

TEMA 1 TRACCIÓN, COMPRESIÓN Y ESFUERZO CORTANTE.

INTRODUCCIÓN

La construcción de una nueva máquina se realiza bien por su necesidad actual bien por su necesidad futura.

El proceso de construcción de una máquina puede descomponerse en cuatro fases:

Diseño en el que se lleva a cabo la concepción de la máquina capaz de adaptarse en principio a las exigencias que se le plantean. Es una fase creativa en la que el ingenio y la experiencia son precisos. Es quizás la fase más ilusionante del proceso pues el autor/es responden al reto que se les ha presentado.

Proyecto en el que se realizan los cálculos y dimensionamientos precisos que permiten el funcionamiento continuado y sin problemas de la máquina. Es la fase más técnica ya que en ella se aplican un conjunto de normas y métodos, adquiridos mediante el estudio y la experiencia. En esta fase al autor/es se les exige una formación integral en los aspectos técnicos y agronómicos que deben caracterizarle.

Construcción en esta fase una vez terminado el diseño y realizados los cálculos necesarios para un funcionamiento racional de la máquina se procede a la construcción de la misma. Para que esta fase se desarrolle de forma adecuada es preciso que el autor tenga además de una buena formación en cuanto a materiales y a sus características de uso un elevado nivel de conocimientos de tecnología de taller, de las máquinas herramientas y de su utilización correcta.

Ensayo con el se hace una comprobación de los principios usados en la concepción de la máquina, de los materiales seleccionados en su construcción, de su funcionamiento y de las características de su funcionamiento.

Es interesante señalar que la idea concebida inicialmente en la mayoría de los casos es muy distinta del modelo construido pues al realizar el proyecto surgen condicionantes diversas que originan modificaciones y perfeccionamientos que hacen incluso aparecer varias soluciones. Imperativos normalmente económicos y de tiempo obligan a adoptar la solución que parezca más preferible.

El diseño de una máquina consiste en la aplicación de una combinación de principios científicos y experimentales que rara vez aportan soluciones correctas al primer intento, lo que pone al proyectista en situaciones incómodas, y es que la concepción de una máquina al igual que puede ofrecer cotas de satisfacción inenarrables puede ser causa de profundas decepciones. Quizás es esta una de las causas del interés que los ingenieros muestran por este tipo de trabajos.

Para ser un buen proyectista de máquinas es preciso conocer:

- La resistencia de materiales para que sus análisis sean irreprochables.
- Las propiedades de los materiales empleados para la construcción de los elementos de las máquinas.
- Los procesos de fabricación.
- Las ofertas del mercado (catálogos, precios,...).
- Las condiciones de trabajo de las máquinas a diseñar.

Además es preciso tener :

- Sentido estético.
- Conocimientos de economía y de cálculo de costes de funcionamiento de las máquinas.
- Capacidad inventiva.
- Intuición creadora.
- Juicio.
- Sensibilidad
- Capacidad de predicción.

En general la idea que se tiene de un inventor es la de que pone en juego su imaginación y crea un nuevo diseño. Esto es cierto pero es conveniente saber que para crear una máquina se hace uso de ideas ya conocidas a las que se saca provecho.

Es importante señalar antes de terminar este apartado de introducción que para llegar a una determinada máquina hay un auténtico proceso de evolución en el que de forma paulatina y ordenada, respondiendo a las necesidades surgidas con el uso, se producen mejoras que constituyen avances.

A modo de consejo una referencia a una máxima muy antigua pero de gran valor para el ingeniero proyectista *"si la teoría y la práctica no concuerdan, es que hay algún error"*

Por último, una aclaración de gran interés profesional para el proyectista de máquinas: El proyecto de máquinas incumbe al Ingeniero ya que por sus principios, por sus aplicaciones y por su campo de trabajo es el profesional mas cualificado para un diseño adecuado. Este juicio, contrario a otros sesgados en sus principios, debe estar presente en cuantas personas cursen esta materia en una escuela de Ingeniería, para de esta forma impedir la invasión de profesionales advenedizos que existen en esta profesión.

ESFUERZO NORMAL Y DEFORMACIÓN

Son ambos dos conceptos fundamentales que pueden entenderse con el siguiente ejemplo. Sea una *barra prismática* cargada con fuerzas axiales F en sus extremos según aparece en la figura siguiente.

Una *barra prismática* es un elemento con multitud de aplicaciones en máquinas que se caracteriza por presentar una *sección transversal constante* en toda su longitud.

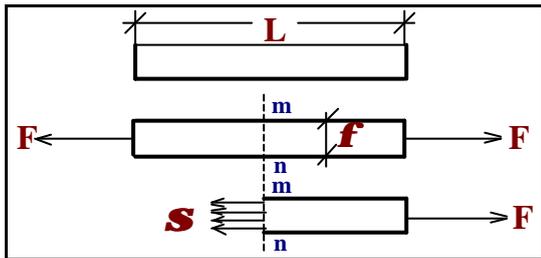


Figura 1.- Barra prismática sometida a tensión

En el caso que nos ocupa dicha barra se dice que está sometida a una *tensión* por el hecho de que las *fuerzas axiales* producen en ella una *deformación*.

Para analizar las acciones internas que aparecen en la barra prismática originados por las fuerzas axiales se considera la sección que aparece al efectuar un corte imaginario en la sección mn perpendicular al eje longitudinal de la barra. A esta sección se le denomina *sección transversal*. Se separa la porción de la barra situada a la derecha del corte considerándola un cuerpo libre.

La carga F actúa en el extremo derecho, mientras que en el lado izquierdo se aparecen fuerzas que se distribuyen de manera continua sobre la sección transversal que sustituyen a la acción sobre el tramo izquierdo de la barra prismática.

La *intensidad de la fuerza*, o lo que es lo mismo la fuerza por unidad de superficie se denomina

esfuerzo, fatiga o tensión y se denota por la letra griega σ (sigma).

