

34.- Flujo viscoso.

§34.1. Concepto de capa limite (1015); §34.2. Flujo laminar y flujo turbulento (1019); §34.3. Flujo interno (1021); §34.4. Flujo en tuberías. Ley de Hagen-Poiseuille (1025); §34.5. Ecuación de Bernoulli para el flujo viscoso. Pérdida de carga (1029); §34.6. Cálculo de las pérdidas de carga en tuberías (1031); §34.7. Flujo externo (1037); §34.8. Arrastre y sustentación (1039); §34.9. Arrastre (1039); §34.10. Sustentación. Efecto Magnus (1044); §34.11. Sustentación de un perfil aerodinámico (1046); Problemas (1048)

Como complemento de la lección precedente, que ha estado dedicada al estudio de los fundamentos teóricos del movimiento de los fluidos viscosos, esta lección está dedicada a resolver algunos casos prácticos interesantes. Los objetivos de esta lección serán la determinación del campo de velocidades, de la distribución de esfuerzos cortantes, del caudal y de la caída de presión en conducciones y tuberías y la evaluación del arrastre y de la sustentación sobre cuerpos que se mueven en el seno de un fluido. Para ello emplearemos básicamente la formulación general desarrollada en la lección anterior e introduciremos algunos conceptos nuevos.

§34.1. Concepto de capa limite.- Todos los fluidos poseen viscosidad; por consiguiente, el flujo viscoso es de gran importancia en el estudio de la dinámica de los fluidos reales. Sin embargo, existen situaciones en las que los efectos viscosos son despreciables y en las que el flujo puede considerarse como no-viscoso. Estudiaremos ahora esta cuestión.

Como se recordará, las leyes de la viscosidad de Newton y Stokes establecen la existencia de dos factores fundamentales con los que está relacionada la distribución de esfuerzos cortantes en el seno de un fluido en movimiento; estos factores son la *viscosidad* del fluido y el *gradiente del campo de velocidades*. En consecuencia, incluso para fluidos poco viscosos (como los gases), los esfuerzos cortantes serán importantes en aquellas regiones del flujo donde exista un gradiente de velocidad elevado.

Como ya sabemos, en cualquier flujo de un fluido real, el fluido en contacto directo con un contorno sólido posee la misma velocidad que el contorno sólido mismo; *i.e.*, se produce una *adherencia* del fluido al contorno sólido. Puesto que la velocidad del fluido en contacto con el contorno sólido es cero, respecto al mismo, en tanto que el fluido en su conjunto se mueve respecto al contorno sólido, aparece un gradiente de velocidad en el flujo, lo que da lugar a la aparición de esfuerzos cortantes que, a su vez, afectan al flujo.

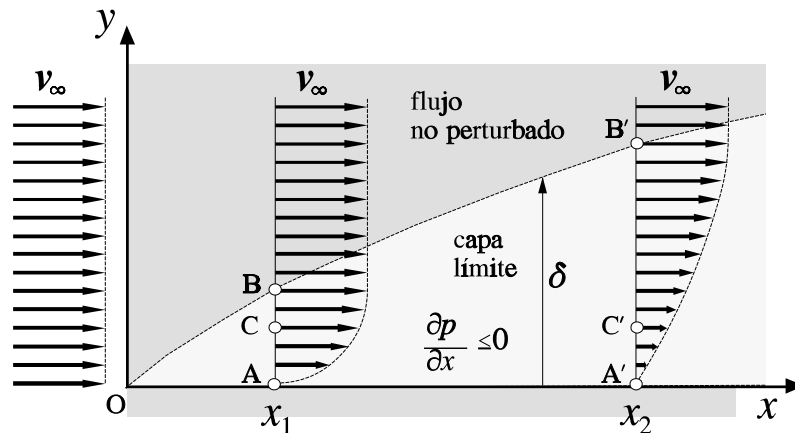


Figura 34.1

Analizaremos la naturaleza del flujo sobre una lámina plana estacionaria, como se ilustra en la Figura 34.1, en el que el fluido que se aproxima a la lámina posee una velocidad de flujo no perturbado v_∞ (*velocidad de corriente libre*). Estamos interesados en obtener una descripción cualitativa de la distribución de velocidad de flujo en los puntos de una recta perpendicular a la lámina (*perfil de velocidad*), en diversas posiciones a lo largo de ésta. Para ello centraremos nuestra atención en dos posiciones, de abscisas x_1 y x_2 , como se muestra en la Figura 34.1.

