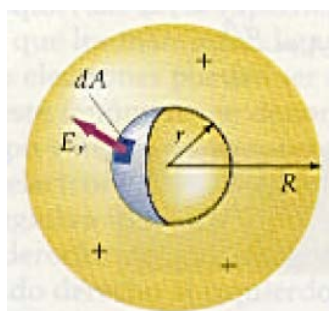


UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE ENERGÍA Y FÍSICA



FÍSICA II
PRIMERA UNIDAD



INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL

Lic. CHRISTIAN PUICAN FARROÑAY

NUEVO CHIMBOTE – PERÚ

2011

ELECTROSTÁTICA

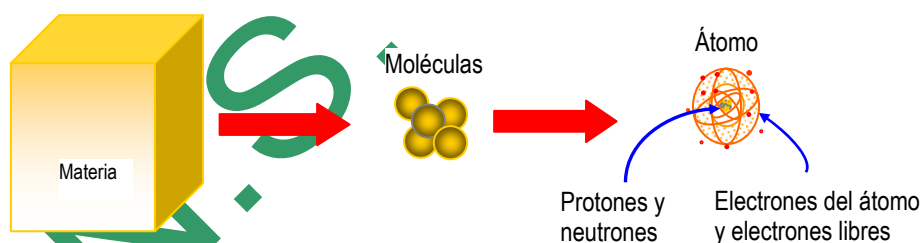
I. FENÓMENOS ELECTROSTÁTICOS

1.1. ELECTROSTÁTICA

Estudia las cargas eléctricas en reposo

1.1.1. Carga Eléctrica

Los cuerpos, tal como los conocemos en la vida cotidiana, pueden dividirse y subdividirse en partes más pequeñas. Sin embargo, esta subdivisión no es infinita. Supongamos una gota de agua como ejemplo. La gota puede subdividirse hasta un límite en el cual el agua deja de ser agua. La parte más pequeña que aún es agua, es la **molécula**. La molécula también puede subdividirse. En el caso de la molécula de agua, ésta puede subdividirse en **átomos** de oxígeno (uno) y de hidrógeno (dos). Los **átomos** están constituidos por partículas denominadas **partículas elementales**. Las partículas elementales que consideramos en esta parte de la electrostática son: los **protones**, **electrones** y **neutrones**.



La subdivisión de sustancias y cuerpos no es infinita.

Las partículas elementales se caracterizan, entre otras propiedades, por su masa y por su carga eléctrica

Partícula	símbolo	Masa (kg)	Carga Eléctrica (C)
Protón	p	1.67×10^{-27}	1.6×10^{-19}
Electrón	e^{-}	9.11×10^{-31}	$- 1.6 \times 10^{-19}$
Neutrón	n	1.671×10^{-27}	0

Unidad, es el **Coulomb**, también se utiliza el microcoulomb $1\mu C=10^{-6}C$

Cuando un átomo pierde uno o más electrones se dice que el átomo está cargado positivamente pues se ha ionizado positivamente.

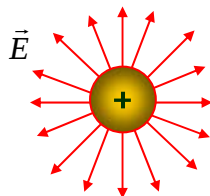
Cuando el átomo gana electrones se dice que el átomo está cargado negativamente es decir se ha ionizado negativamente.

La carga eléctrica posee las siguientes **propiedades**:

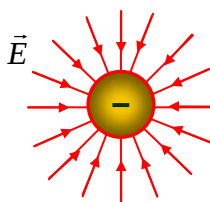
1. La carga es **dual**: existen dos tipos que se denominan positivo y negativo, discernible por el comportamiento que partículas cargadas con cada tipo muestran en su interacción con otras dadas, y por la propiedad de neutralizar en cierta medida su efecto cuando se combinan.
2. La carga está **cuantizada**: del conocimiento actual de las partículas elementales se admite que existe una carga mínima, que es la del electrón para el tipo negativo y la del protón para el positivo, ambas iguales en valor absoluto. Cualquier estado de agregación de la materia posee una carga múltiplo de dicho valor.
3. La carga **se conserva localmente**: nunca se ha observado un fenómeno del cual resulte la creación neta de carga en un punto del espacio. Siempre que aparece (o se destruye) una carga en un punto, aparece (o se destruye) una carga opuesta en el mismo punto.
4. La carga es un **invariante relativista**: su medida da el mismo resultado en cualquier sistema de referencia, sea cual sea su velocidad.

Tipos de cargas eléctricas

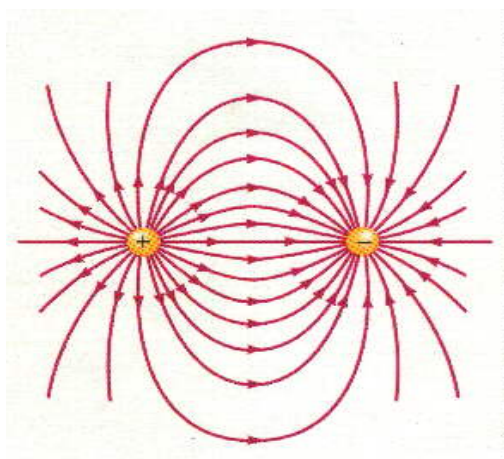
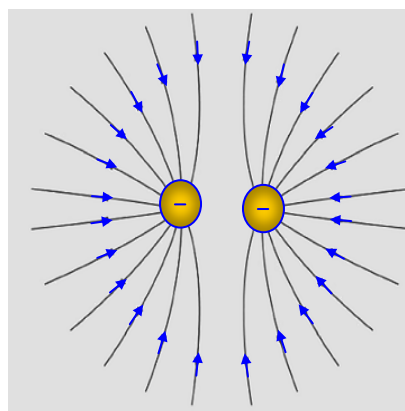
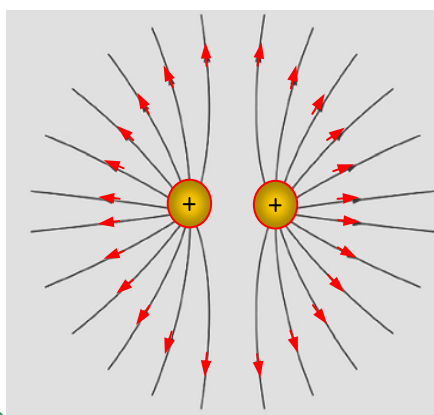
- a) **Cargas Positivas:** Las cargas eléctricas positivas son aquellas que sus líneas de campo eléctrico son salientes.



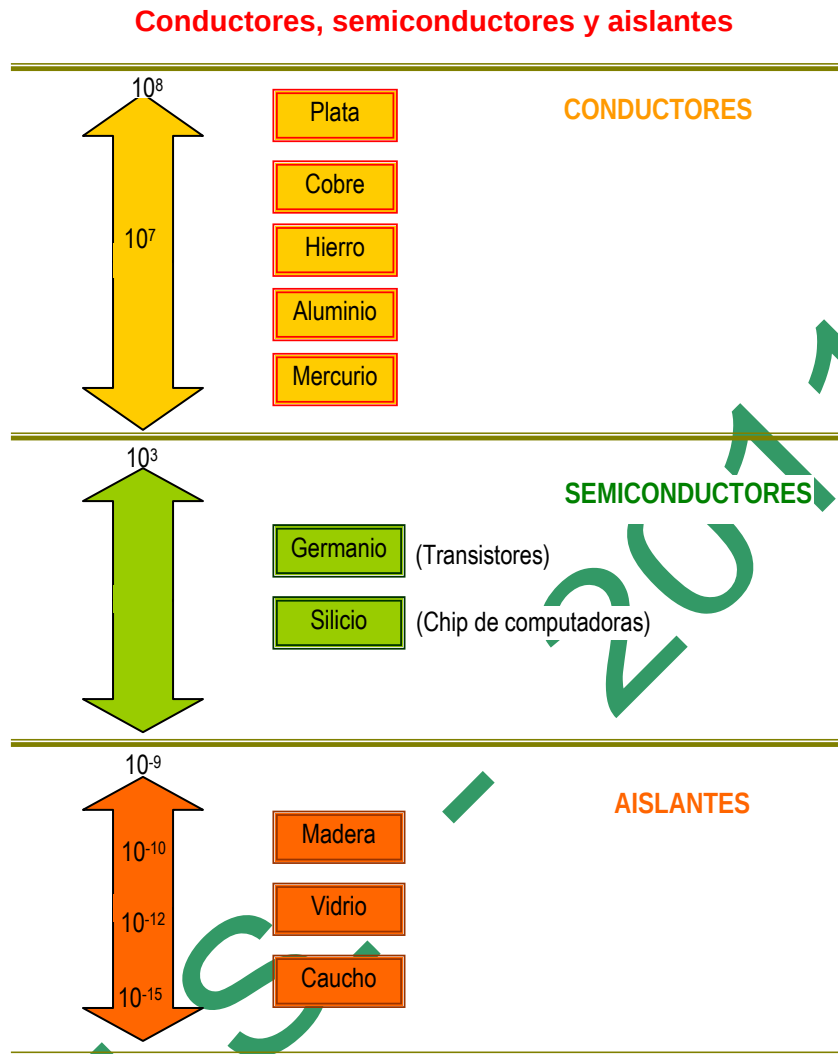
- b) **Cargas Negativas:** Las cargas eléctricas negativas son aquellas que sus líneas de campo eléctrico son entrantes.



De esto se puede concluir que **las cargas eléctricas de igual tipo se repelan** y que las **cargas eléctricas de tipo opuestas se atraen**.



1.1.2. Conductores y Aisladores



a) Conductores

Una apreciación general nos muestra que en los conductores, los electrones de valencia de los átomos – los de las órbitas externas – son relativamente libres; es decir no están ligados de manera permanente a un átomo particular (esta movilidad de los electrones también juega un papel importante en la conductividad térmica).

Los metales se caracterizan por su alta conductividad eléctrica por ello se consideran como conductores o buenos conductores de electricidad.

b) Semiconductores

Numerosos elementos, en especial el **Si** y el **Ge** del grupo 14, tienen propiedades intermedias entre las de los metales y las de los no metales y, por ello se denominan **semiconductores**. Tanto el **Si** como el **Ge** tienen **cuatro** electrones en la órbita externa, la que por su distancia al

núcleo correspondería que tuviese ocho electrones para lograr una configuración estable. Como principio que entre varios estados posibles los sistemas de la naturaleza tienden a tomar el de mayor estabilidad, es por esto que tanto el **Ge** como el **Si** cuando se solidifican toman una estructura cristalina tal que cada átomo tiene a otros cuatro a su alrededor compartiendo con ellos un electrón en coparticipación ignorando la estabilidad de ocho electrones que necesita en su última capa.

En consecuencia cerca del cero absoluto el **Ge** tiene todos sus electrones con baja energía dentro de las bandas de valencia y se transforma en un aislador absoluto. En cambio a temperatura ambiente alguno de los electrones toma la energía necesaria para pasar a la banda de conducción y el **Ge** se comporta como un semiconductor.

c) Aislantes

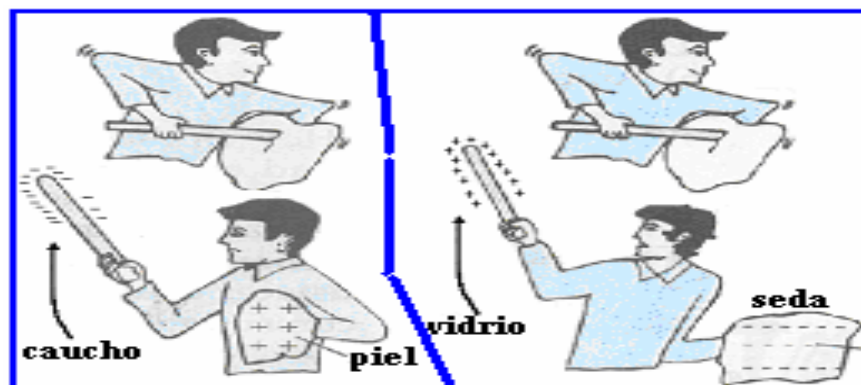
En los aislantes, los electrones de valencia están ligados en forma apretada, donde se requiere mucha mayor energía para excitar un electrón a la banda de conducción. La carencia de esta energía impide la libre movilidad de los electrones. El vidrio, la madera y el hule son aislantes comunes.

