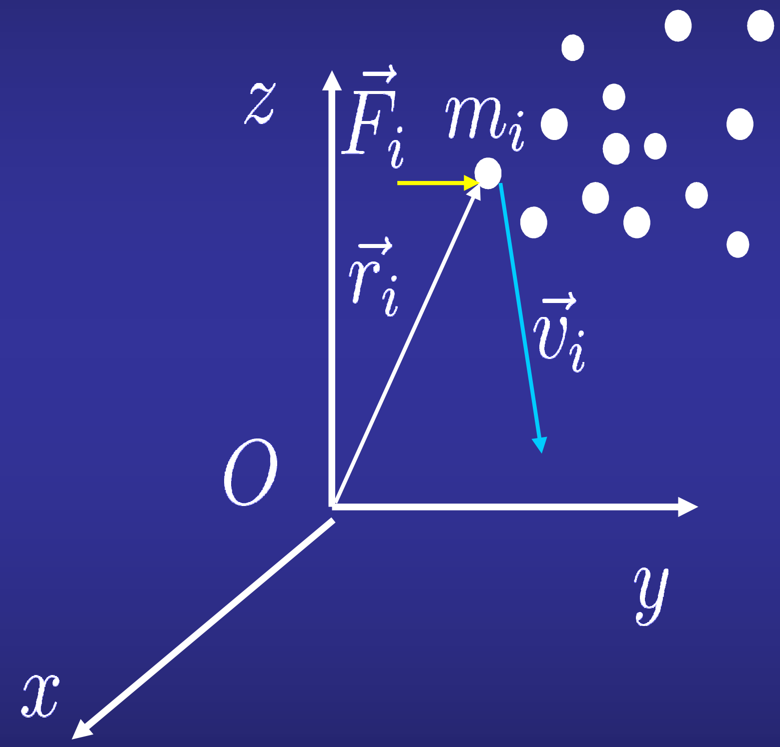
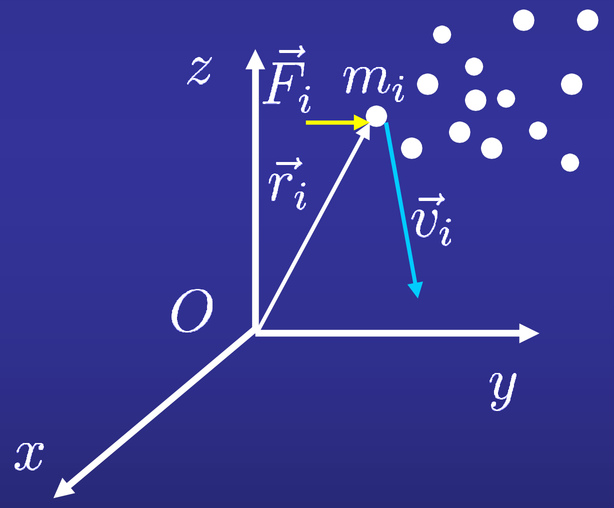
Dinámica de los sistemas de partículas



Definiciones básicas

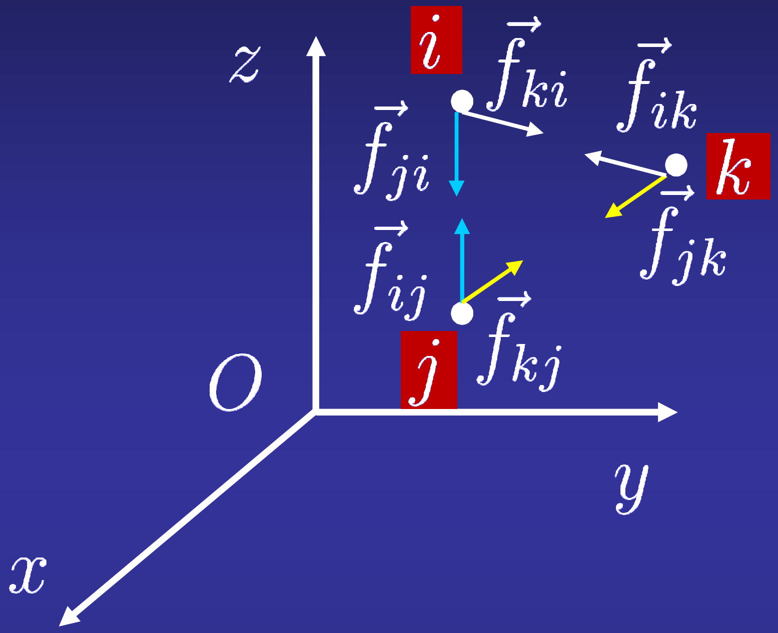
Supongamos un sistema compuesto por n partículas.
Para cada una de ellas podemos definir