Si se supone, lo cual es lógico, que el esfuerzo tiene una distribución uniforme sobre la sección transversal, es evidente que si A es el área de la sección transversal se tendrá que :

$$s = \frac{F}{A}$$

Ecuación que representa el esfuerzo, fatiga o tensión uniforme en una barra prismática de sección transversal con forma cualquiera cargada axialmente.

Cuando la barra se tensa bajo la acción de las fuerzas F , los esfuerzos resultantes se denominan *tensiones de tracción*; si el sentido de las fuerzas se invierte se origina una compresión de la barra apareciendo los denominados *tensiones de compresión*.

Dado que σ actúa en dirección perpendicular a la superficie de corte se le conoce también como *esfuerzo normal o tensión normal*. Mas adelante se encontrara otro tipo de esfuerzos que actúan paralelos a la superficie de corte que se denominaran *esfuerzos cortantes*.

Tradicionalmente a las tensiones de tracción se les da signo positivo y a las de compresión signo negativo.

Las unidades de tensión, esfuerzo o fatiga normal σ son unidades de fuerza divididas por unidades de superficie. En el S.I. vendrá dado por N/m^2 o Pascales. Sin embargo como el Pascal es una unidad tan pequeña se suele utilizar el Mpa (Megapascal) que equivale a 10^6 Pascales o $1 N/mm^2$. Es frecuente medir el esfuerzo normal en Kp/cm^2 para ello F debe medirse en Kp y la superficie de la sección de corte en cm^2 .

Para que la ecuación $s = \frac{F}{A}$ sea correcta es imprescindible que σ esté uniformemente distribuido en la sección transversal a la barra. Esta condición solo se cumple cuando F esta aplicada en el c. de g. de la sección Cuando esto no ocurre se originan flexiones en la barra y el cálculo es más complejo como se verá mas adelante. Por ahora se considerará que F está aplicada en el centro de gravedad de la sección transversal y es normal a ella.

Una barra axialmente cargada sufre una variación en su longitud alargándose o acortándose según esté sometida a tracción o a compresión. Sea δ la variación total de longitud y sea L la

longitud total de la barra y que esta es de material totalmente uniforme en toda su longitud. Se define *deformación unitaria* ϵ a la relación:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$

ϵ se denomina *deformación unitaria* a tracción o a compresión. En el primer caso significará un alargamiento de la barra y en el segundo un acortamiento de la misma.

Debido a que δ y L son dos longitudes ϵ es adimensional, aunque es frecuente medir δ en mm. y L en m presentando ϵ unidades de mm./m.

DIAGRAMA ESFUERZO-DEFORMACIÓN

Las propiedades mecánicas de los materiales usuales en las máquinas se determinan realizando pruebas sobre muestras del material. Para realizar dichas pruebas se utilizan laboratorios de ensayo de materiales provistos del instrumental adecuado.

Para que los ensayos sean comparables el tamaño de las muestras y los métodos de ensayo están normalizados.

El ensayo más usual es la denominada prueba de tensión, mediante el cual se aplican cargas axiales a una probeta de dimensiones normalizadas conformada con los extremos de más diámetro para fijarlos a unas mordazas. Se mide continuamente el esfuerzo transmitido y el alargamiento de la probeta. Se usa modernamente, para efectuar las medidas, equipos de extensometría formados por una fuente de alimentación, un amplificador de señales producidas por sensores a base de bandas extensométricas y a veces un equipo informático que registra los valores.

Estos ensayos se denominan *pruebas estáticas* pues las cargas se aplican muy lentamente, ya que la forma de aplicación incide en la respuesta de los materiales.

El esfuerzo, fatiga o tensión axial σ se calcula como se vio anteriormente dividiendo la acción o carga entre el área de la sección transversal. Ocurre que al ir incrementando la carga la sección transversal disminuye por lo que el esfuerzo o tensión aumenta más de lo previsto ya que el área instantánea puede volverse mucho menor que el área inicial. Mas adelante veremos como se calcula la *tensión real*.

La deformación unitaria axial se determina a partir del alargamiento δ dividido por la longitud de la

barra L . Si se emplea en el cálculo la longitud inicial de la barra se determina la *deformación unitaria nominal*, en cambio si se utiliza la longitud medida en cada instante se determina la *deformación unitaria real*.

Los ensayos de compresión se realizan sobre cilindros de sección circular.

Una vez realizada la prueba y tomado varias medidas a lo largo del ensayo se puede trazar el llamado diagrama *esfuerzo, fatiga o tensión-deformación*.

Estos diagramas fueron creados por Bernoulli y Poncelet y con ello se aprecia que cada material ofrece características propias que proporcionan una valiosa información sobre su comportamiento.

En la siguiente figura se representa el diagrama tensión - deformación de un acero, material típicamente utilizado en gran cantidad de aplicaciones agrícolas.

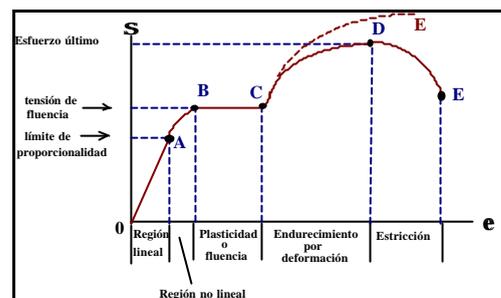


Figura 2.- Diagrama esfuerzo axial - deformación de acero de bajo contenido en carbono.

Se observa que el diagrama comienza con una línea recta desde O hasta A, que indica que en esta zona las deformaciones son directamente proporcionales a las tensiones, se dice que el material tiene un comportamiento lineal. A partir del punto A y hasta llegar a B el comportamiento no es lineal y se observa que las deformaciones crecen rápidamente con pequeños incrementos de tensión. El punto A se denomina *límite de proporcionalidad*.

En la zona AB la curva toma cada vez una pendiente más pequeña hasta llegar a B punto en el que la curva se vuelve prácticamente horizontal.

Entre B y C sin variar la tensión se producen notables incrementos de longitud. Este fenómeno se conoce con el nombre de *fluencia* y el valor de la tensión en C se denomina *tensión de fluencia*. En la zona BC el material se vuelve perfectamente *plástico*.