1.1.3. Electrización

Formas de electrizar un cuerpo

a) Por Frotamiento

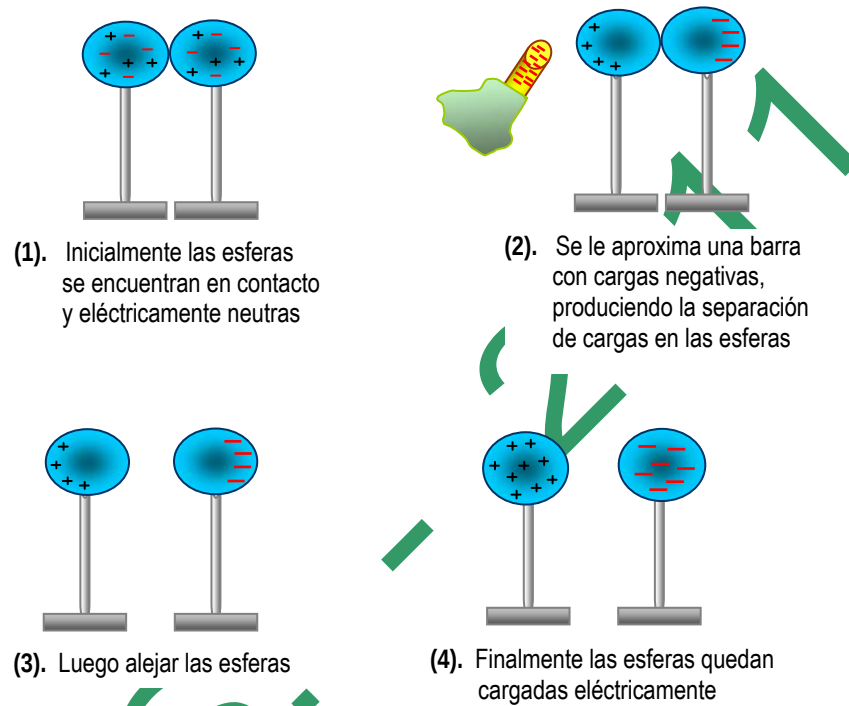
Cuando se frotan algunos cuerpos uno de ellos se carga positivamente mientras que el otro negativamente; esto se debe a que los electrones libres de algunos de los cuerpos son más fácilmente desprendidos que los otros. Por ejemplo: los electrones de los átomos del plástico están unidos con más firmeza que los de piel.



b) Por Inducción

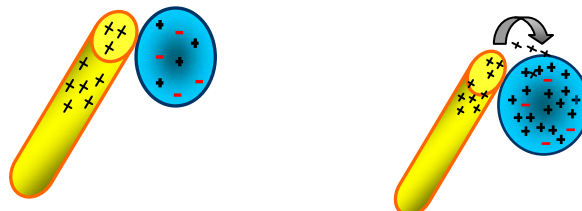
Ocurre cuando se aproxima una barra cargada eléctricamente a dos esferas en contacto en estado neutro.

Por ejemplo: Las esferas inicialmente están descargadas, pero al final se han cargado por inducción.



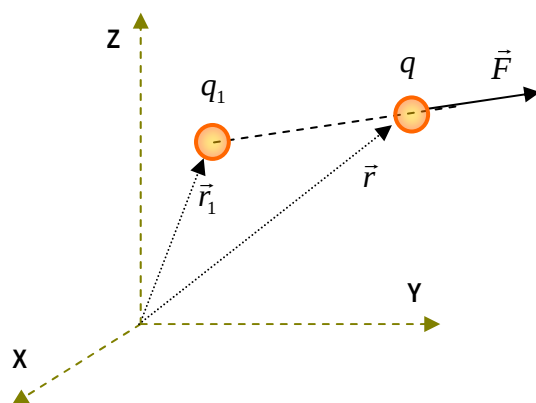
c) Con Conducción:

Cuando una barra se cargado eléctricamente y se toca a otro que se encuentra en estado neutro. Entonces el cuerpo que se encontraba en estado neutro va a recibir cargas y por lo tanto quedará cargado. En este caso el cuerpo quedará cargado por transferencia de cargas.



1.2. **LEY DE COULOMB:** La Ley de Coulomb puede expresarse como:

Como cargas de igual signo, se repelan y de signo opuesto se atraen, entonces, Charles Coulomb realizó pruebas en el laboratorio usando la balanza de torsión, para medir las fuerzas entre las cargas puntuales.



Fuerza eléctrica entre cargas puntuales en reposo

La fuerza $\vec{F}$ que una carga puntual q_1 ubicada en $\vec{r}_1$ ejerce sobre una carga puntual q ubicada en $\vec{r}$:

- (a) es proporcional al producto de sus cargas ($q q_1$)
- (b) es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia $|\vec{r} - \vec{r}_1|$
- (c) está dirigida a lo largo de la recta que las une, es decir:

$$\vec{F} = k \frac{q q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \cdot \vec{\mu}$$

$$\vec{F} = k \frac{q q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

donde: $k=9 \times 10^9 \text{ (Nm}^2/\text{C}^2\text{)}$ y $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ (C}^2/\text{Nm}^2\text{)}$

Finalmente:
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)$$

ϵ_0 : permitividad eléctrica en el vacío

F : Newton (N)

q_1 y q_2 : Coulomb (C)

r : metros (m)

Además: $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$ donde ϵ_r es la permitividad relativa, $\epsilon_0 > 1$ y es la permitividad eléctrica en el vacío.

Cuando el medio que rodea a las cargas no es el vacío hay que tener en cuenta la constante dieléctrica y la permitividad del material.

Tabla. Permitividad de materiales

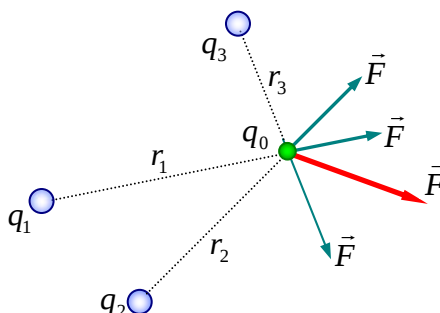
Material	ϵ_r	ϵ (F / m)	K (Nm ² / C ²)
Vacío	1	$8,85 \times 10^{-12}$	$8,99 \times 10^9$
Parafina	2,1-2,2	$1,90 \times 10^{-11}$	$4,16 \times 10^9$
Mica	6-7	$5,76 \times 10^{-11}$	$1,38 \times 10^9$
Papel parafinado	2,2	$1,95 \times 10^{-11}$	$4,09 \times 10^9$
Baquelita	3,8-5	$3,90 \times 10^{-11}$	$2,04 \times 10^9$
Vidrio orgánico	3,2-3,6	$3,01 \times 10^{-11}$	$2,64 \times 10^9$
Vidrio	5,5-10	$6,86 \times 10^{-11}$	$1,16 \times 10^9$
Aire	1,0006	$8,86 \times 10^{-12}$	$8,98 \times 10^9$
Mármol	7,5-10	$7,75 \times 10^{-11}$	$1,03 \times 10^9$
Porcelana	5,5-6,5	$5,31 \times 10^{-11}$	$1,50 \times 10^9$
Micalex	7-9	$7,08 \times 10^{-11}$	$1,12 \times 10^9$
Polietileno	2,7	$2,39 \times 10^{-11}$	$3,33 \times 10^9$

Carga de prueba

Para tratar problemas de electromagnetismo es útil recurrir al concepto de carga de prueba, que es una carga de valor $q_0 > 0$ de magnitud suficientemente pequeña como para no perturbar la situación preexistente antes de introducir la carga de prueba.

Principio de superposición

"La fuerza total ejercida sobre una carga eléctrica q_0 por un conjunto de cargas $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$ será igual a la suma vectorial de cada una de las fuerzas ejercidas por cada carga q_i sobre la carga q_0 "



Representación gráfica del principio de superposición

Para el caso que tengan N cargas q_i , $1 \leq i \leq N$, resulta:

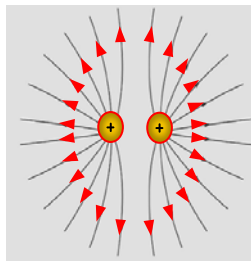
$$\vec{F}_{0(1,\dots,i,\dots,N)} = \vec{F}_{0,1} + \vec{F}_{0,2} + \dots + \vec{F}_{0,N} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{0,i} = kq_0 \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

En su forma compacta se tiene:

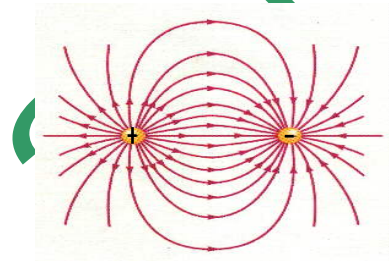
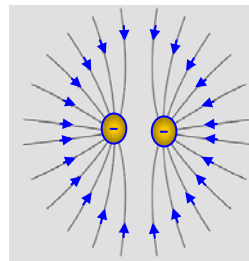
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Leyes Electroestáticas

a) **Ley Cualitativa:** “Las cargas eléctricas de la misma naturaleza (igual signo) se repelan y las de naturaleza diferente (signo contrario) se atraen”



Cargas eléctricas de igual signo se rechazan



Cargas eléctricas de signos opuestos se atraen (centro de las cargas eléctricas)

b) **Ley Cuantitativa: (Ley de Coulomb)**

“Las fuerzas que se ejercen entre dos cargas eléctricas son directamente proporcional a los valores de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa”

$$F = K \frac{q_1 q_2}{d^2}$$

Comparación entre la Ley de Coulomb y la Ley de la Gravitación Universal.

Esta comparación es relevante ya que ambas leyes dictan el comportamiento de dos de las fuerzas fundamentales de la naturaleza mediante expresiones matemáticas cuya similitud es notoria.

La ley de la gravitación universal establece que la fuerza de atracción entre dos masas es directamente proporcional al producto de las mismas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa: $F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$, siendo G la

constante de gravitación universal, m_1 y m_2 masas de los cuerpos y r la distancia entre los centros de las masas. $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$.

Como se aprecia gran parecido en las expresiones de ambas ecuaciones se encuentran dos diferencias insoslayables:

- La primera es que en el caso de la gravedad no se han podido observar masas de diferente signo como sucede en el caso de las cargas eléctricas, y la fuerza entre masas siempre es atractiva.
- La segunda tiene que ver con los órdenes de magnitud de la fuerza de gravedad y de la fuerza eléctrica.

Para aclararlo analizaremos como actúan ambas entre un protón y un electrón en el núcleo de hidrógeno.

La separación promedio entre el electrón y el protón es de $r = 5.3 \times 10^{-11} \text{m}$, $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{C}$

$p^+ = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ y $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{kg}$ y $m_{p^+} = 1.67 \times 10^{-27} \text{kg}$

sustituyendo:

$$F = K \frac{q_1 q_2}{d^2} = 8.99 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \left[\frac{(-1.6 \times 10^{-19} \text{C}) \times (1.6 \times 10^{-19} \text{C})}{5.3 \times 10^{-11} \text{m}^2} \right] = 8.2 \times 10^{-8} \text{N}$$

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \left[\frac{(9.11 \times 10^{-31} \text{kg}) \times (1.67 \times 10^{-27} \text{kg})}{5.3 \times 10^{-11} \text{m}^2} \right] = 3.6 \times 10^{-47} \text{N}$$

Al comparar la razón de las fuerzas eléctricas y magnéticas tenemos:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K \frac{q_1 q_2}{d^2}}{G \frac{m_1 m_2}{d^2}} = \frac{8.2 \times 10^{-8} \text{N}}{3.6 \times 10^{-47} \text{N}} = 2.28 \times 10^{39}$$

$$F_e = 2.28 \times 10^{39} F_g$$

Donde se concluye que la fuerza eléctrica entre un electrón y un protón es muchísimo mayor que su fuerza de atracción gravitacional entre ellos.