$$1 \le i \le n$$



Masa	m_i
Posición	$\vec{r}_i$
Velocidad	$\vec{v}_i$
Aceleración	$\vec{a}_i$
Fuerza externa	$\vec{F}_i$
Fuerza interna ejercida por j sobre i	$\vec{f}_{ji}$

Propiedades de las fuerzas interiores



$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

$$\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij} = 0$$

$$\vec{r}_i \times \vec{f}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ij} = \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji} + \vec{r}_j \times (-\vec{f}_{ji}) = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ji} =$$

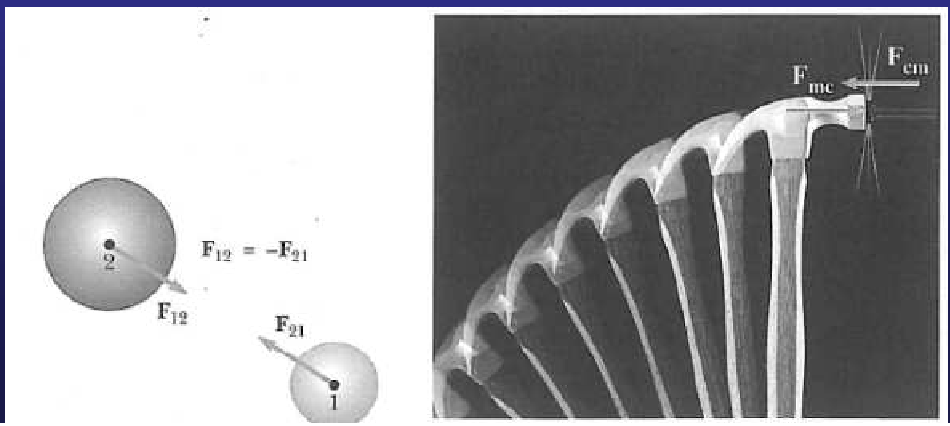
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji} = 0}$$

Tercera ley de Newton:
(principio de acción y reacción)

Si dos objetos interactúan, la fuerza F_{12} ejercida por el objeto 1 sobre el 2 es igual en módulo y dirección, pero opuesta en sentido, a la fuerza F_{21} ejercida por el objeto 2 sobre el objeto 1.

Las fuerzas siempre se producen por parejas. No puede existir una única fuerza aislada.

En todos los casos, las fuerzas de acción y reacción actúan sobre objetos diferentes, y deben ser del mismo tipo.



Notación

$$\vec{F}_{ab}$$

Fuerza ejercida por *a* sobre *b*

Aplicación de las leyes de Newton

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ji} = m_i \vec{a}_i$$

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji} = \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i$$

Sumando para todas las partículas

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \cancel{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_{ji}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \cancel{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i}$$

Los sistemas de vectores $\vec{F}_i$ y $m_i \vec{a}_i$ tienen la misma resultante y el mismo momento resultante