Comenzaremos considerando la posición x_1 . La condición de adherencia impone que la velocidad en el punto A debe ser cero; así tenemos un punto en el perfil de velocidad correspondiente. Como la lámina permanece fija, ejerce una fuerza retardadora sobre el movimiento del fluido, de modo que éste se frena en la proximidad de la superficie de la lámina. Sin embargo, en un punto tal como el B situado a una distancia suficientemente grande de la lámina, el flujo no estará influenciado por la presencia de ésta. Entonces, si estipulamos que la presión no varía en la dirección del flujo (eje x), como ocurre en el caso de una lámina plana semiinfinita, la velocidad en el punto B debe ser v_∞ . En estas condiciones, parece razonable aceptar que la velocidad v_x aumenta continuamente desde el valor $v_x=0$ en $y=0$ hasta $v_x=v_\infty$ en $y=y_B$, de modo que el perfil de velocidad en la posición x_1 tendrá el aspecto que se muestra en la Figura 34.1. En consecuencia, en la región $0 \leq y \leq y_B$, en la que existe un gradiente transversal de velocidad, existirán esfuerzos cortantes importantes en el seno del fluido; fuera de esta región, para $y \geq y_B$, el gradiente transversal de velocidad es nulo y no existirán esfuerzos cortantes.

La situación en la posición x_2 es análoga, pero no exactamente la misma, a la que hemos descrito para la posición x_1 . Es razonable esperar que la influencia de la lámina se deje sentir en una mayor región del flujo a medida que éste avanza sobre la lámina. Puesto que en la posición x_1 las capas fluidas más lentas ejercen una fuerza tangencial de frenado sobre las capas más rápidas situadas inmediatamente encima, cabe esperar que la distancia $y_{B'}$, correspondiente al punto B' donde la velocidad de flujo es v_∞ , debe incrementarse en la posición x_2 ; esto es, $y_{B'} > y_B$. En consecuencia, también será razonable que $v_C > v_{C'}$, para una misma distancia a la lámina ($y_C = y_{C'}$) en las posiciones x_1 y x_2 .

A partir de esta descripción cualitativa del flujo, vemos que es posible considerar en éste dos regiones bien diferenciadas. En la región adyacente al contorno sólido, donde el gradiente transversal de velocidad es considerable, existen esfuerzos cortantes que deben tenerse en cuenta, incluso en el caso de fluidos poco viscosos, y el flujo es rotacional; esta región recibe el nombre de *capa límite*¹. Fuera de la capa límite, el gradiente transversal de velocidad es nulo y, por tanto, no existen esfuerzos cortantes. Únicamente en la región de la capa límite son importantes los efectos de la viscosidad y el flujo deberá ser considerado como viscoso; fuera de esa región, los efectos de la viscosidad son despreciables y puede utilizarse la teoría del flujo no-viscoso (flujo irrotacional).

Naturalmente, no existe ninguna línea divisoria bien definida entre la región de flujo irrotacional, donde la fricción es despreciable, y la capa límite; pero es costumbre definir la capa límite como la región en la que la velocidad del fluido (paralela al contorno) es menor del 99% de la velocidad de corriente libre v_∞ . El espesor de la capa límite (δ) crece desde el *borde de ataque* a lo largo del contorno sólido. En el borde de ataque de una lámina plana semiinfinita, el espesor de la capa límite es cero; pero en el borde de ataque de un cuerpo romo (cilindro, ala de un avión, ...), la capa límite tiene un espesor finito, incluso en el punto de estancamiento. Para una velocidad de corriente libre dada, el espesor de la capa límite depende de la viscosidad del fluido.