Limitaciones de la Ley de Coulomb

- La expresión matemática solo es aplicable a cargas puntuales estacionarias.
- La fuerza no está definida para $r = 0$.

DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE CARGA

Dado que la materia es discreta y la carga es una cualidad suya, la **distribución de la carga** en el universo es discreta. Sin embargo, en la mayoría de las situaciones que nos interesan, el número de partículas constituyentes es tan grande que es conveniente adoptar la **hipótesis de medio continuo**. Según ésta, en cada punto $\vec{r}$ del espacio podemos definir una **densidad volumétrica** de carga mediante la expresión:

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{1}{dv} \sum_{i=1}^N q_i$$

siendo N el número de partículas cargadas encerradas en un volumen dv que contiene al punto $\vec{r}$. El volumen elegido debe ser pequeño en relación con las dimensiones características del sistema considerado, pero suficientemente grande para que las fluctuaciones en el valor de N sean pequeñas en comparación con N .

Densidad Volumétrica de carga: $\rho(\vec{r}')$

$$\rho(\vec{r}') = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

$$\text{ó} \quad \rho(\vec{r}') = \frac{dq}{dV} \quad (\rho = \text{C/m}^3)$$

Densidad Superficial de carga: $\sigma(\vec{r}')$

$$\sigma(\vec{r}') = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}$$

$$\text{ó} \quad \sigma(\vec{r}') = \frac{dq}{dS} \quad (\sigma = \text{C/m}^2)$$

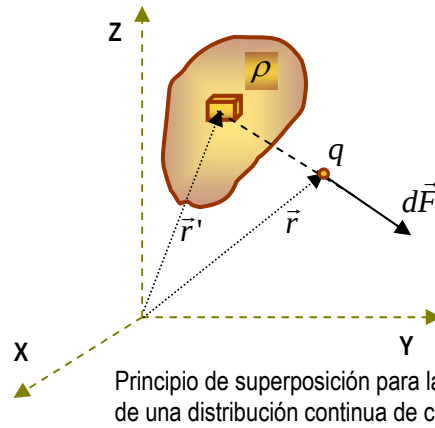
Densidad Lineal de carga: $\lambda(\vec{r}')$

$$\lambda(\vec{r}') = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l}$$

$$\text{ó} \quad \lambda(\vec{r}') = \frac{dq}{dl} \quad (\lambda = \text{C/m})$$

se debe tener cuidado al aplicar el concepto de distribución continua de carga en problemas microscópico, puesto que la carga está localizada en partículas muy pequeñas (electrones y protones) entre las cuales hay distancias relativamente grandes y desde este punto de vista no tiene sentido hablar de distribuciones continuas de carga.

La fuerza que una distribución volumétrica de carga, $\rho(\vec{r}')$, ejerce sobre una carga puntual q puede obtenerse por superposición de las fuerzas $d\vec{F}$ que todas las cargas puntuales $\rho dV'$ ejercen sobre la carga q .



$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \rho dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

Y por lo tanto:

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iiint_V \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

De manera análoga, la fuerza que una distribución superficial de carga, $\sigma(\vec{r}')$ ejerce sobre una carga puntual q es la superposición de las fuerzas que cada una de las cargas puntuales $\sigma da'$ ejerce sobre q , es decir:

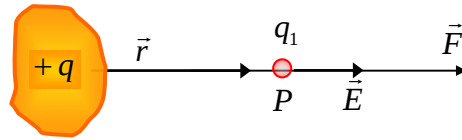
$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \sigma(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} da'$$

El principio de superposición se puede aplicar para calcular la fuerza que una distribución muy general de carga (discreta, superficial, volumétrica, lineal) ejerce sobre una carga puntual q ubicada en un punto $\vec{r}$. Podemos escribir por lo tanto.

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} + \int \frac{dq' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)$$

Donde: dq' puede ser $\rho dV'$, $\sigma da'$, $\lambda dl'$, según se trate de una distribución volumétrica, superficial o lineal de carga.

1.3. CAMPO ELÉCTRICO



Cuando en una región existe una carga eléctrica, las propiedades físicas del espacio se modifican de tal manera que otra carga colocada en el espacio modificado por la primera, experimentará una fuerza eléctrica. La modificación del espacio debida a la presencia de cargas eléctricas se describe mediante el *campo eléctrico*.

Se dice que en una región existe un campo eléctrico, si una carga eléctrica en tal región experimenta una fuerza de origen eléctrico.

La región se investiga mediante una carga de prueba positiva q_1 . Si en un punto esta carga experimenta una fuerza $\vec{F}$, se define el campo eléctrico $\vec{E}$ en tal punto, como:

$$\vec{E}_p = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Donde $\vec{E}$ y $\vec{F}$ tienen la misma dirección y q_1 debe ser tan pequeña como sea posible para que el campo producido por ella no modifique el campo eléctrico en la región que se investiga.

$$\vec{E}_p = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)$$

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)$$

Es importante que $q \rightarrow 0$ (carga de prueba o testigo) para que no se produzca una nueva distribución de la carga q y de lugar a un nuevo valor del campo eléctrico en p .

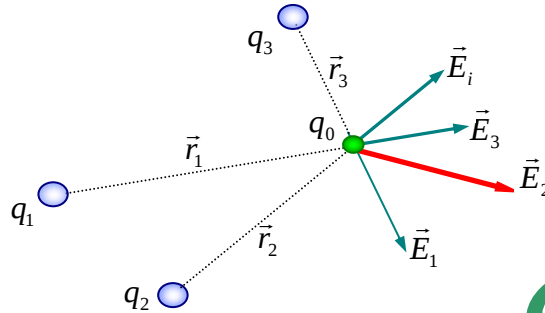
El campo eléctrico es una cantidad vectorial, es decir, que tiene magnitud y dirección.

Unidades: E (N/C) Newton / Coulomb

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN DEL CAMPO ELÉCTRICO

También para el $\vec{E}$ se cumple el principio de superposición, es decir el campo eléctrico en un punto debido a una carga, su valor no se altera por la presencia de otra carga vecina, sino que se suma o se superpone al valor inicial.

CAMPO ELÉCTRICO DEBIDO A UNA DISTRIBUCIÓN DISCRETA DE CARGAS



Se tiene un conjunto de cargas discretas $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ y queremos hallar el campo eléctrico en el punto p que está situado a una distancia $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ de las cargas dadas.

En el punto p , se coloca la carga de prueba q_0 y se halla la fuerza que ejerce las cargas q_i sobre q_0 , usando el principio de superposición, así.

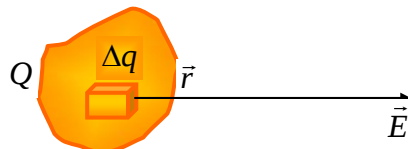
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(q_1 \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + \dots + q_n \frac{(\vec{r} - \vec{r}_n)}{|\vec{r} - \vec{r}_n|^3} \right)$$

En su forma compacta se tiene:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

CAMPO ELÉCTRICO DEBIDO A UNA DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE CARGA

Sea una carga q , distribuida sobre un cuerpo y queremos hallar el campo eléctrico a una distancia de la carga en el punto p



$$\vec{E} = K \int_0^Q \frac{dq}{r^3} \cdot \vec{r}$$

TRABAJO EN UN CAMPO ELÉCTRICO

Cuando un *agente externo* mueve una carga que se encuentra en un campo eléctrico, el trabajo que realiza este agente puede ser positivo, negativo o nulo. Consideremos una carga que se desplaza con *velocidad constante* en un campo eléctrico bajo la acción agente externo. El trabajo es positivo si la dirección del desplazamiento coincide con la dirección de la fuerza externa, es negativo si la dirección del desplazamiento se opone a la dirección de la fuerza externa; es cero si la dirección del desplazamiento y la dirección de la fuerza externa son mutuamente perpendiculares.

q	+	+	-	-
$\vec{E}$				
$\vec{x}$				
$\vec{F}_e$				
$\vec{F}$				
W	-	+	+	-
	(a)	(b)	(c)	(d)

Trabajo (W) efectuado por un agente externo para desplazar una carga (q) en un campo eléctrico ($\vec{E}$) con velocidad constante (aceleración nula):

En (a) y (d): El trabajo es negativo ya que el desplazamiento ($\vec{x}$) y la fuerza externa ($\vec{F}$) se oponen.

En (b) y (c): El trabajo es positivo, pues las direcciones del desplazamiento y de la fuerza externa coinciden.

En el sistema internacional, la diferencia de potencial se mide en Voltio. El voltio se define:

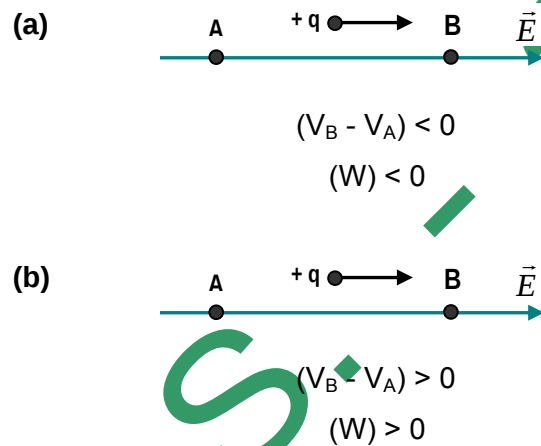
$$1\text{Volt} = 1V = \frac{1\text{Joule}}{1\text{Coulomb}} = 1\frac{J}{C}$$

Entonces W_{AB} es el trabajo que debe hacer el agente exterior para mover la carga de prueba q del infinito al punto p .

$$V = V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q}$$

Debido a la que las diferencias de potencial entre puntos en un campo eléctrico son fáciles de medir, la determinación del trabajo necesario para transportar cargas en un campo también se transforma en un problema simple.

Observamos que si la diferencia de potencial entre dos puntos ($V_B - V_A$) es positiva, el trabajo que debe realizar un agente externo para llevar una carga eléctrica positiva entre ellos (desde A hasta B) es también positivo. Si la diferencia de potencial es negativo, el trabajo requerido será negativo



La diferencia de potencial entre dos puntos y el trabajo para transportar una carga entre ellos. **(a)** el trabajo es negativo. **(b)** el trabajo es positivo

Una de las ventajas para describir los campos eléctricos mediante diferencias de potencial es ésta, el potencial es una cantidad escalar, a diferencia del campo eléctrico que tiene características vectoriales.

1.4. POTENCIAL ELECTRICO

El potencial electrostático no es un simple medio matemático de obtener el campo, sino que posee un importante **significado físico**. Para entenderlo consideremos una región del espacio en la que existe un campo eléctrico $\vec{E}$. Dado que $dV = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$, la diferencia de potencial entre dos puntos A y B sería:

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Por otra parte la fuerza que se ejerce sobre una carga puntual q , debida al campo $\vec{E}$ es $\vec{F}_e = q \vec{E}$.

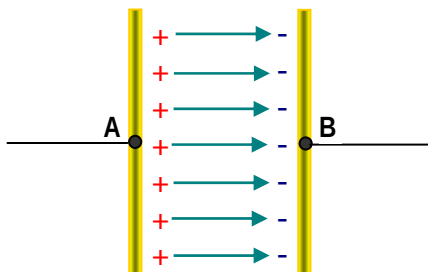
Si dicha carga se trae desde el infinito hasta una posición final $\vec{r}$ bajo la acción conjunta de una fuerza $\vec{F}$ ejercida por nosotros más la fuerza eléctrica $\vec{F}_e$, y esto se hace partiendo del reposo y quedando la carga en reposo, el teorema de la energía cinética nos dice que la variación de energía cinética, nula en este caso, es igual al trabajo total realizado sobre la carga en el proceso. Por tanto $0 = W' + W_e$. El trabajo realizado por nosotros será (teniendo en cuenta que el potencial electrostático es nulo en el infinito)

$$W' = -W_e = - \int_{\infty}^{\vec{r}} q \vec{E} \cdot d\vec{r} = qV(\vec{r}) \Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{W'}{q}$$

La ecuación anterior indica que *el trabajo realizado por nosotros sobre la unidad de carga para traerla desde el infinito hasta su posición final es justamente el potencial en dicho punto*. Para que la afirmación sea rigurosamente cierta debemos exigir además que el movimiento de la carga sea *cuasiestático*, es decir, infinitamente lento (lo cual obliga a que $\vec{F} + \vec{F}' \approx 0$). La razón estriba en que una carga acelerada emite radiación, lo cual supone una pérdida de energía que no estamos contabilizando al aplicar el teorema de la energía cinética.