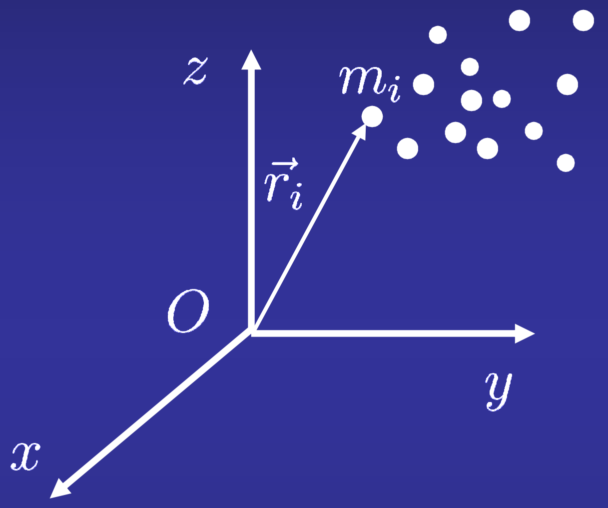
Momentos lineal y angular de un sistema de partículas

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \Rightarrow \frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Oi}$$

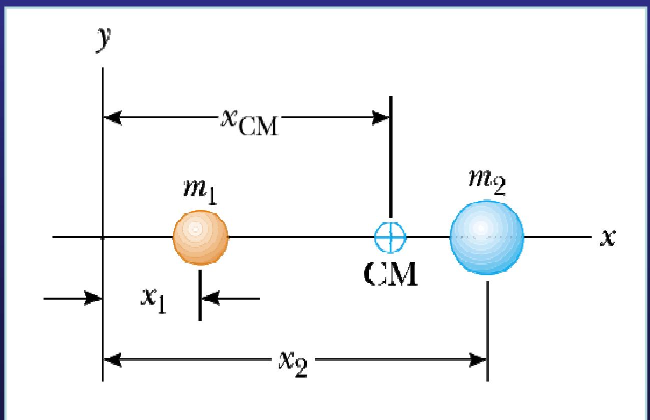
Centro de masa de un sistema de partículas: Definición

La posición del centro de masas de un sistema se puede describir como la posición media de la masa del sistema



$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M}$$

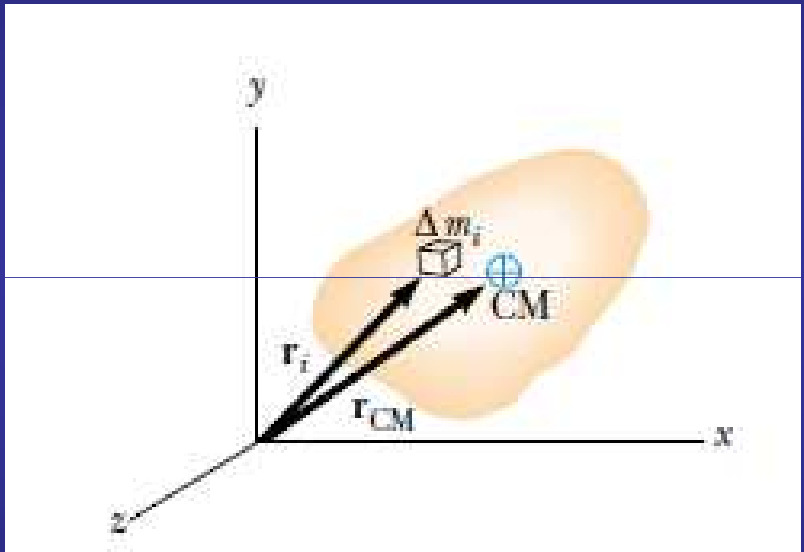
$$\begin{cases} x_{\mathrm{CM}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M} \\[2ex] y_{\mathrm{CM}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M} \\[2ex] z_{\mathrm{CM}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M} \end{cases}$$



El centro de masas de dos partículas de masas diferentes se encuentra entre las dos partículas y más cerca de la de mayor masa

Centro de masa de un sistema continuo: Definición

La posición del centro de masas de un sistema se puede describir como la posición media de la masa del sistema



Podemos modelar el objeto no puntual como un sistema formado por un gran número de elementos.