A partir de C aparece el denominado *endurecimiento por deformación* debido a que el material sufre cambios en su estructura cristalina. Así se observa hasta que se llega al punto

representado por D en el diagrama. El valor de la tensión en este punto se denomina *esfuerzo último*.

A partir de D el alargamiento posterior de la barra se acompaña de una reducción en la carga hasta que se llega al punto E del diagrama denominado *punto de fractura*. En el punto E en la barra se aprecia una importante contracción lateral con notable disminución de la sección transversal. Este fenómeno se conoce con el nombre de *estricción*.

El área utilizada para la obtención del diagrama anterior es el de la sección nominal. A lo largo del ensayo las reducciones de sección que aparecen son tan pequeñas que apenas hay variación entre la tensión nominal y la tensión real. En la zona de *endurecimiento por deformación* (CD en la figura) y en la de *estricción* las variaciones de sección son mas acusadas y si se representa en el diagrama la curva real de esfuerzo deformación la forma es como la que se presenta en la línea trazos.

Como se observa en el diagrama real el material en si sigue soportando carga pero la importante disminución de la sección origina la forma de la curva que parece indicar que deja de soportar carga cuando realmente no es así.

La figura siguiente representa a escala el diagrama tensión - deformación de un acero.

El análisis de este gráfico ofrece la siguiente información:

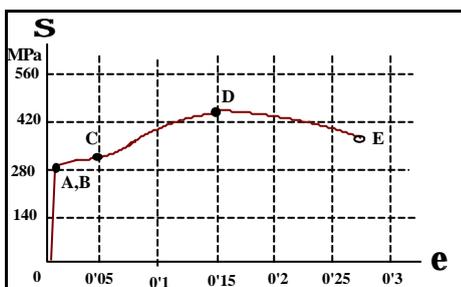


Figura 3 .- Diagrama tensión - deformación a escala de un acero de bajo contenido en carbono.

* Las deformaciones de O hasta A son tan pequeñas que resultan prácticamente inapreciables con lo que la línea de unión es vertical.

* La zona de fluencia aparece de forma súbita, pues en la gráfica el punto A coincide con el B.

* Desde B hasta C aparece claramente una zona plástica. Cuando esta zona se presenta se dice que los materiales son *dúctiles* .

* Desde C hasta D se aprecia claramente la zona de endurecimiento por deformación.

* Desde D hasta E se aprecia claramente la zona de estricción.

Pero no todos los materiales se comportan de forma similar al acero bajo en carbono. Así por ejemplo el aluminio presenta un diagrama como el que se ofrece en la figura siguiente. En el se observa, al no existir el tramo BC, que el aluminio es un material poco dúctil.

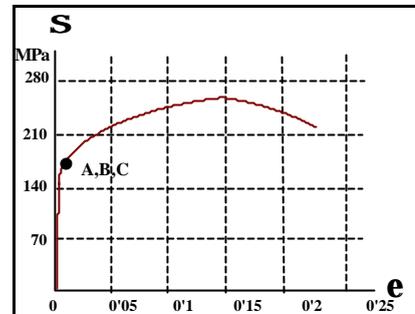


Figura 4 .- Diagrama tensión - deformación del aluminio.

En el diagrama característico del caucho se observa que desaparecen en su totalidad todas las zonas que se definieron anteriormente.

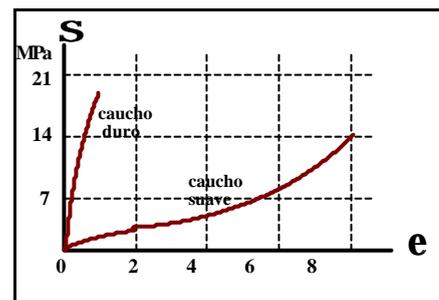


Figura 5 .- Diagrama tensión - deformación de dos tipos de caucho.

Se define *elongación* como el porcentaje de variación de la longitud que permite un determinado material antes de su rotura.

Su cálculo se realiza mediante la expresión :

$$\text{Elongación} = \frac{\text{Longitud en rotura} - \text{longitud inicial}}{\text{Longitud inicial}} \cdot 100$$

Los materiales cuya elongación es reducida se denominan *frágiles*, algunos ejemplos los constituyen el vidrio, el hormigón, el hierro fundido, los materiales cerámicos... y aquellos en los que es alta se denominan *dúctiles*.

Los diagramas tensión deformación en compresión tienen formas diferentes a los de tracción. Los materiales dúctiles en la zona de comportamiento lineal poseen límites de compresión muy próximos a los de tracción.

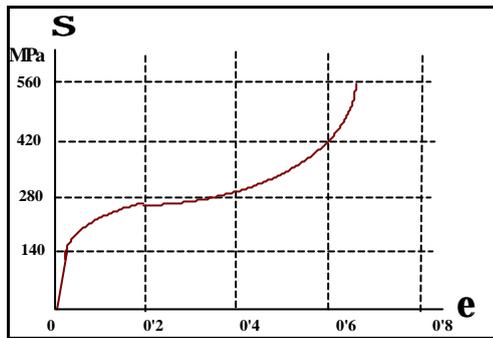


Figura 6 - Diagrama tensión - deformación del cobre a compresión.

Los materiales frágiles presentan un diagrama como el que se presenta en la figura siguiente:

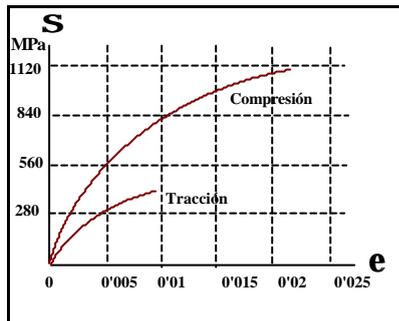


Figura 7 - Diagrama tensión deformación a compresión del hierro fundido.

Las tablas que se presentan al final del tema ofrecen algunas propiedades de materiales de interés para la construcción de máquinas.

ELASTICIDAD Y PLASTICIDAD.