DIFERENCIA DE POTENCIAL EN UN CAMPO ELÉCTRICO HOMOGÉNEO

Si en una región del espacio el campo eléctrico es constante, tanto en magnitud como en dirección, se dice que en tal región existe un campo eléctrico homogéneo.



Campo homogéneo en un condensador de placas planas paralelas

El trabajo que realiza un agente externo para llevar una carga q positiva desde A hasta B con una velocidad constante es igual:

$$W_{AB} = \vec{F} \cdot \vec{x}$$

Donde la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ que realiza el agente externo es:

$$\vec{F} = -q \cdot \vec{E}$$

Así, pues, el trabajo W_{AB} está dado por:

$$W_{AB} = -q \vec{E} \cdot \vec{x}$$

Ya que la fuerza efectuada por el agente externo y el desplazamiento están en direcciones opuestas. Si el desplazamiento es de B a A, el trabajo es:

$$W_{AB} = q \vec{E} \cdot \vec{x}$$

Por lo cual,

$$V = V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q} = -\vec{E} \cdot \vec{x}$$

POTENCIAL ELÉCTRICO DE UNA CARGA PUNTUAL

La diferencia de potencial entre los puntos A y B en las vecindades de una carga puntual es:

$$\Delta V = V_B - V_A = kq \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

En general, para un punto situado a una distancia r de una carga puntual positiva, el potencial electrostático absoluto está dado por la expresión:

$$V(r) = k \left(\frac{q}{r} \right)$$

SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

Recordando la definición de trabajo de una fuerza:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B q\vec{E}d\vec{l} = -q\Delta V = -q(V_B - V_A) \quad (1)$$

Podemos obtener la relación entre el campo eléctrico y la diferencia de potencial entre dos puntos:

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2)$$

De esta expresión se deduce que en una región del espacio en la que el **campo eléctrico es nulo, el potencial es constante.**

Si $\Delta V = V_B - V_A$ pero $V_B = V_A$, entonces $V_B = V_A$ y $\Delta V = 0$

Como q no es cero, el producto escalar de los vectores $\vec{F}$ y $d\vec{l}$ es cero:

$\vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$, en otras palabras se puede afirmar lo siguiente:

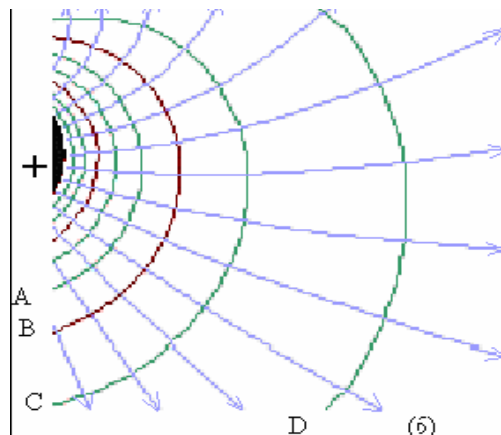
$$\Delta V_{AB} = (V_B - V_A) = - \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}{q} = 0$$

Como $d\vec{l}$ pertenece a la superficie equipotencial, por álgebra vectorial se concluye $\vec{F}$ es ortogonal a $d\vec{l}$, de aquí se puede determinar que las líneas de fuerza siempre son perpendiculares a las superficies equipotenciales y como el campo eléctrico $\vec{E}$ es paralelo a la fuerza eléctrica, se puede concluir también que el campo eléctrico también es perpendicular a una superficie equipotencial, también se puede concluir que el trabajo requerido para llevar a una carga de un sitio A a un sitio B (siendo A y B pertenecientes a la equipotencial) es cero.

Para calcular el campo eléctrico a partir del potencial se utiliza el operador *gradiente*, de modo análogo a cómo se obtiene la fuerza a partir de la energía potencial:

$$\vec{E} = -\nabla V(r) = -\frac{d}{dr} \left(K \frac{q_1}{r} \right) \vec{\mu}_r = -K \left(-\frac{q_1}{r^2} \right) \vec{\mu}_r = K \frac{q_1}{r^2} \vec{\mu}_r$$

Las superficies equipotenciales son aquellas en las que el **potencial toma un valor constante**. Por ejemplo, las superficies equipotenciales creadas por cargas puntuales son esferas concéntricas centradas en la carga, como se deduce de la definición de potencial ($r = \text{cte}$).



Superficies equipotenciales creadas por una carga puntual positiva

Los potenciales que se encuentran en la misma superficie A son iguales, así mismo los del B, C y D respectivamente. Pero al comparar los potenciales de A con B, C y D son diferentes por encontrarse en diferentes superficies equipotenciales.

Si recordamos la expresión para el trabajo, es evidente que:

Cuando una carga se mueve sobre una superficie equipotencial la fuerza electrostática no realiza trabajo, puesto que la ΔV es nula.

Por otra parte, para que el trabajo realizado por una fuerza sea nulo, ésta debe ser perpendicular al desplazamiento, por lo que **el campo eléctrico** (paralelo a la fuerza) **es siempre perpendicular a las superficies equipotenciales**. En la figura anterior (a) se observa que en el desplazamiento sobre la superficie equipotencial desde el punto A hasta el B el campo eléctrico es perpendicular al desplazamiento.

Las propiedades de las superficies equipotenciales se pueden resumir en:

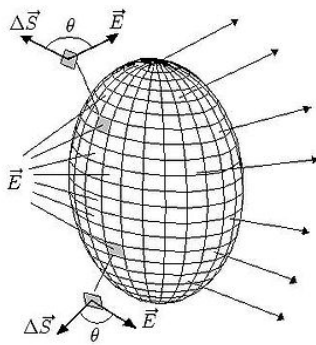
- Las líneas de campo eléctrico son, en cada punto, perpendiculares a las superficies equipotenciales y se dirigen hacia donde el potencial disminuye.
- El trabajo para desplazar una carga entre dos puntos de una misma superficie equipotencial es nulo.
- Dos superficies equipotenciales no se pueden cortar.

1.5. LINEAS DE CAMPO ELÉCTRICO: Flujo del Campo Eléctrico

Existe otra forma de hallar el campo eléctrico, y es usando La Ley de Gauss, para ello es necesario definir el **flujo del campo eléctrico**.

Se tiene una región donde existe líneas de campo eléctrico, si colocamos una superficie perpendicular a estas líneas, entonces definimos la densidad de líneas, es decir el número de líneas por unidad de superficie.

Para definir al flujo eléctrico con precisión considérese la figura, que muestra una superficie cerrada arbitraria dentro de un campo eléctrico.



La superficie se encuentra dividida en cuadrados elementales $\Delta \vec{S}$, cada uno de los cuales es lo suficientemente pequeño como para que pueda ser considerado plano. Estos elementos de área pueden ser representados como vectores $\Delta \vec{S}$, cuya magnitud es la propia área, la dirección es normal a la superficie y el sentido hacia afuera.

En cada cuadrado elemental también es posible trazar un vector de campo eléctrico $\vec{E}$. Ya que los cuadrados son tan pequeños como se quiera, $\vec{E}$ puede considerarse constante en todos los puntos de un cuadrado dado.

$\vec{E}$ y $\Delta \vec{S}$ caracterizan a cada cuadrado y forman un ángulo θ entre sí y la figura muestra una vista ampliada de dos cuadrados.

El flujo, entonces, se define como sigue:

$$\phi_E = \sum \vec{E} \cdot \Delta \vec{S} \quad (1)$$

O sea:
$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2)$$

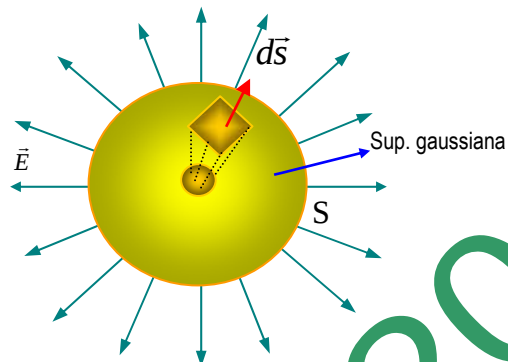
$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot ds \cdot \cos \theta$$

El símbolo $\oint_S$ significa que la integral se extiende a toda la superficie cerrada.

Ahora veamos la Ley de Gauss para determinar el campo eléctrico.

1.6. LEY DE GAUSS

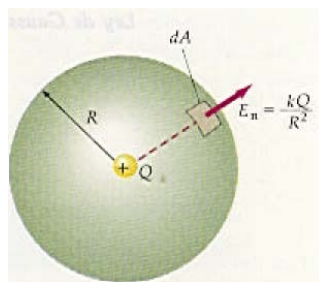
La Ley de Gauss se aplica a cualquier superficie hipotéticamente cerrada, llamada también “Superficie Gaussiana”, que establece una relación entre el ϕ_E (flujo) para la superficie y la carga neta encerrada por la superficie gaussiana. El vector $d\vec{s}$ es perpendicular a la superficie.



La carga total contenida en un cuerpo cargado es igual a la suma de flujo que atraviesan la superficie Gaussiana su expresión matemática queda determinada por:

$$\sum Q = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Por ejemplo, si queremos encontrar el campo eléctrico de una esfera cargada, de carga Q , tendremos que considerar un cuerpo imaginario que tenga la misma superficie que el cuerpo original, en este caso de una esfera de radio r , arbitrario.



Analizando la expresión: $\sum Q = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Vemos que: $\sum Q = Q_T$

donde Q_T es la carga total contenida dentro de la superficie Gaussiana, es decir, la de la esfera cargada. Por lo que tenemos la expresión:

$$Q_T = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Vemos que es conveniente manejar el elemento diferencial de superficie en coordenadas esféricas. Tomemos el elemento de superficie:

$$ds = (r \sin \theta \cdot d\phi) \cdot (r d\theta)$$

con lo que: $Q_T = \epsilon_0 \oint E (r \sin \theta \cdot d\phi) \cdot (r d\theta)$

como el campo es radial, por lo que E puede salir de la integral:

$$Q_T = \epsilon_0 E \oint (r \sin \theta \cdot d\phi) \cdot (r d\theta) = \epsilon_0 E \iint (r \sin \theta \cdot d\phi) \cdot (r d\theta) =$$

$$0 \leq r \leq R$$

recordemos que: $0 \leq \theta \leq \pi$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Entonces tendremos: $Q_T = \epsilon_0 E \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r \sin \theta \cdot d\phi) \cdot (r d\theta) =$

$$= \epsilon_0 E r^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\sin \theta \cdot d\phi) (d\theta) = \epsilon_0 E r^2 \int_0^\pi (-\cos \theta) \Big|_0^\pi \cdot (d\phi) =$$

$$= \epsilon_0 E r^2 \int_0^{2\pi} 2 d\phi = 2\epsilon_0 E r^2 (\phi) \Big|_0^{2\pi} = 4\pi \epsilon_0 E r^2$$

Finalmente despejando el campo tendremos:

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

Que corresponde a la forma de una carga puntual, precisamente por que tiene una forma esférica ambas realmente el proceso es muy simple lo único que se tiene que hacer es encontrar una superficie apropiada, inclusive en ocasiones

no es necesario realizar las integrales, si conocemos que la superficie de una esfera es igual a $4\pi r^2$ podemos identificar que:

$$Q_T = \epsilon_0 E \oint (r \sin \theta \cdot d\phi)(r d\theta) = \epsilon_0 E (4\pi r^2)$$

y directamente podemos despejar y obtener:

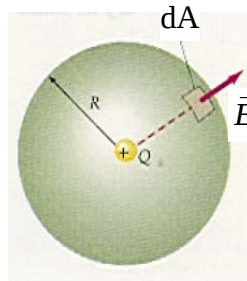
$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

RECOMENDACIONES PARA LA APLICACIÓN DE LA LEY DE GAUSS

- Al escoger la superficie gaussiana se debe tener en cuenta la simetría de la distribución de carga, para poder evaluar fácilmente la integral de superficie.
- Se puede establecer el ángulo formado por $\vec{E}$ y $d\vec{s}$ dibujando dichos vectores.
- La carga neta encerrada se considera con su respectivo signo.
- En un conductor la carga se encuentra localizada en su superficie; lo cual quiere decir que dentro del conductor la carga neta (q_{neto}) es CERO, por lo tanto $\vec{E} = 0$.

APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS

A) Campo eléctrico $\vec{E}$ próximo a una carga puntual



- Superficie gaussiana, elegimos una superficie esférica de radio r centrada en la carga.
- E es radial y su magnitud depende sólo de la distancia a la carga.
- E tiene el mismo valor en todos los puntos de nuestra superficie esférica.

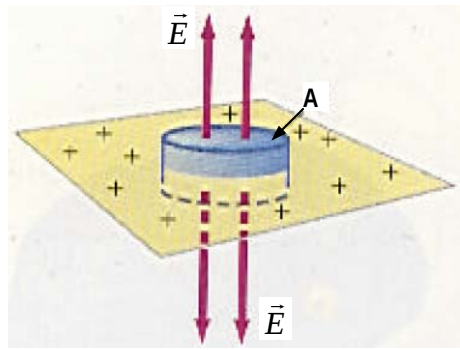
El flujo neto a través de esta superficie es:

$$\Phi_{\text{neto}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E \cdot dA = E \oint dA = E A = E(4\pi r^2)$$

Pero la ley de Gauss nos da: $\Phi_{\text{neto}} = \frac{Q_{\text{dentro}}}{\epsilon_0}$

Igualando obtenemos:
$$E = \left(\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \right) \frac{Q}{r^2}$$

B) Campo eléctrico $\vec{E}$ próximo a un plano infinito de carga



Densidad de carga uniforme σ

Por simetría el campo eléctrico debe:

- Ser perpendicular al plano.
- Depender sólo de la distancia z del plano al punto del campo.
- Tener el mismo valor pero sentido opuesto en los puntos situados a la misma distancia por arriba y por debajo del plano

Escogemos como superficie gaussiana un cilindro en forma de “pastillero” y su base tiene un área A .

Como $\vec{E}$ es paralelo a la superficie cilíndrica, no existe flujo que la atraviese.

Puesto que el flujo que sale por cada cara superior o inferior es EA , el flujo total es

$$\Phi_{\text{neto}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \underbrace{\int \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{\text{bases}} + \underbrace{\int \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{\text{sup. lateral}} = 2EA + 0 = 2EA$$

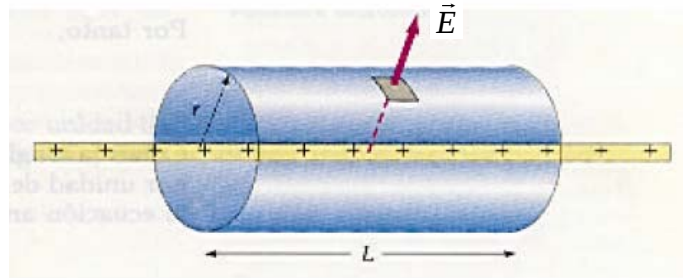
La carga neta en el interior de la superficie es: $Q_{\text{dentro}} = \sigma A$

A partir de la ley de Gauss

$$\Phi_{\text{neto}} = \frac{Q_{\text{dentro}}}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad 2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

De donde:
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

C) Campo eléctrico $\vec{E}$ próximo a una carga lineal infinita



Densidad de carga uniforme λ

Por simetría el campo debe:

- ser perpendicular al hilo.
- depender sólo de la distancia r del hilo al punto.

Tomamos como superficie *gaussiana* un cilindro de longitud L y radio r coaxial con la línea de carga.

El campo eléctrico es, por tanto, perpendicular a la superficie cilíndrica y posee el mismo valor E , en cualquier punto de la superficie.

No hay flujo a través de las superficies planas de los extremos del cilindro, $\vec{E} \perp d\vec{A}$.

El flujo eléctrico es, por tanto:

$$\Phi_{\text{neto}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{bases}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\text{sup. lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 + EA_{\text{lateral}} = E(2\pi rL)$$

Igual al producto del campo eléctrico por el área de la superficie cilíndrica.

La carga neta dentro de esta superficie es: $Q_{\text{dentro}} = \lambda L$

Según la Ley de Gauss: $\Phi_{\text{neto}} = \frac{Q_{\text{dentro}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi rL) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$

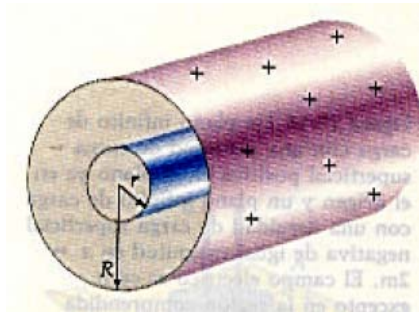
De donde: $E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$

Nota:

Para usar la ley de Gauss es necesaria la existencia de un alto grado de simetría.

El cálculo anterior fue necesario suponer E sería constante en todos los puntos de la superficie gaussiana cilíndrica. Esto es admisible cuando la distribución lineal es de longitud:

D) Campo eléctrico $\vec{E}$ en el interior y en el exterior de una corteza cilíndrica de carga



Densidad de carga superficial uniforme, σ .

a) Puntos interiores a la corteza

Tomamos una superficie gaussiana cilíndrica de longitud L y radio $r < R$ concéntrica con la corteza.

Por simetría, el campo eléctrico es:

- perpendicular a esta superficie gaussiana y
- su magnitud E_r es constante en todos los puntos de la superficie.

El flujo de $\vec{E}$ a través de la superficie es, por tanto,

$$\Phi_{neto} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{bases} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{sup. lateral} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(2\pi rL)$$

La carga total dentro de esta superficie es cero: $Q_{dentro} = 0$

y la Ley de Gauss nos da: $\Phi_{neto} = \frac{Q_{dentro}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi rL) = \frac{0}{\epsilon_0}$

De donde: $E = 0$

b) Puntos interiores a la corteza

Tomamos una superficie gaussiana cilíndrica de longitud L y radio $r > R$ concéntrica con la corteza.

El flujo vuelve a ser: $\Phi_{neto} = E(2\pi rL)$

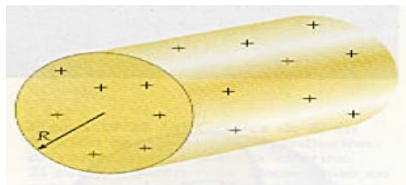
Pero la carga interior no sería nula, sino $Q_{dentro} = 2\pi RL$,

Y según la ley de Gauss:

$$\Phi_{neto} = \frac{Q_{dentro}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi rL) = \frac{\sigma 2\pi RL}{\epsilon_0}$$

De donde: $E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$

E) Campo eléctrico $\vec{E}$ en el interior y en el exterior de un cilindro sólido de carga infinitamente largo



Densidad de carga ρ distribuida uniformemente por todo el volumen del cilindro. Lo mismo que en el caso de la corteza cilíndrica de carga tomamos una superficie gaussiana cilíndrica de radio r y longitud L , el flujo será

$$\Phi_{\text{neto}} = E(2\pi rL)$$

a) Puntos exteriores al cilindro, es decir, si $r > R$,

La carga total dentro de esta superficie es $Q_{\text{dentro}} = \rho\pi R^2 L$

Y según la ley de Gauss:

$$\Phi_{\text{neto}} = \frac{Q_{\text{dentro}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi rL) = \frac{\rho\pi R^2 L}{\epsilon_0}$$

De donde:
$$E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$$

b) Puntos interiores al cilindro, es decir, si $r < R$,

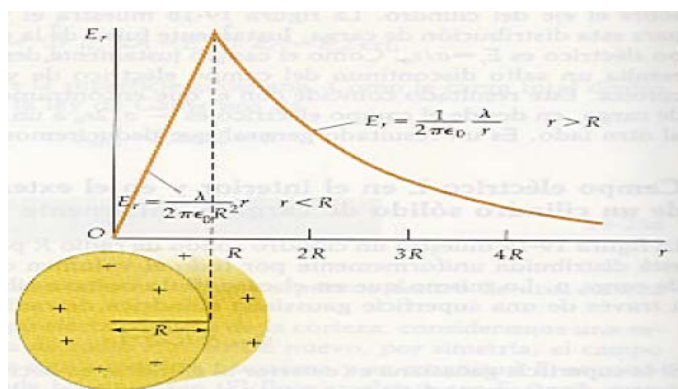
La carga total dentro de esta superficie es: $Q_{\text{dentro}} = \rho\pi r^2 L$

Y según la ley de Gauss:

$$\Phi_{\text{neto}} = \frac{Q_{\text{dentro}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi rL) = \frac{\rho\pi r^2 L}{\epsilon_0}$$

De donde:
$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

Representación Gráfica

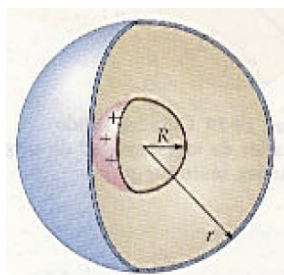


La figura muestra el valor E , en función de r para esta distribución de carga.

Se puede observar que el campo:

- en el interior crece directamente proporcional a r
- en el exterior varía de modo inversamente proporcional a r
- es continuo en $r = R$.

F) Campo eléctrico $\vec{E}$ en el interior y en el exterior de una corteza esférica de carga



Densidad superficial de carga σ

Por simetría:

- $\mathbf{E}$ debe ser radial y
- su magnitud dependerá sólo de la distancia r desde el centro de la esfera.

a) Puntos exteriores a la corteza.

Tomamos una superficie gaussiana esférica de radio $r > R$, el flujo será

$$\Phi_{\text{neto}} = E(4\pi r^2)$$

La carga total dentro de esta superficie es: $\Phi_{\text{dentro}} = 4\pi R^2 \sigma$

Y según la ley de Gauss:

$$\Phi_{\text{neto}} = \frac{Q_{\text{dentro}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\epsilon_0}$$

De donde:
$$E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

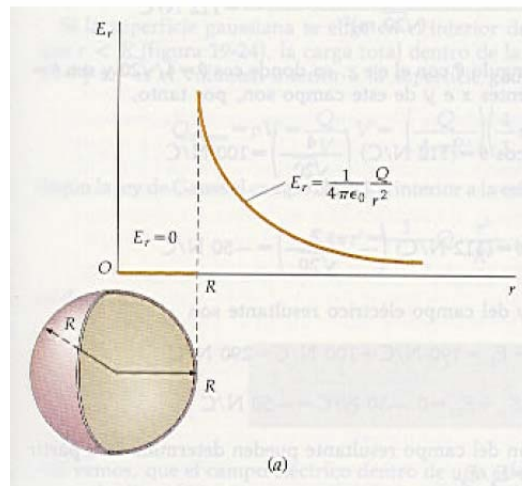
Siendo Q la carga total de la corteza $Q = 4\pi R^2 \sigma$

b) Puntos interiores a la corteza.

Si escogemos una superficie gaussiana esférica en el interior de la corteza, de modo que $r < R$, el flujo neto no varía, pero la carga total dentro de la superficie gaussiana es CERO.