Cada elemento se considera como una partícula de masa Δm_i **y coordenadas** $\vec{r}_i \equiv x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}$

La separación entre las partículas en este modelo es muy pequeña, por lo que éste es una buena representación continua de masa del objeto.

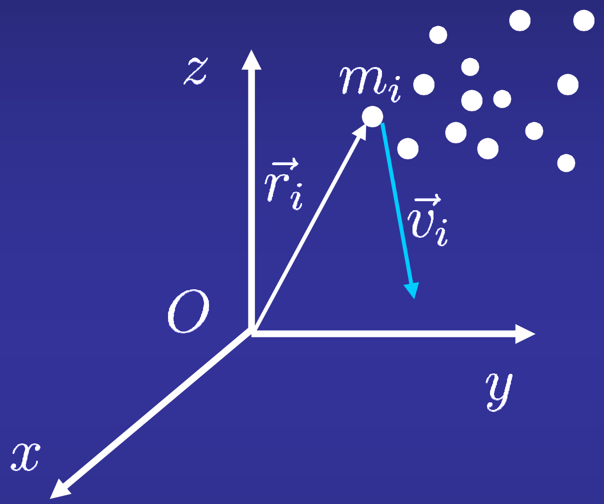
$$\vec{r}_{\text{CM}} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \Delta m_i}{M}$$

Si establecemos que el número de partículas tiende a infinito (y como consecuencia el tamaño y la masa de cada elemento tiende a cero)

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \Delta m_i}{M} = \boxed{\frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm}$$

Movimiento de un sistema de partículas: Definición de la velocidad del centro de masas

Suponiendo que ninguna partícula entra ni sale del sistema, de manera que M permanece constante



$$\vec{v}_{\rm CM} = \frac{d\vec{r}_{\rm CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \boxed{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}$$

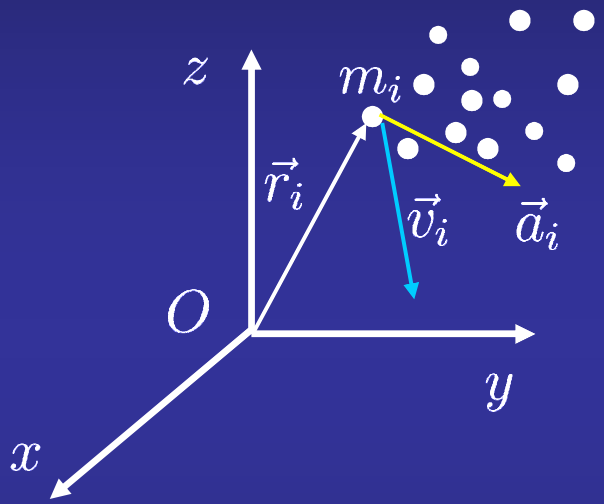
$$M\vec{v}_{\rm CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \vec{p}_{\rm tot}}$$

La cantidad de movimiento total del sistema es igual a su masa total multiplicada por la velocidad del centro de masas.

La cantidad de movimiento total de una sola partícula de masa M que se mueve con la velocidad del centro de masa

Movimiento de un sistema de partículas: Definición de la aceleración del centro de masas