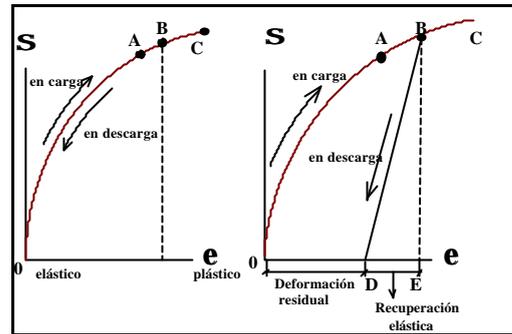
Los diagramas tensión deformación permiten estudiar el comportamiento de un determinado material cuando se somete a la acción de una carga estática es decir de una carga que aumenta de forma muy lenta. La pregunta que cabe hacerse es la de qué sucede cuando la carga se retira lentamente y el material se descarga.

Supongamos que al aplicar una carga a un material la curva tensión - deformación que sigue es la que se presenta en la zona (a) de la figura siguiente. El diagrama sigue durante la carga la línea O - A - B - C. Si en un determinado ensayo se considera el material en la posición A y se retira lentamente la carga y el material sigue exactamente la misma curva para regresar a O, se dice entonces que el material es *elástico* y a esta propiedad se llama *elasticidad*.

La curva tensión-deformación no tiene porque ser lineal para que un material pueda ser elástico.

Si se supone el material en el punto B de la zona (b) figura siguiente al descargarlo el material

sigue la línea BD. Cuando alcanza el punto D, la carga ha desaparecido por completo pero en el material persiste una deformación que se denomina *alargamiento residual*.



a
b
Figura 8 - Comportamiento elástico (a).
Comportamiento parcialmente elástico (b)

De la deformación total OE una parte la DE se recuperó elásticamente mientras que la OD persiste de forma permanente. Es por ello que se dice que el material es *parcialmente elástico*.

Cuando una barra se somete a una carga relativamente pequeña aparece en ella un alargamiento. Si se retira la carga y la barra vuelve a su longitud inicial, se dice que esta trabajando en la zona elástica. Si se repite la acción incrementado progresivamente el valor de la carga se observa que llega un valor de la tensión a partir del cual la barra no vuelve a su longitud inicial. La tensión o esfuerzo a partir del cual la barra pierde su elasticidad se conoce con el nombre de *límite elástico* del material.

El *límite elástico* suele ser ligeramente superior o muy cercano al *límite de proporcionalidad*. Hay casos como el acero, en los que ambos valores prácticamente coinciden y otros, como el caucho en los que el límite elástico es mucho mas elevado que el límite de proporcionalidad.

La característica de un material que le permite soportar deformaciones inelásticas superiores al límite elástico se denomina *plasticidad* y en la curva tensión-deformación se manifiesta porque aparece una región elástica seguida de una plástica.

Cuando se dan grandes deformaciones en un *material dúctil* cargado en la *región plástica* se dice que el material experimenta un *flujó plástico*.

Al obtener la curva tensión - deformación, no se consideró el tiempo de duración de la carga aplicada. Ocurre que si la duración de la carga aplicada es suficientemente grande, y aparecen deformaciones permanentes que se mantienen al eliminar la acción, se dice que el material *fluye*. Este proceso se denomina *relajación* del material y

se da en general de forma importante a altas temperaturas.

ELASTICIDAD LINEAL. LEY DE HOOKE

La mayoría de los materiales usados en la construcción de máquinas tienen una región inicial en el diagrama esfuerzo - deformación en la que se comporta de forma elástica lineal. Cuando esto ocurre se dice que el material es *linealmente elástico*.

Esta forma de comportamiento es sumamente importante para la construcción de máquinas ya que para su funcionamiento es preciso diseñarlas, proyectarlas y construir las de forma que las cargas no superen el límite elástico de las piezas, pues en caso contrario podrían aparecer deformaciones permanentes.

La elasticidad lineal se puede expresar analíticamente mediante la fórmula :

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

Expresión en la que σ representa como anteriormente la tensión o esfuerzo axial, ϵ la deformación unitaria y E una constante característica del material denominada módulo de elasticidad. El módulo de elasticidad E representa en el diagrama tensión-deformación la pendiente de la recta en la región linealmente elástica. Como ϵ es adimensional y σ se mide en unidades de fuerza divididas por unidades de superficie el módulo de elasticidad se mide en las mismas unidades, es decir en Pascales, Megapascuales, Kp/cm²...

La ecuación $\sigma = E \cdot \epsilon$ se denomina ley de Hooke y se aplica únicamente a tracción y compresión simples.

El módulo de elasticidad E que como se ha dicho representa la pendiente de la recta, tiene valores altos y se presenta, para distintos materiales, en las tablas anejas.

Es frecuente llamar al módulo de elasticidad módulo de Young.

Ocurre que cuando una barra prismática se somete a tracción el alargamiento axial va acompañado de una contracción lateral como aparece indicado en la figura siguiente.

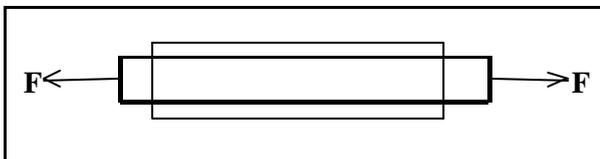


Figura 9.- Alargamiento axial y contracción lateral de una barra sometida a tracción.

Esta contracción lateral se aprecia fácilmente en algunos materiales como es el caso del caucho y difícilmente en otros como es el acero. Experimentalmente se puede demostrar que la *deformación unitaria lateral* es proporcional a la *deformación unitaria axial* cuando se trata de tensiones inferiores al límite elástico, es decir cuando la barra trabaja en la zona elástica lineal.

El cociente entre la *deformación unitaria lateral* y la *deformación unitaria axial* se denomina *relación o coeficiente de Poisson* y se representa por la letra griega ν .

$$\nu = \frac{\text{def. unit. lateral}}{\text{def. unit. axial}}$$

En una barra sometida a tracción la deformación lateral representa una reducción de su anchura y la deformación axial un aumento de su longitud.

