51,$

$n(F') = 53 \Rightarrow n(F) = 47.$

Gráficamente:



Por dato:

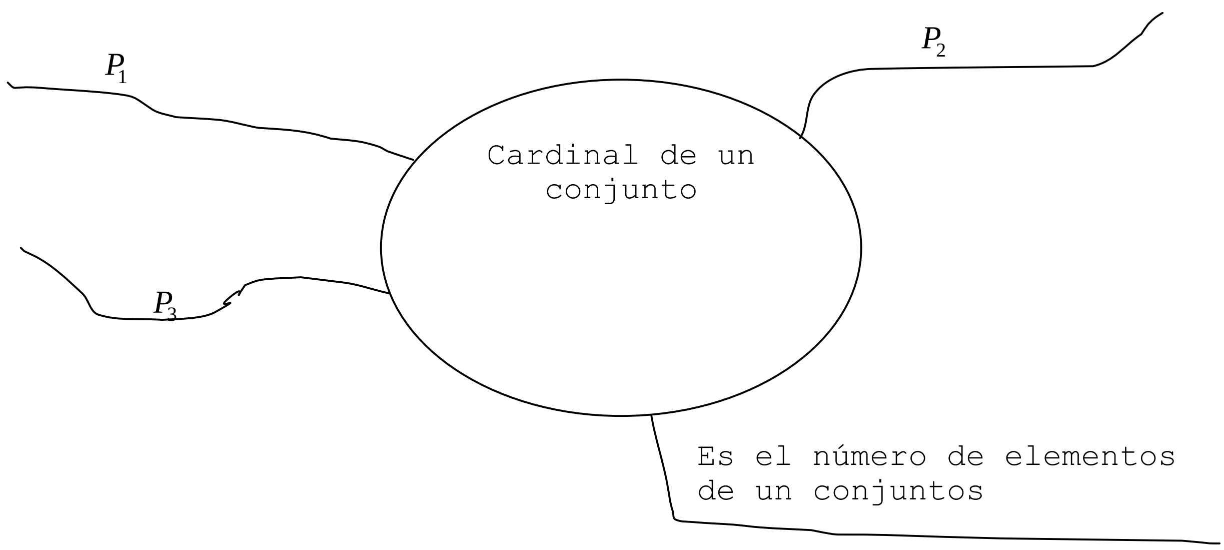
$c + 27 = 49 \Rightarrow c = 22,$

$a + 27 = 53 \Rightarrow a = 26.$

Luego:

$a + c = 48.$

ILUSTRACIÓN RESUMEN



ACTIVIDAD N° 02

Resuelva los siguientes ejercicios para evaluar su aprendizaje.

EJERCICIOS GRUPO 7

1) Los conjuntos A, B y C, tienen k, 3k y (k-1) elementos, respectivamente.
A y B tienen k/2 elementos comunes; A y C tienen k/4, y B y C tienen 2.
Si existe un único elemento común a los tres conjuntos. Hallar el número de elementos de: $[(A \cup B) - (A \cap B)] - C$.

2) En una encuesta realizada a 150 personas sobre sus preferencias de tres productos A, B y C, se encontró el siguiente resultado:

- 82 consumen el producto A.
- 54 consumen el producto B.
- 50 sólo consumen el producto A.
- 30 sólo consumen el producto B.
- El número de personas que consumen sólo B y C es la mitad de las personas que consumen sólo A y C.
- El número de personas que consumen sólo A y B es el triple de las personas que consumen los tres productos.
- El número de personas que no consumen los productos mencionados son tantos como los que consumen sólo C.

Determinar:

a) El número de personas que consumen sólo dos de los productos.
b) El número de personas que no consumen A, B ni C.
c) El número de personas que por lo menos consumen uno de los productos.

3) Un club consta de 78 personas; de ellas 50 juegan fútbol , 32 básquet y 23 vóley. Seis figuran en los tres deportes y 10 no practican deporte alguno. Entonces:
   a) ¿Cuántas personas practican sólo un deporte?
   b) ¿Cuántas personas practican sólo dos deportes?
   c) ¿Cuántas personas practican al menos dos deportes?
   d) ¿Cuántas personas practican como máximo dos deportes?

4) En un Congreso Internacional de Medicina, se debatió el problema de la Eutanasia, planteándose una moción:
   - 115 europeos votaron a favor de la moción,
   - 75 cardiólogos votaron en contra,
   - 60 europeos votaron en contra,
   - 80 cardiólogos votaron a favor.

   Si el número de cardiólogos europeos excede en 30 al número de americanos de otras especialidades y no hubo abstenciones. ¿ Cuántos médicos participaron en el congreso?

5) Se hizo una encuesta a 160 alumnos del CEPUNS sobre la preferencia de 4 carreras profesionales: Ingeniería de Sistemas (S), Enfermería (E), Comunicación Social (C) y Biología en Acuicultura (B), obteniéndose los siguientes datos:
   - Ninguno de los que prefieren (C) simpatizan con (B).
   - 22 sólo con (S)
   - 20 sólo con (E)
   - 20 sólo con (C)
   - 20 con (S) y (B) pero no con (E)
   - 6 sólo con (C) y (E)
   - 4 con (S) y (C)
   - 24 con (B) y (E)
   - 28 sólo (B).

   ¿Cuántos prefieren sólo (S) y (E), si a todos por lo menos les gusta una carrera profesional?

6) De 700 postulantes que se presentaron a la UNS o a la UNT, 400 lo hicieron a la UNT, igual número a la UNS, ingresando la mitad del total de postulantes. Los no ingresantes se presentaron a la UNMSM, de éstos 90 no se presentaron a la UNS y 1800 no se presentaron a la UNT. ¿Cuántos postulantes ingresaron a la UNT y a la UNS?.

7) Suponga que los brevetes sólo se consiguen legalmente, los que tienen brevete profesional saben mecánica mientras que los que tienen brevete particular sólo están autorizados a manejar automóviles y así lo hacen.

Si tienen los siguientes datos referente a un grupo de personas:

- 21 no tienen brevete profesional o no manejan camiones.
- 13 saben encender un vehículo pero no tienen brevete.
- 8 saben manejar vehículos pero no tienen brevete.
- 2 saben mecánica y manejan camiones. El mismo número sabe manejar vehículos pero no maneja camiones ni tiene brevete.
- 11 no tienen brevete pofesional y no manejan camiones.
- 3 tienen brevete particular.

Además, téngase en cuenta que los que saben mecánica tienen brevete profesional.

Se pregunta lo siguiente:

a) ¿Cuántos son en total?.

b) ¿Cuántos no tienen brevete?.

c) ¿Cuántos cometen infracción de manejar vehículos sin tener brevete?.

d) ¿Cuántos saben encender un vehículo pero no manejarlos?.

8) En un avión hay 9 jóvenes, 5 niños peruanos, 9 hombres, 7 jóvenes extranjeros, 14 peruanos, 6 peruanos varones, y 7 mujeres extranjeras.

a) ¿Cuál es el número de personas del avión?

b) ¿Cuántos son solamente peruanos?