Si volvemos a derivar con respecto del tiempo, podemos obtener la aceleración del centro de masas



$$\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\vec{v}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \boxed{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i}$$

$$M\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

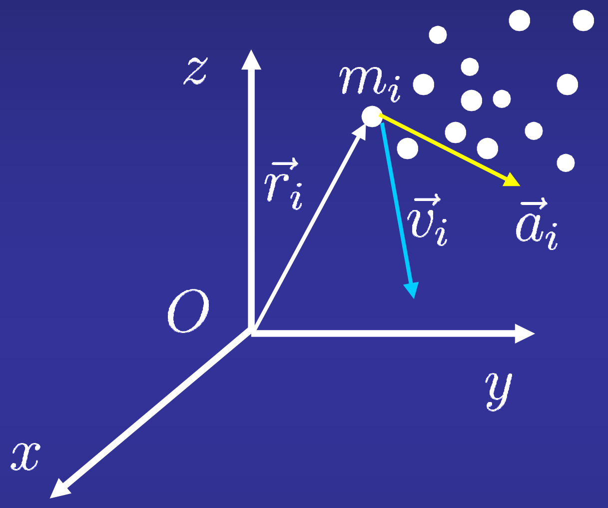
A priori, $\vec{F}_i$ son todas las fuerzas que actúan sobre la partícula i, tanto internas como externas.

Sin embargo, como ya hemos visto, al sumar las fuerzas internas se cancelan dos a dos.

Por lo tanto, la fuerza neta ejercida sobre el sistema se debe sólo a las fuerzas externas.

$$\sum \vec{F}_{\mathrm{ext}} = M\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\vec{p}_{\mathrm{tot}}}{dt}$$

Movimiento de un sistema de partículas: Definición de la aceleración del centro de masas



$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt}$$

La fuerza exterior neta ejercida sobre el sistema de partículas es igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración del centro de masas o, lo que es lo mismo, a la variación de la cantidad de movimiento del sistema

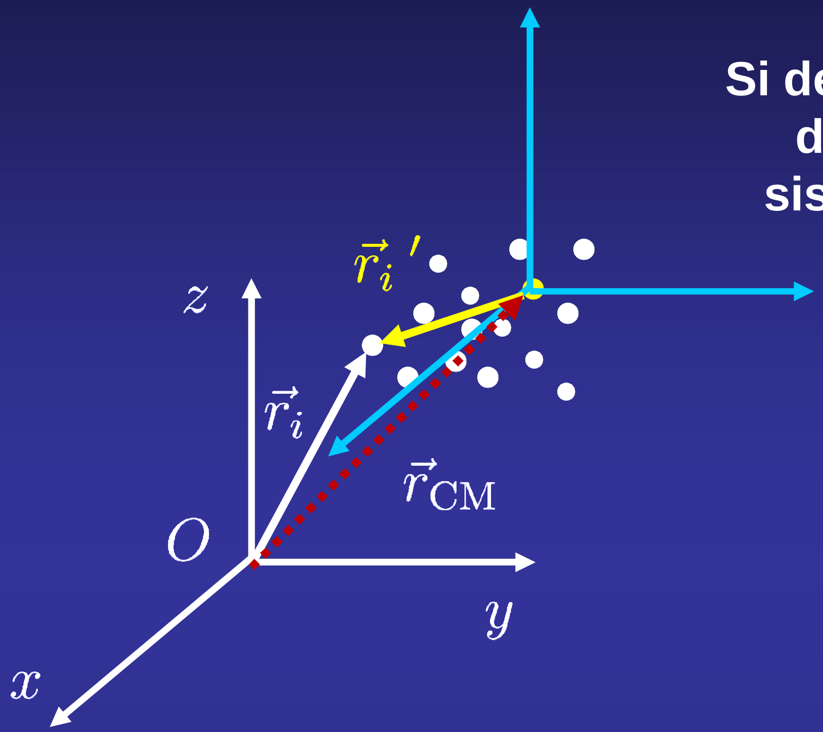
El centro de masas de un sistema se mueve como una partícula imaginaria de masa M bajo la influencia de la fuerza neta ejercida sobre el sistema.