El valor de ν toma valores de 0.25 a 0.35. En el caucho ν llega a valores de hasta 0.5.

La conjunción de ambas deformaciones hace aparecer en las barras un cambio de volumen cuyo cálculo es como sigue:

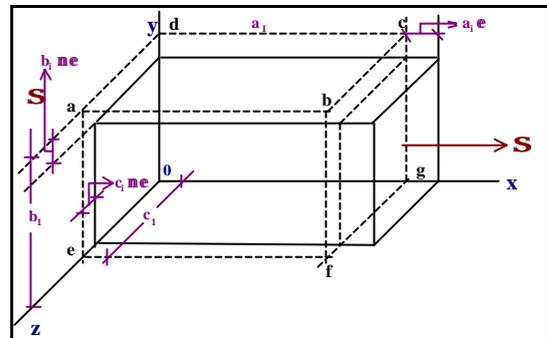


Figura 10.- Cambio de volumen de un elemento sometido a tracción.

La forma original abcdefgO con lados que miden a_1, b_1, c_1 en las direcciones X, Y, Z respectivamente. La dimensión según el eje X sometida a tracción pasa a medir $a_1 \cdot (1 + \epsilon)$, la dimensión según el eje Y pasa después de contraerse a medir $b_1 \cdot (1 - \nu \cdot \epsilon)$ y la dimensión según el eje Z tras contraerse pasa a medir $c_1 \cdot (1 - \nu \cdot \epsilon)$, por lo que el volumen final tendrá un valor dado por $V_f = a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 \cdot (1 + \epsilon - 2 \cdot \nu \cdot \epsilon)$ por lo que la variación de volumen vendrá dada por la expresión $\Delta V = a_1 b_1 c_1 \cdot \epsilon \cdot (1 - 2 \cdot \nu)$.

El cambio unitario de volumen ϵ_v vendrá dado por

:

$$e = \frac{DV}{V}$$

Por lo que :

$$e = \epsilon(1 - 2\nu) = \frac{S}{E}(1 - 2\nu)$$

La magnitud e se denomina *deformación volumétrica*.

ESFUERZO CORTANTE Y DEFORMACIÓN ANGULAR

Hasta ahora solo se han estudiado barras sometidas a esfuerzos axiales, los cuales actúan perpendicularmente a las secciones transversales a ellas. Otro tipo de esfuerzo o tensión se da cuando las cargas actúan paralelas a la superficie de la sección transversal y se denomina *esfuerzo cortante*.

Un claro ejemplo de elemento de máquina sometido a esfuerzo cortante es el que se presenta en el bulón de la figura siguiente:

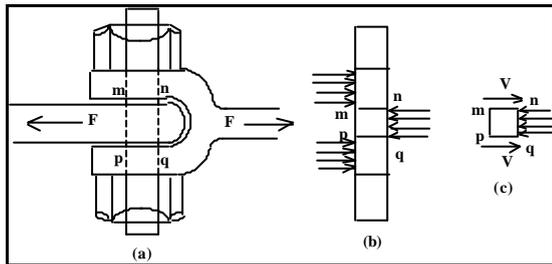


Figura 11 .- Elemento sometido a esfuerzo cortante.

Bajo la acción de las cargas F aparecen en el elemento tensiones o esfuerzos según se presenta en (b) de la figura anterior. Las tensiones o esfuerzos pueden ser sustituidos por cargas V de valor igual a $F/2$. Los esfuerzos o tensiones cortantes sobre la sección mn vienen dados por la fórmula :

$$\tau = \frac{V}{A}$$

Siendo τ el denominado *esfuerzo cortante*, $V = F/2$ y A la superficie de la sección transversal. Como V es una fuerza y A una superficie las unidades de los esfuerzos o tensiones cortantes son las mismas que las de las tensiones o esfuerzos axiales es decir Pascales en el S.I..

Es importante destacar que los esfuerzos cortantes no solo aparecen en elementos de máquinas con montajes sólo como los anteriores,

también aparecen en piezas sometidas a tracción, flexión, torsión ..., como se verá mas adelante.

Para obtener una idea clara de este importante concepto considérese el elemento de material de dimensiones ΔX , ΔY , ΔZ que se presenta en la figura siguiente.:

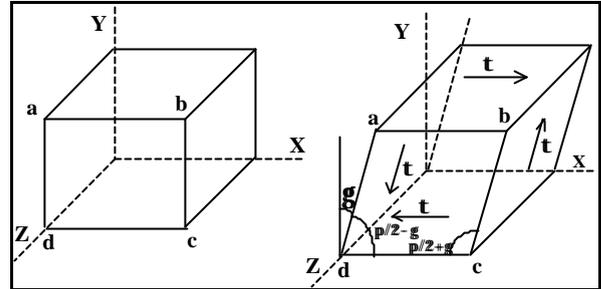


Figura 12 .- Esfuerzo cortante y deformación angular.

Si en las caras perpendiculares a los ejes XX y YY existe un esfuerzo cortante de valor τ , el equilibrio según el eje XX obliga a que exista en cada par de caras paralelas el mismo esfuerzo cortante.

El valor de la fuerza en la cara superior será $\tau \cdot \Delta X \cdot \Delta Z$ que estará equilibrada en la cara inferior con una fuerza de igual módulo pero de sentido contrario.

Estas dos fuerzas generan un par respecto al eje ZZ de valor $\tau \cdot \Delta X \cdot \Delta Y \cdot \Delta Z$, por lo que la pieza no gire tiene que haber otro momento igual y de sentido contrario que evidentemente será el debido al esfuerzo cortante sobre las caras perpendiculares como las superficies son iguales los esfuerzos cortantes en caras perpendiculares son iguales.

Por ello se puede asegurar que los esfuerzos cortantes en caras paralelas y en caras perpendiculares son iguales.

Cuando en una sección solo actúan esfuerzos cortantes y no hay tensiones axiales se dice que se trata de un *esfuerzo cortante puro*.