Por tanto, para $r < R$, la ley de Gauss nos da $\mathbf{E} = 0$

Representación grafica

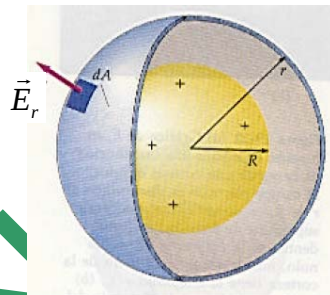


Discontinuidad $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

G) Campo eléctrico $\vec{E}$ en el interior y en el exterior de una esfera sólida uniformemente cargada

Densidad de carga uniforme ρ distribuida por todo el volumen

Como en el caso de la corteza esférica de carga, el flujo a través de una superficie gaussiana de radio r es



$$\Phi_{neto} = E(4\pi r^2)$$

a) Puntos exteriores a la esfera: $r > R$

La carga total dentro de esta superficie es: $Q_{dentro} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

Y según la ley de Gauss:

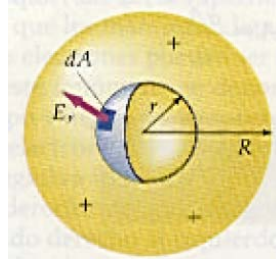
$$\Phi_{neto} = \frac{Q_{dentro}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{\epsilon_0}$$

De donde: $E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$ ó $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$

Siendo Q la carga total de la esfera $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

b) Puntos interiores a la esfera.

Superficie gaussiana $r < R$,



Carga interior

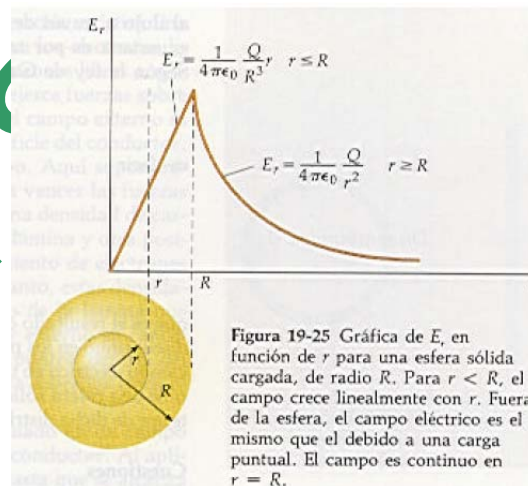
$$Q_{dentro} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

Ley de Gauss

$$E(4\pi r^2) = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{\epsilon_0}$$

De donde $E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$

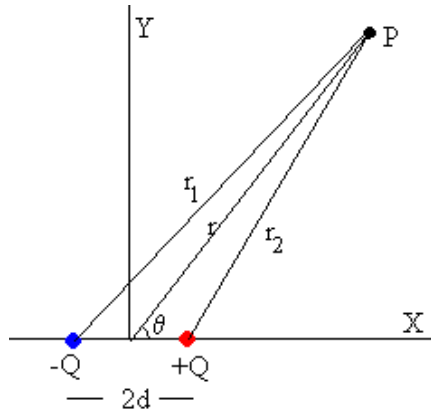
Representación gráfica



DIPOLOS ELÉCTRICOS

El potencial en el punto **P** distante $\vec{r}_1$ de la carga $-Q$ y $\vec{r}_2$ de la carga $+Q$ es:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$



Expresamos $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ en función de r y θ , que es la posición del punto P expresada en coordenadas polares.

$$r_1 = r^2 + d^2 + 2rd \cos \theta$$

$$r_2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta$$

Teniendo en cuenta que d es pequeño frente a r , podemos obtener una buena aproximación empleando el desarrollo en serie

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \dots$$

para expresar de forma aproximada los cocientes r/r_1 y r/r_2 .

$$\frac{r}{r_1} = \left(1 + \frac{d^2}{r^2} + \frac{2d}{r} \cos \theta \right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{r^2} + \frac{2d}{r} \cos \theta \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{d^2}{r^2} + \frac{2d}{r} \cos \theta \right)^2 + \dots$$

Despreciando los términos de orden superior a d^2/r^2

$$\frac{r}{r_1} \approx 1 - \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{2r^2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$\frac{r}{r_2} \approx 1 + \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{2r^2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

El potencial se expresa en función de r y θ

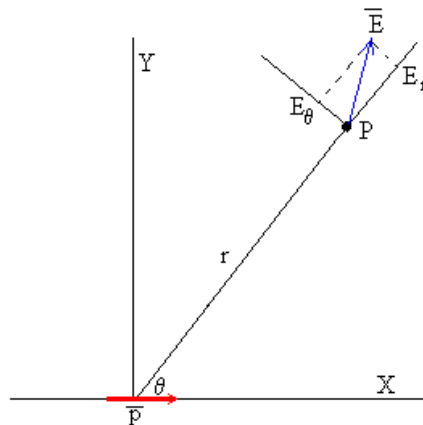
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r}{r_2} - \frac{r}{r_1} \right) \approx \frac{2Qd}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta$$

Es interesante destacar, que el potencial debido a un dipolo disminuye con la inversa del cuadrado de la distancia r , mientras que para una carga puntual disminuye con la inversa de r .

Componentes del campo eléctrico

Las componentes de $\mathbf{E}$ en coordenadas polares se pueden calcular a partir del gradiente de V expresado en coordenadas polares

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta}$$



Las componentes del campo eléctrico $\mathbf{E}$ son

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Qd}{r^3} \cos\theta$$

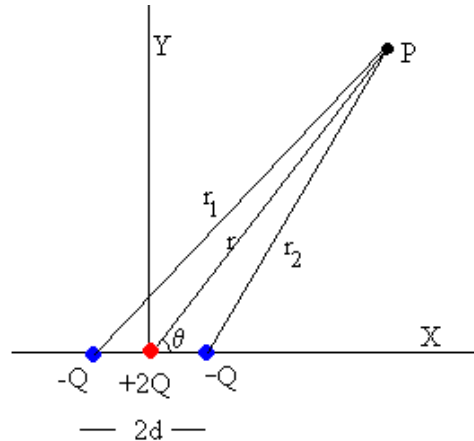
$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Qd}{r^3} \sin\theta$$

La intensidad del campo eléctrico disminuye como el cubo de la distancia r .

Definimos momento dipolar al vector $\mathbf{p}$, cuyo módulo es $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$, el producto de la carga Q por la separación $\mathbf{d}$, y que se dirige desde la carga negativa a la positiva.

CUADRIPOLO

Un cuadripolo es un sistema formado por tres cargas $+2Q$ en el origen y $-Q$ en los puntos $(-d, 0)$ y $(+d, 0)$



El potencial en el punto **P** distante r_1 de la carga $-Q$, r_2 de la carga $-Q$ y r de la carga $+2Q$ es:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Como $r \gg d$ podemos expresar de forma aproximada los cocientes r/r_1 y r/r_2 .

$$\frac{r}{r_1} \approx 1 - \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{2r^2} (3\cos^2 \theta - 1)$$

$$\frac{r}{r_2} \approx 1 + \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{2r^2} (3\cos^2 \theta - 1)$$

El potencial se expresa en función de r y θ

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left(2 - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \approx$$

$$\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 2 - \left[1 - \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{1}{2} (3\cos^2 \theta - 1) \frac{d^2}{r^2} + 1 + \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{1}{2} (3\cos^2 \theta - 1) \frac{d^2}{r^2} \right] \right\}$$

$$V \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d^2}{r^3} (3\cos^2 \theta - 1)$$

Es interesante destacar, que el potencial debido a un cuadripolo disminuye con la inversa del cubo de la distancia r , mientras que para un dipolo disminuye como la inversa del cuadrado, y para una carga puntual disminuye con la inversa de r .

Las componentes del campo eléctrico $\mathbf{E}$ son

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Qd}{r^4} (3\cos^2\theta - 1)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Qd}{r^4} (\sin 2\theta)$$

MOMENTO DE UN DIPOLO

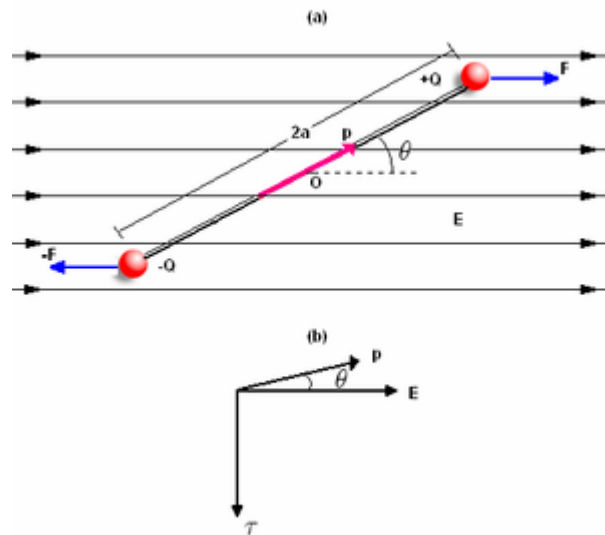


Figura N° 01

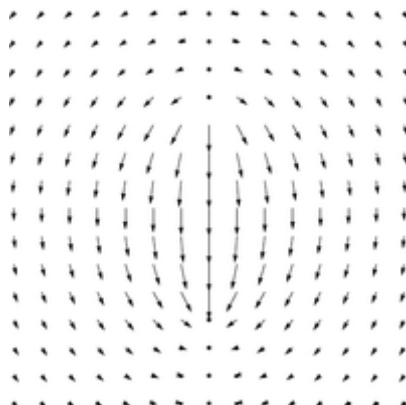


Figura N° 02

Si se coloca un dipolo en un campo eléctrico ($\vec{E}$) uniforme, ambas cargas ($+Q$ y $-Q$), separadas una distancia $2a$, experimentan fuerzas de igual magnitud y de

sentido opuesto ($\vec{F}$ y $-\vec{F}$), en consecuencia, la fuerza neta es cero y no hay aceleración lineal (ver figura N° 01) pero hay un **torque** neto respecto al eje que pasa por **O** cuya magnitud esta dada por:

$$\tau = 2F(a \sin \theta) = 2aF \sin \theta$$

Teniendo en cuenta que $F = qE$ y $p = (2a)(q)$, se obtiene:

$$\tau = 2aqF \sin \theta = pE \sin \theta$$

Así, un dipolo eléctrico sumergido en un campo eléctrico externo $\vec{E}$, experimenta un torque que tiende a alinearlo con el campo:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Los vectores respectivos se muestran en la figura (b).

Se define el **momento dipolar eléctrico** ($\vec{p}$) como una *magnitud vectorial* con módulo igual al producto de la **carga** q por la distancia que las separa d , cuya dirección es la recta que las une, y cuyo sentido va de la carga negativa a la positiva:

$$\vec{p} = q \cdot \vec{d}$$

Para valores suficientemente bajos del módulo del campo eléctrico externo, puede probarse que el momento dipolar es aproximadamente proporcional a aquél. En efecto:

$$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E}$$

Siendo α la polarización electrónica.

Debe hacerse trabajo (positivo o negativo) mediante un agente externo para cambiar la orientación del dipolo en el campo. Este trabajo queda almacenado como energía potencial U en el sistema formado por el dipolo y el dispositivo utilizado para establecer el campo externo.

Si θ en la figura (1) tiene el valor inicial θ_0 , el trabajo requerido para hacer girar el dipolo, está dado por:

$$W = \int dW = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta = U$$

Teniendo en cuenta la igualdad (1):

$$U = \int_{\theta_0}^{\theta} p E \sin \theta d\theta = p E \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta = -p E [\cos \theta - \cos \theta_0]$$

Como solo interesan los *cambios* de energía potencial, se escoge la orientación de referencia θ_0 , de un valor conveniente, en este caso 90° . Así se obtiene:

$$U = -p E \cos \theta$$

lo cual se puede expresar en forma vectorial:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

MOMENTO DIPOLAR DE UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGA

Dos cargas puntuales iguales q y de signo contrario, separadas una distancia $2d_p$ tienen un campo eléctrico dado por:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{(d - d_p \cos \theta)^2} + \frac{-q}{(d + d_p \cos \theta)^2} \right) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q d_p \cos \theta}{d^3}$$

Donde:

$\theta = \vec{p} \cdot \vec{r}$, es el ángulo formado por el vector de posición de un punto dentro del campo y el momento dipolar del par de cargas.