En ausencia de fuerzas externas, el centro de masas se mueve con velocidad uniforme.

$$\frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = M\vec{a}_{\text{CM}} = 0$$

$$\vec{p}_{\text{tot}} = M\vec{v}_{\text{CM}} = \text{constante} \qquad \text{cuando} \quad \sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0$$

Sistema de referencia del centro de masas



Si describimos las posiciones, velocidades y aceleraciones de todas las partículas del sistema con respecto a un sistema de referencia con origen en el centro de masas:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{\mathrm{CM}} + \vec{r}_i\,'$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{v}_i\,'$$

$$\vec{a}_i = \vec{a}_{\mathrm{CM}} + \vec{a}_i\,'$$

Por definición de posición y velocidad del centro de masas llegamos a las siguientes conclusiones

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = M\vec{r}_{\mathrm{CM}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\,' = M\vec{r}\,'_{\mathrm{CM}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{\mathrm{CM}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i\,' = M\vec{v}\,'_{\mathrm{CM}} = 0$$

Energía cinética de un sistema de partículas

Aplicando la definición de energía cinética

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{v}_i' \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{\mathrm{CM}}^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{\mathrm{CM}} \cdot \vec{v}_i'$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) \vec{v}_{\mathrm{CM}}^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2 + \vec{v}_{\mathrm{CM}} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i' \right)$$

$$= \frac{1}{2} M \vec{v}_{\mathrm{CM}}^2 + K'$$

$$K = K_{\mathrm{CM}} + K'$$

Relación entre momentos angulares para el sistema de laboratorio y el sistema de centro de masas

Aplicando la definición de momento angular

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_{\mathrm{CM}} + \vec{r}_i\,'\right) \times m_i \left(\vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{v}_i\,'\right)$$

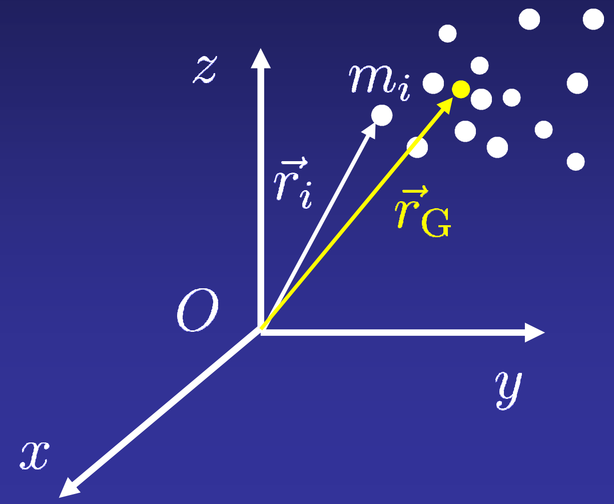
$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times m_i \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_i\,' + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i\,' \times m_i \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i\,' \times m_i \vec{v}_i\,'$$

$$= \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i\,'\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\,'\right) \times \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i\,' \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{L}_O = \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times M \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{L}_{\mathrm{CM}}$$

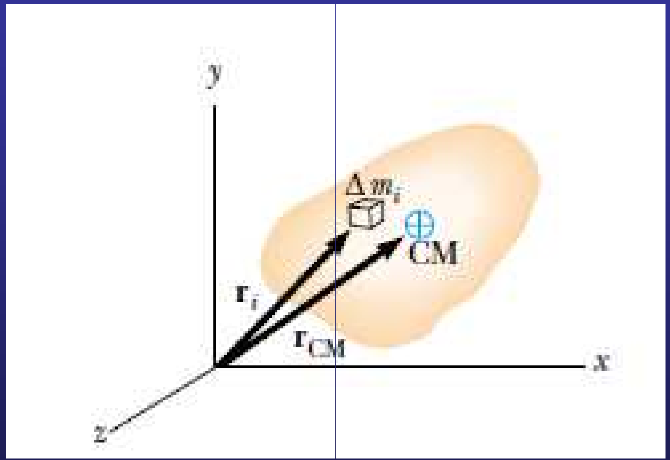
Cálculos de los centros de gravedad: Definición

Sistema discreto



$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Sistema continuo



$$\vec{r}_G = \frac{\int \vec{r}\ dm}{\int dm}$$