Bajo la acción de esfuerzos cortantes los elementos se deforman dando lugar a *deformaciones angulares* o *deformaciones por cortante* como aparece en la figura anterior.

El ángulo en los vértices d y b toma por valor $\pi/2 - \gamma$ y en los vértices a y c toma por valor $\pi/2 + \gamma$. El ángulo γ se denomina *deformación angular* y se mide en radianes.

Igual que se obtienen los diagramas tensión - deformación en piezas sometidas a cargas axiales,

también se obtienen diagramas esfuerzo cortante - deformación. Para ello se someten las barras a torsión.

Los diagramas que se obtienen son semejantes a los ya presentados.

El tramo inicial del diagrama esfuerzo cortante - deformación es una línea recta análoga a la del esfuerzo axial - deformación, por lo que, de forma semejante, puede establecerse la ley de Hooke para esfuerzo cortante, cuya expresión tiene la forma :

$$\tau = G \cdot \gamma$$

Expresión en la que τ es el esfuerzo cortante en Pascal, γ es la deformación angular en radianes y G es el denominado *módulo de elasticidad a esfuerzo cortante* también llamado *módulo de rigidez*.

Las unidades de G son las mismas que las de E .

Los valores característicos de G en materiales de interés en la construcción de máquinas para la agricultura se presentan en tablas anejas al final de este tema.

La relación entre E y G se obtiene mediante la ecuación :

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \Rightarrow G \approx \frac{E}{2}$$

Esta ecuación indica que los valores de E , G y ν no son independientes sino que en cada material están interrelacionados. La obtención de esta ecuación se hará en el tema correspondiente a torsión.

EFFECTO COLUMNA

Cuando una barra prismática trabaja a tracción sometida a una carga axial la fatiga, tensión o esfuerzo que se produce en ella se calcula mediante la expresión:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Siendo:

σ = tensión.

P = carga.

A = sección transversal

Ocurre que, cuando la barra trabaja a compresión y es suficientemente esbelta, surgen tensiones mucho más elevadas y para su cálculo se utilizan ecuaciones empíricas como la de Euler, dada por:

$$F_{\max} = \frac{C \cdot P^2 \cdot E \cdot A}{(L_i)^2}$$

Siendo:

F_{\max} = carga crítica.

C = constante función del empotramiento de los extremos.

E = módulo de elasticidad.

A = sección transversal.

L = longitud de la barra.

i = radio de giro $\sqrt{I/A}$

I = momento de inercia de la sección transversal respecto al eje de flexión.

• En secciones circulares: $i = \frac{\varnothing}{4}$ (\varnothing es el diámetro de la sección transversal).

• En secciones rectangulares: $i = \frac{h \cdot \sqrt{3}}{6}$ (h es el lado más pequeño del rectángulo).

Cuando la esbeltez de la barra es reducida se aplica la fórmula empírica de Johnson, dada por:

$$F_{\max} = \sigma_y \cdot A \cdot \left[1 - \frac{\sigma_y \cdot (L/i)^2}{4 \cdot C \cdot P^2 \cdot E} \right]$$

Siendo:

σ_y = límite de fluencia del material.

La constante C toma los valores que se presentan en la figura siguiente:

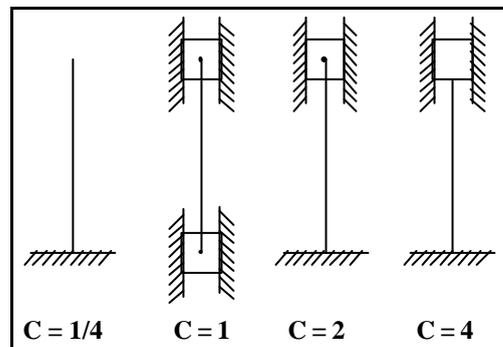


Figura 13.- Valor de C según características de montaje de las barras.

Para determinar el límite de esbeltez en el que se aplica la fórmula de Euler o la de Johnson se determina el valor de L/i que iguala las expresiones dadas, es decir:

$$\frac{C \cdot P^2 \cdot E \cdot A}{(L/i)^2} = s_y \cdot A \cdot \left[1 - \frac{s_y \cdot (L/i)^2}{4 \cdot C \cdot P^2 \cdot E} \right]$$

Operando se tiene:

$$\boxed{\frac{L}{i} = \sqrt{\frac{2 \cdot C \cdot P^2 \cdot E}{s_y}}}$$

• Si el valor de $L/i < \sqrt{\frac{2 \cdot C \cdot P^2 \cdot E}{s_y}}$ se usa la fórmula de Johnson.

• Si el valor de $L/i > \sqrt{\frac{2 \cdot C \cdot P^2 \cdot E}{s_y}}$ se usa la fórmula de Euler.

La fatiga que se produce en una barra sometida a una carga F viene dada por:

$$\boxed{s = \frac{F}{A} \cdot \alpha}$$

Siendo:

- F = carga que actúa.
- A = sección transversal de la barra.
- α = coeficiente de pandeo.

Según Euler:

$$\boxed{\alpha = \frac{s_y \cdot (L/i)^2}{C \cdot P^2 \cdot E}}$$

Según Johnson:

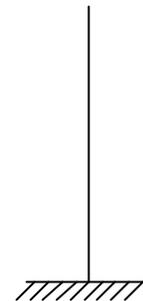
$$\boxed{\alpha = \frac{1}{1 - \frac{s_y \cdot (L/i)^2}{4 \cdot C \cdot P^2 \cdot E}}}$$

El siguiente ejemplo permitirá aclarar los conceptos expuestos:

• Una columna de sección circular de 2 m de longitud y 5 cm de diámetro empotrada en la base y libre en el extremo se somete a una carga axial de compresión de 2000 Kp. Calcular la tensión

generada si se construye de acero de $E = 2'1 \cdot 10^6$ Kp/cm² y $s_y = 500$ MPa y la carga crítica.