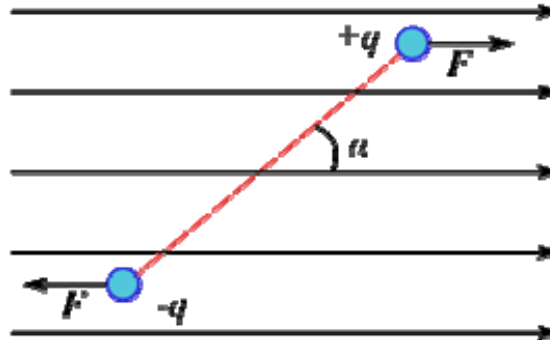
d es la distancia al centro del dipolo.

La última expresión se obtiene desarrollando en **serie de Taylor** la expresión exacta y tomando sólo el primer término de dicha serie, que puede reescribirse simplemente como:

$$\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p} \cdot \vec{r}}{d^3}$$

Dipolo eléctrico en presencia de un campo eléctrico externo y uniforme:

Consideraré un dipolo eléctrico de momento dipolar $\mathbf{P}$, que está dentro de un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}$, como se muestra:



En estas condiciones cada carga del dipolo experimenta una fuerza de igual magnitud, pero de sentido opuesto, de modo que la fuerza resultante sobre el dipolo es nula, pero existe un par de fuerzas, y el momento o torque, de este par respecto al centro de giro O del dipolo es:

$$\vec{\tau} = \frac{d}{2} \times F_1 + \frac{-d}{2} \times F_2$$

$$\vec{\tau} = \frac{d}{2} \times (qE) + \frac{-d}{2} \times (-qE)$$

$$\vec{\tau} = q\vec{d} \times \vec{E}$$

Luego el momento que experimenta el dipolo eléctrico, en función del momento bipolar es:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Ahora si pensamos en que efectos trae este momento para con el dipolo, es fácil notar que el par de fuerzas hará girar al dipolo, para así alinearlo en dirección del campo eléctrico, así el trabajo realizado por el campo eléctrico para alinear el dipolo es:

$$W = \int_0^{\theta} \tau d\alpha$$

$$W = pE \int_0^{\theta} \sin \alpha d\alpha$$

$$W = p E (-\cos \alpha) \Big|_0^\theta$$

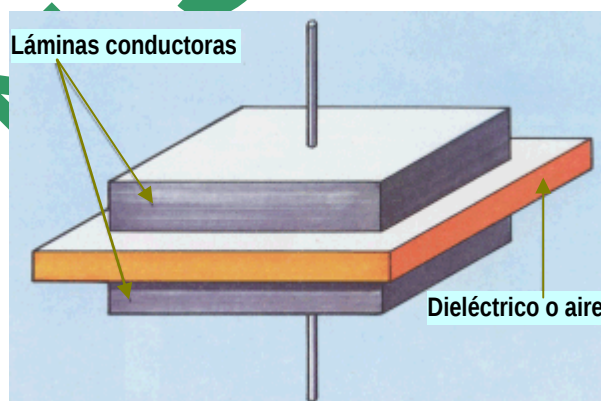
y así finalmente el trabajo realizado por el campo eléctrico para alinear el dipolo es:

$$W = p E (1 - \cos \theta)$$

de este modo concluyo el artículo, esperando que esta breve descripción de lo que es un dipolo eléctrico haya sido comprensible, posteriormente trataré un tema muy importante, la "Ley de Gauss", y quizás también en otro artículo haga algunos comentarios acerca de como es la dinámica de una partícula cargada en un campo eléctrico uniforme.

LOS CONDENSADORES

Básicamente un condensador es un dispositivo capaz de almacenar energía en forma de campo eléctrico. Está formado por dos armaduras metálicas paralelas (generalmente de aluminio) separadas por un material dieléctrico. Va a tener una serie de características tales como **capacidad**, **tensión de trabajo**, **tolerancia** y **polaridad**, que deberemos aprender a distinguir. En la figura vemos esquematizado un condensador, con las dos láminas, y el dieléctrico entre ellas. En la versión más sencilla del condensador, no se pone nada entre las láminas y se las deja con una cierta separación, en cuyo caso se dice que el dieléctrico es el aire.



La capacidad de un condensador puede variar en función de:

- a) La distancia de las placas
- b) El número de placas
- c) El dieléctrico
- d) La temperatura

Características del condensador:

- **Capacidad:** Se mide en Faradios (F), aunque esta unidad resulta tan grande que se suelen utilizar varios de los submúltiplos, tales como microfaradios ($\mu F = 10^{-6} F$), nanofaradios ($nF = 10^{-9} F$) y picofaradios ($pF = 10^{-12} F$).
- **Tensión de trabajo:** Es la máxima tensión que puede aguantar un condensador, que depende del tipo y grosor del dieléctrico con que esté fabricado. Si se supera dicha tensión, el condensador puede perforarse (quedar cortocircuitado) y/o explotar. En este sentido hay que tener cuidado al elegir un condensador, de forma que nunca trabaje a una tensión superior a la máxima.
- **Tolerancia:** Igual que en las resistencias, se refiere al error máximo que puede existir entre la capacidad real del condensador y la capacidad indicada sobre su cuerpo.
- **Polaridad:** Los condensadores electrolíticos y en general los de capacidad superior a $1 \mu F$ tienen polaridad, eso es, que se les debe aplicar la tensión prestando atención a sus terminales positivo y negativo. Al contrario que los inferiores a $1 \mu F$, a los que se puede aplicar tensión en cualquier sentido, los que tienen polaridad pueden explotar en caso de ser ésta la incorrecta

Símbolo del Capacitor:



El valor de la capacidad de un condensador viene definido por la siguiente fórmula:

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{Q_2}{V_2 - V_1}$$

en donde: C: Capacidad

Q_1 : Carga eléctrica almacenada en la placa 1.

$V_1 - V_2$: Diferencia de potencial entre la placa 1 y la 2.

Nótese que en la definición de capacidad es indiferente que se considere la carga de la placa positiva o la de la negativa, ya que:

$$Q_2 = C(V_2 - V_1) = -C(V_1 - V_2) = -Q_1$$

aunque por convenio se suele considerar la carga de la placa positiva.

Existen condensadores formados por placas, usualmente de Al, separadas por aire, materiales cerámicos, mica, poliéster, papel o por una capa de óxido de aluminio obtenido por medio de la electrólisis.

ENERGÍA ALMACENADA

El **condensador almacena energía eléctrica**, debido a la presencia de un **campo eléctrico** en su interior, cuando aumenta la diferencia de potencial en sus terminales, devolviéndola cuando ésta disminuye. Matemáticamente se puede obtener que la energía: ε , almacenada por un condensador con capacidad **C**, que es conectado a una diferencia de potencial **$V = V_1 - V_2$** , viene dada por:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} C(V)^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

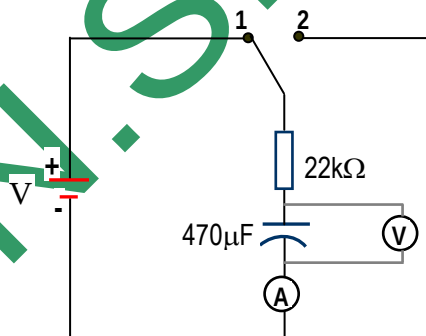
Este hecho es aprovechado para la fabricación de memorias, en las que se aprovecha la capacidad que aparece entre la puerta y el canal de los transistores

Comportamiento en corriente continua

Un condensador real en **CC** (DC) se comporta prácticamente como uno ideal, esto es, como un circuito abierto. Esto es así en régimen permanente ya que en régimen transitorio, esto es, al conectar o desconectar un circuito con condensador, suceden fenómenos eléctricos transitorios.

CARGA Y DESCARGA DE UN CONDENSADOR

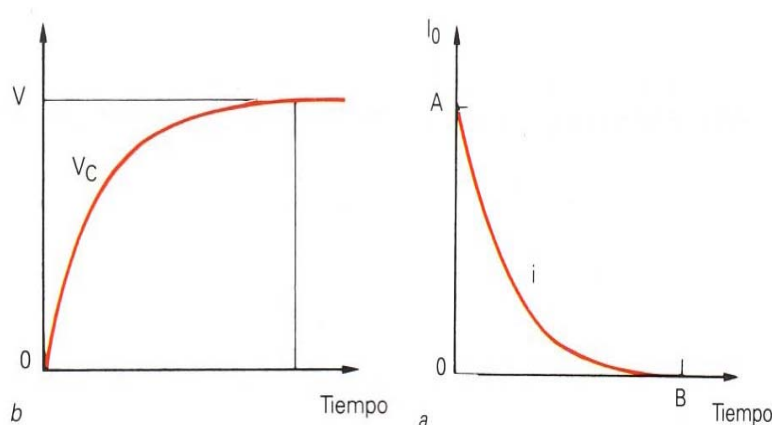
Para detallar el proceso de carga y descarga del condensador, nos apoyaremos en el circuito que se detalla a continuación.



Disponemos de una fuente de tensión, en este caso una batería, un condensador y una resistencia, que llamaremos de carga. Todo ello conectado convenientemente con un conmutador forma dos circuitos, 1, que será el circuito de carga y 2, que será el circuito de descarga

Carga

Con el conmutador en la posición 1, llega la corriente a través de la resistencia, en el primer instante la intensidad alcanza su valor máximo, y a medida que se va cargando el condensador, va aumentando la tensión en él y la intensidad va disminuyendo



Cuando la tensión en el condensador alcanza el valor de la tensión de la batería, quedan al mismo potencial, por lo tanto deja de circular corriente.

Como verás las curvas de carga de un condensador en función del tiempo son curvas exponenciales. Para poder calcular el valor de la carga almacenada por el condensador en un instante cualquiera debemos aplicar la relación:

$$Q = CV(1 - e^{-t/RC})$$

En realidad nunca llega a cargarse por completo, ya que tienen pérdidas de carga. En teoría se considera cargado cuando ha transcurrido un tiempo (t), que viene determinado por la siguiente fórmula:

$$t = 5(R \cdot C)$$

Siendo: R = Resistencia empleada para la carga, en ohmios

C = Capacidad del condensador en faradios

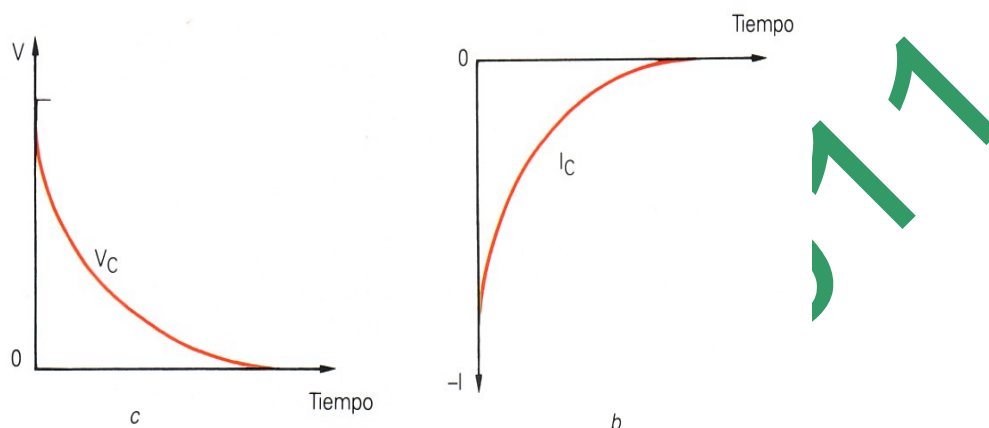
La constante de tiempo ($R \cdot C$) es el que tarda el condensador en almacenar un 63,2 % de la carga máxima

Descarga

Para conseguir la descarga, pasaremos el conmutador a la posición 2.

En el instante inicial la tensión desciende rápidamente, existe también un gran paso de corriente que aparecerá con valores negativos, pues está circulando en sentido contrario al de carga.

La tensión disminuye hasta hacerse nula, también se hará nula la intensidad.