Solución:



$$L = 200 \text{ cm}$$

$$i = \sqrt{I/A}$$

En este caso se vio que:

$$i = \frac{A}{4} \Rightarrow i = 1'25$$

$$\text{Esbeltez} = \frac{L}{i} = \frac{200}{1'25} = 160$$

$$\text{Para: } \frac{L}{i} < \sqrt{\frac{2 \cdot C \cdot P^2 \cdot E}{s_y}} \Rightarrow \text{Johnson}$$

$$\text{Para: } \frac{L}{i} > \sqrt{\frac{2 \cdot C \cdot P^2 \cdot E}{s_y}} \Rightarrow \text{Euler}$$

Como:

$$E = 2'1 \cdot 10^6 \cdot 9'8 \cdot 10^{-2} \text{ N/mm}^2 = 205800 \text{ MPa}$$

$$C = \frac{1}{4}$$

$$s_y = 500 \text{ MPa}$$

Se tiene que:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot P^2 \cdot 20800}{500}} = 45$$

Como $L/i > 45$ \Rightarrow aplicamos la fórmula empírica de Euler

$$s = \frac{F}{A} \cdot \alpha = \frac{s_y \cdot (L/i)^2}{C \cdot P^2 \cdot E}$$

$$\alpha = \frac{500 \cdot 160^2}{\frac{1}{4} \cdot P^2 \cdot 205800} = 25'2$$

$$s = \frac{2000}{P \cdot 5^2} \cdot 25$$

$$s = 254648 \text{ Kp/cm}^2 = 24955 \text{ Mpa}$$

La carga crítica de la columna considerada es:

$$F_{\max} = \frac{C \cdot P^2 \cdot E \cdot A}{\left(\frac{L}{i}\right)^2}$$

Sustituyendo se tiene:

$$F_{\max} = \frac{\frac{1}{4} \cdot P^2 \cdot 205800 \text{ N/mm}^2 \cdot P \cdot 5^2 / 4 \text{ cm}^2}{(160)^2}$$

$$\text{Carga crítica : } 38947 \text{ N}$$

ESFUERZOS PERMISIBLES.

La capacidad de un elemento de una máquina para resistir o transmitir cargas es evidentemente necesario conocerla para poder hacer su diseño y proyecto.

Para evitar fallos de funcionamiento es preciso que las cargas que puede soportar sean mayor que las solicitaciones a las que se someta durante el funcionamiento de la máquina de la que forma parte.

La capacidad de un elemento para soportar cargas se denomina *resistencia*, y la relación entre la resistencia real y la resistencia requerida se denomina *coeficiente de seguridad*.

$$g = \frac{\text{resist. real}}{\text{resist. requerida}}$$

Está claro que γ_s debe ser mayor que 1 si se desea impedir roturas o fallos de funcionamiento de la máquina.

La determinación de factores de seguridad no es tarea fácil, y va unida a factores tales como:

- Probabilidad de sobrecarga accidental.
- Tipos de cargas (estáticas o dinámicas).
- Precisión con que se conocen las acciones.
- Inexactitudes en la construcción.
- Calidad de fabricación.
- Variaciones en las propiedades de los materiales.

- Factores adversos a la máquina (corrosión, otros efectos ambientales).

Altos valores de γ_s implican mayores gastos de construcción y menores riesgos de rotura. Valores bajos indican lo contrario.

TABLAS ANEJAS

Material	Peso específico g kN/m ³	Densidad de masa r Kg/m ³
Aluminio	26'6	2710
Aleaciones de aluminio	26-28	2600-2800
Latón	82-85	8400-8600
Ladrillo	17-22	1800-2200
Bronce	80-86	8200-8800
Hierro fundido	68-72	7000-7400
Concreto	23	2300
Cobre	87	8900
Vidrio	24-28	2400-2800
Aleaciones de magnesio	17-18	1760-1830
Niquel	87	8800
Niquel	11	1100
Nylon	9-13	960-1300
Hule	77	7850
Acero		
Piedra	26	2600
Granito	20-28	2000-2900
Piedra caliza	26-28	2600-2900
Mármol	26	2600
Cuarzo	44	4500
Titanio	190	1900
Tungsteno	5.5-7'1	480-720
Madera	72-77	7400-7800
Hierro forjado		

Tabla 1.- Pesos específicos y densidades de materiales

Material	Módulo de elasticidad E GPa	Módulo de elasticidad a cortante G GPa	Módulo de Poisson v
Aluminio	70	26	0.33
Aleaciones de Al.	70-79	26-30	0.33
Latón	96-110	36-41	0.34
Ladrillo (comp.)	10-24		
Bronce	96-120	36-44	0.34
Hierro fundido	83-170	32-69	0.2-0.3
Hierro gris	97	39	0.25
Cobre	110-120	40-47	0.33-0.36
Aleaciones de Mg.	45	17	0.35
Niquel	210	80	0.31
Nylon	2.1-2.8		0.4
Hule	0.0007-0.0004	0.0002-0.001	0.45-0.50
Acero	190-210	75-80	0.27-0.30
Piedra (comp.)			
Granito	40-70		0.2-0.3
Piedra caliza	20-70		0.2-0.3
Mármol	50-100		0.2-0.3
Titanio	110	40	0.33
Tungsteno	340-380	140-160	0.2
Madera	10-11		
Hierro forjado	190	75	0.3

Tabla 2.- Módulos de elasticidad y módulos de Poisson

Material	Esfuerzo de fluencia s_y	Esfuerzo último s_u
	MPa	MPa
Aluminio	20	70
Aleación de aluminio	35-500	100-550
Latón	70-550	200-620
Bronce	82-690	200-830
Hierro fundido (tracción)	120-290	69-480
Hierro fundido (compresión)		340-1.400
Cobre	330	380
Aleaciones de magnesio	80-280	140-340
Níquel	140-620	310-760
Nylon		40-70
Hule	1-7	7-20
Acero		
Alta resistencia	340-1.000	550-1.200
Máquina	340-700	550-860
Resorte	400-1.600	700-1.900
Inoxidable	280-700	400-1.000
Herramientas	520	900
Acero estructural	200-700	340-830
Alambre de acero	280-1.000	550-1.400
Piedra (compresión)		
Granito		70-280
Piedra caliza		20-200
Mármol		50-180
Titanio (puro)	400	500
Aleaciones de titanio	760-900	900-970
Tungsteno		1.400-4.000
Madera	40-70	50-100
Hierro forjado	210	340