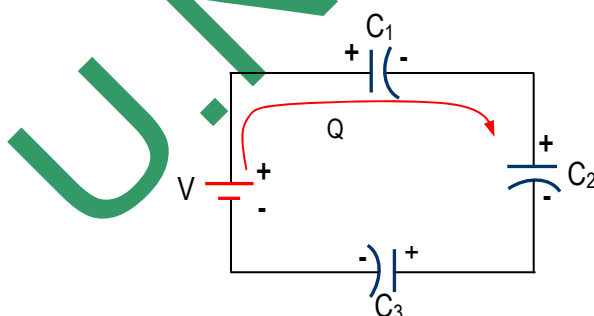


ASOCIACIONES DE CONDENSADORES:

Los condensadores pueden asociarse en diferentes formas: Serie, paralelo y mixto.

a) Condensadores en Serie:

Se dice que están acoplados en serie, cuando al terminal de salida de uno, se le une el de entrada de otro, y así sucesivamente.



En una conexión en serie la carga que llega a cada condensador es la misma. Podemos decir, por tanto, que la carga que tendrá cada uno es la misma:

$$Q_T = Q_{C1} = Q_{C2} = Q_{C3}$$

Sin embargo las tensiones serán diferentes, **la tensión total se repartirá entre los condensadores en función de su capacidad.**

$$V_T = V_{C1} + V_{C2} + V_{C3}$$

$$V_{C1} = Q_T / C_1 \quad V_{C2} = Q_T / C_2 \quad V_{C3} = Q_T / C_3$$

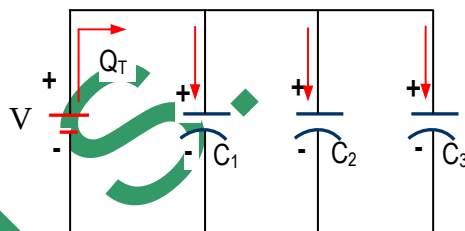
La fórmula que nos ayudará en el cálculo de la capacidad total o equivalente en el acoplamiento de condensadores en serie es:

$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$$

Los condensadores en serie se agrupan igual que las resistencias en paralelo. Una vez aplicada la relación anterior que nos da el valor de $1/C_t$, debemos hacer la inversa del resultado para llegar a C_t que es el valor que deseamos calcular.

b) Condensadores en Paralelo:

Cuando todas las entradas van unidas y a la vez también las salidas, se dice que están conectados en paralelo



Asociación paralelo general

La tensión en todos los condensadores será la misma, igual a la suministrada por la fuente que los carga.

$$V_T = V_{C1} = V_{C2} = V_{C3}$$

La carga de cada condensador estará entonces en función de su capacidad.

$$Q_{C1} = C_1 \cdot V_T \quad Q_{C2} = C_2 \cdot V_T \quad Q_{C3} = C_3 \cdot V_T$$

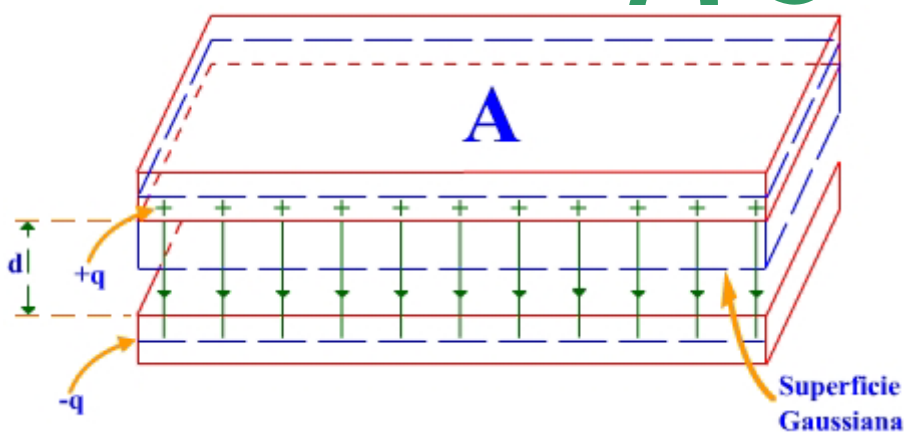
La capacidad total o equivalente será igual a la suma de las capacidades de cada condensador.

$$C_{AB} = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{k=1}^n C_k$$

CONDENSADOR DE PLACAS PARALELAS

A continuación ilustramos el cálculo de la capacitancia para tres geometrías: placas paralelas, esferas concéntricas y cilindros concéntricos. Para lo anterior se halla la diferencia de potencial ΔV entre los conductores con una carga Q , se aplica la ecuación: $C = \frac{Q}{\Delta V}$ y supondremos que los conductores están separados por espacio vacío.

Un conductor de placas paralelas consiste de dos placas paralelas conductoras, cada una con área A , carga $+q$ y $-q$ respectivamente, separadas una distancia d . Si las dimensiones de las placas son grandes en comparación con su separación, d , el campo eléctrico E entre ellas es aproximadamente uniforme (ver figura). Determinamos la capacitancia de este capacitor. Para esto seguiremos los siguientes pasos:



- Suponemos que los conductores tienen carga $+q, -q$.
- Calculamos el campo eléctrico E entre las placas, usando la Ley de Gauss
- Obtenemos la diferencia de potencial V , entre las placas.
- Hallamos la capacitancia.

Solución

De la Ley de Gauss: $\epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = q$

y como $\vec{E}$ es constante y paralela a $d\vec{s}$,

$$\epsilon_0 E A = q$$

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A} \quad (1)$$

De la ecuación,

$$\Delta V = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{l} = - \int_0^d \vec{E} d\vec{l}$$

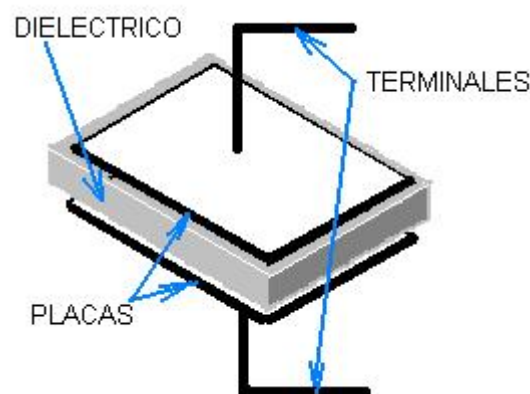
$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A}(d) \quad (2)$$

De la ecuación $C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$

O sea, que la capacidad de un condensador de placas paralelas es proporcional a la superficie de sus placas e inversamente proporcional a su separación.

DIELÉCTRICOS

Un material no conductor, como por ejemplo, el vidrio, el papel o la madera, se denomina **dieléctrico**. Michael Faraday descubrió que cuando el espacio entre dos conductores de un condensador se ve ocupado por un dieléctrico, la capacidad aumenta en un factor **K** que es característico del dieléctrico. La razón de este incremento es que el campo eléctrico entre las placas de un condensador se debilita por causa del dieléctrico.



Así para una carga determinada sobre las placas, la diferencia de potencial se reduce y la relación: Q / V se incrementa.

Consideremos inicialmente un condensador cargado aislado y sin dieléctrico entre sus placas. Se introduce después una pastilla de dieléctrico, llenando todo el espacio entre las mismas. Si el campo eléctrico original entre las placas de un conductor sin dieléctrico es E_0 , el campo en el interior del dieléctrico introducido entre las placas es:

$$E = \frac{E_0}{K}$$

donde K es la constante dieléctrica. En un condensador de placas paralelas de separación d , la diferencia de potencial V entre las placas es:

$$V = E \cdot d = \frac{E_0 d}{k} = \frac{V_0}{K}$$

Siendo V la diferencia de potencial con dieléctrico y $V_0 = E_0 \cdot d$ la diferencia de potencial original sin dieléctrico. La nueva capacidad es:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V/K} = K \frac{Q}{V_0}$$

es decir:

$$C = K C_0$$

En donde $C_0 = Q/V_0$ es la capacidad sin el dieléctrico. La capacidad de un condensador de placas plano-paralelas lleno de un dieléctrico de constante k es, por lo tanto,

$$C = \frac{K \varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon A}{d}$$

en donde:

$$\varepsilon = K \varepsilon_0$$

es la **permitividad** del dieléctrico

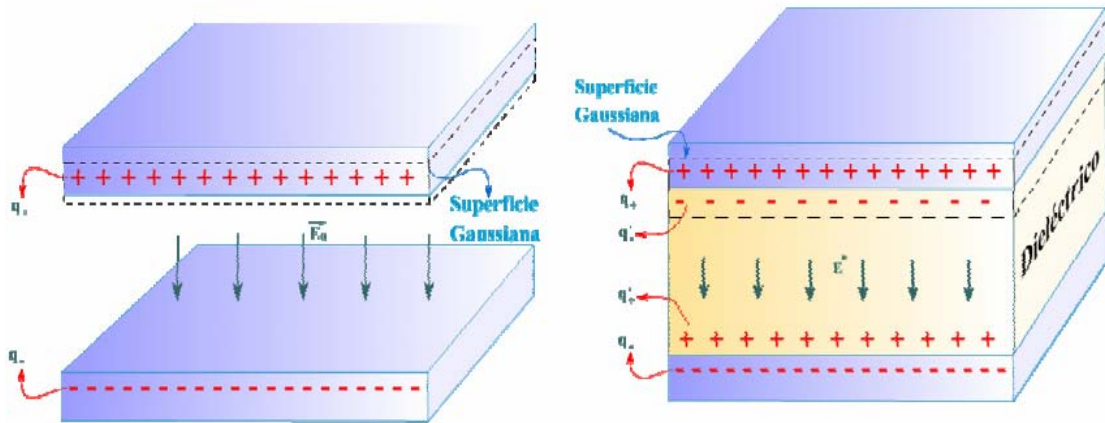
LEY DE GAUSS Y CONDENSADORES CON DIELECTRICOS

En las situaciones anteriores, la ley de Gauss se ha utilizado en condensadores donde hemos supuesto un espacio vacío entre las placas. Pero cuando hay un dieléctrico (como el vidrio, el papel encerado, etc.), este permite mayores cargas para un determinado voltaje, y la forma de la ley de Gauss se expresa como:

$$\varepsilon_0 \oint_S K \vec{E} \cdot d\vec{s} = q$$

donde K es la constante dieléctrica característica del material. Para la obtención de la ecuación anterior utilizemos dos condensadores de placas paralelas, como se muestra en las ilustraciones. En la figura (a) hemos considerado un condensador de placas paralelas en el vacío, y en la figura (b) el mismo condensador cuando se coloca un dieléctrico entre las placas. Se supone que la carga q en las placas es la misma. Cuando se introduce el dieléctrico aparece una carga inducida q' , sobre su superficie, que es diferente de la carga libre q .

En ambos casos se aplica Gauss.



(a) Condensador sin dieléctrico

(b) Condensador con Dieléctrico

Tenemos entonces:

Condensador sin dieléctrico

$$\epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = q \quad (1)$$

$$\epsilon_0 E \cdot A = q$$

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A} \quad (3)$$

condensador con dieléctrico

$$\epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = q - q' \quad (2)$$

$$\epsilon_0 E \cdot A = q - q'$$

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A}$$

$$E = \frac{E_0}{K} \quad (5)$$

Con (1), (4) y (5):

$$\frac{q}{K \epsilon_0 A} = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A}$$

$$q - q' = \frac{q}{K} \quad (6)$$

y colocando la ecuación (6) en (2) se obtiene que:

$$\epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{K} \quad \text{o}$$

$$K \epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = q, \text{ que es la forma de la ley de Gauss cuando hay dieléctrico}$$

Aplicaciones típicas

Los condensadores suelen usarse para: Baterías, por su cualidad de almacenar energía. Memorias, por la misma cualidad. Filtros. Adaptación de impedancias, haciéndolas resonar a una frecuencia dada con otros componentes. El flash de las cámaras fotográficas. Tubos fluorescentes. Mantener corriente en el circuito y evitar caídas de tensión.