Tabla 3.- Propiedades mecánicas

Material	Coefficiente de dilatación térmica α $10^{-6}/^{\circ}\text{C}$
Aluminio y sus aleaciones	23
Latón	19.1-21.2
Ladrillo	5-7
Bronce	18-21
Hierro fundido	9.9-12.0
Cemento	7-14
Cobre	16.6-17.6
Vidrio	5-11
Aleaciones de magnesio	26.1-28.8
Níquel	13
Nylon	75-100
Hule	130-200
Acero	10-18
Piedra	5-9
Titanio	8-10
Tungsteno	4.3
Hierro forjado	12

Tabla 4.- Coeficientes de dilatación térmica

Tabla 5.- Centros de gravedad y momentos de inercia

Notación:

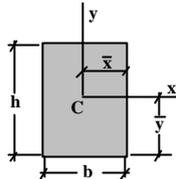
A = área.

x_G, y_G = distancias al centro de gravedad.

I_x, I_y = momentos de inercia con respecto a los ejes x e y respectivamente.

$I_p = I_x + I_y$ = momento polar de inercia.

Rectángulo (Origen de los ejes en el centroide).

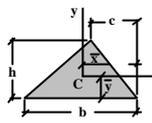


$$A = b \cdot h \quad x_G = \frac{b}{2} \quad y_G = \frac{h}{2}$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

$$I_p = \frac{b \cdot h}{12} \cdot (h^2 + b^2)$$

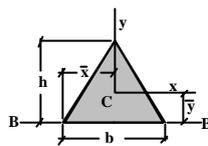
Triángulo



$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad x_G = \frac{b+c}{3} \quad y_G = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36} \quad I_y = \frac{b \cdot h}{36} \cdot (b^2 - b \cdot c) + c^2$$

Triángulo isósceles



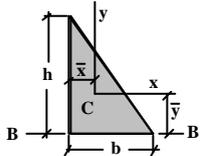
$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad x_G = \frac{b}{2} \quad y_G = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36} \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{48}$$

$$I_p = \frac{b \cdot h}{144} \cdot (4 \cdot h^2 + b^2)$$

(Nota: para un triángulo equilátero, $h = \sqrt{3} \cdot \frac{b}{2}$.)

Triángulo rectángulo

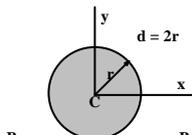


$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad x_G = \frac{b}{3} \quad y_G = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36} \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{36}$$

$$I_p = \frac{b \cdot h}{36} \cdot (h^2 + b^2)$$

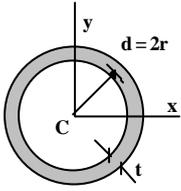
Círculo



$$A = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad I_x = I_y = \frac{\pi \cdot r^4}{4} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

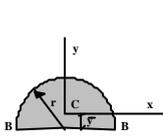
Anillo circular (Fórmulas aproximadas para el caso cuando t es pequeño)



$$A = 2 \cdot \rho \cdot r \cdot t = \rho \cdot d \cdot t \quad I_x = I_y = \rho \cdot r^3 \cdot t = \frac{\rho \cdot d^3 \cdot t}{8}$$

$$I_p = 2 \cdot \rho \cdot r^3 \cdot t = \frac{\rho \cdot d^3 \cdot t}{4}$$

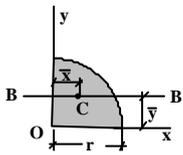
Semicírculo



$$A = \frac{\rho \cdot r^2}{2} \quad y_G = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \rho}$$

$$I_x = \frac{(9 \cdot \rho^2 - 64) \cdot r^4}{72 \cdot \rho} \approx 0.1098 \cdot r^4 \quad I_y = \frac{\rho \cdot r^4}{8}$$

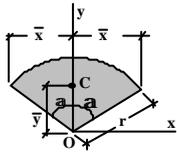
Cuadrante de círculo



$$A = \frac{\rho \cdot r^2}{4} \quad x_G = y_G = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \rho}$$

$$I_x = I_y = \frac{\rho \cdot r^4}{16}$$

Sector circular



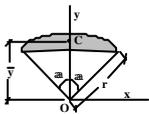
$\alpha =$ ángulo en radianes

$$a \approx \frac{\rho}{2}$$

$$A = a \cdot r^2 \quad x_G = r \cdot \text{sen } a \quad y_G = \frac{2 \cdot r \cdot \text{sen } a}{3 \cdot \rho a}$$

$$I_x = \frac{r^4}{4} \cdot (a + \text{sen } a \cdot \cos a) \quad I_y = \frac{r^4}{4} \cdot (a - \text{sen } a \cdot \cos a)$$

Segmento circular



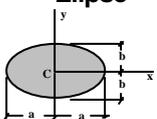
$\alpha =$ ángulo en radianes $a \approx \frac{\rho \cdot \alpha}{2}$

$$A = r^2 \cdot (a - \text{sen } a \cdot \cos a) \quad y_G = \frac{2}{3} \cdot \frac{a \cdot \text{sen}^3 a}{a - \text{sen } a \cdot \cos a}$$

$$I_x = \frac{r^4}{4} \cdot (a - \text{sen } a \cdot \cos a + 2 \cdot \text{sen}^3 a \cdot \cos a)$$

$$I_y = \frac{r^4}{12} \cdot (3 \cdot a - 3 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a - 2 \cdot \text{sen}^3 a \cdot \cos a)$$

Elipse



$$A = \rho \cdot a \cdot b \quad I_x = \frac{\rho \cdot a \cdot b^3}{4} \quad I_y = \frac{\rho \cdot b \cdot a^3}{4}$$

$$I_p = \frac{\rho \cdot a \cdot b}{4} \cdot (b^2 + a^2)$$