Puede demostrarse que incluso en aquellos flujos en los que la presión varía a lo largo del contorno sólido, como es el caso de una superficie curva, la variación de la presión en la dirección normal al contorno es despreciable en el interior de la capa límite. Esto nos permite suponer que la distribución de presión en la capa límite está impuesta por el gradiente de presión en la región de flujo irrotacional ubicada fuera de la capa límite. En muchos problemas prácticos, el espesor de la capa límite es tan pequeño que el análisis del flujo irrotacional fuera de ella puede llevarse a cabo despreciando la presencia de la capa límite; en una segunda etapa, los resultados de ese análisis se emplean para determinar la distribución de presión en la capa límite. Esta aproximación se utiliza en los estudios aerodinámicos destinados a la determinación del flujo sobre perfiles tales como el ala de un avión.

La configuración del perfil de velocidad en la capa límite y la velocidad de crecimiento del espesor de ésta depende del gradiente de presión en la dirección del flujo (*i.e.*, $\partial p/\partial x$, en nuestro ejemplo). Si la presión decrece en la dirección del flujo, *i.e.*, si $\partial p/\partial x < 0$, tenemos un *gradiente de presión favorable*, ya que la presión detrás de cada partícula fluida (ayudando a su movimiento) es mayor que la presión delante de la misma (que se opone a su movimiento); en estas condiciones, el espesor de la capa límite se incrementa gradualmente conforme avanza la corriente y los perfiles de velocidad serán similares a los que se muestran en la Figura 34.1. Por el contrario, si la presión crece en la dirección del flujo, *i.e.*, si $\partial p/\partial x > 0$, tenemos un *gradiente de presión adverso*, ya que la presión detrás de cada partícula fluida es menor que la que existe delante; en estas condiciones, el espesor de la capa límite se incrementa

¹ El concepto de *capa límite* fue introducido en 1904 por el físico e ingeniero alemán Ludwig PRANDTL (1875-1953) y ha resultado ser una de las ideas más fructíferas en el desarrollo de la Dinámica de los Fluidos Reales.

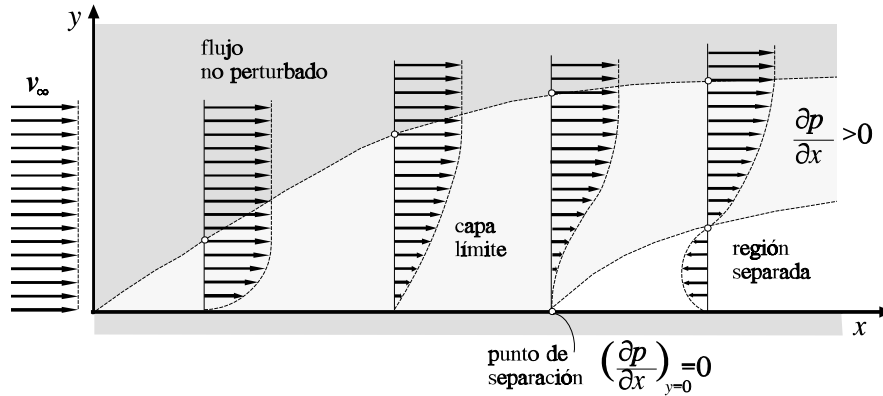


Figura 34.2

rápidamente y los perfiles de velocidad son similares a los que se muestran en la Figura 34.2. Si el gradiente de presión adverso es suficientemente grande, se presentará una *separación del flujo* respecto del contorno, apareciendo una *región de flujo invertido*. El punto situado sobre el contorno en el cual es $(\frac{\partial v_x}{\partial y})_{y=0} = 0$ recibe el nombre de *punto de separación*. A partir del punto de separación, la dirección del flujo en la *región separada* es opuesta a la del flujo principal; el fluido de baja velocidad contenido en la región separada es forzado a incorporarse al flujo principal impelido por el aumento de presión "corriente abajo".

El efecto del gradiente longitudinal de presión es de suma importancia en el establecimiento del flujo en difusores y boquillas y alrededor de objetos. Así, en el caso de un difusor (Figura 34.3a) está involucrado un gradiente de presión adverso, de modo que la capa límite crece muy rápidamente y hay una fuerte tendencia a la separación del flujo cuando el ángulo de divergencia del difusor es grande. Por el

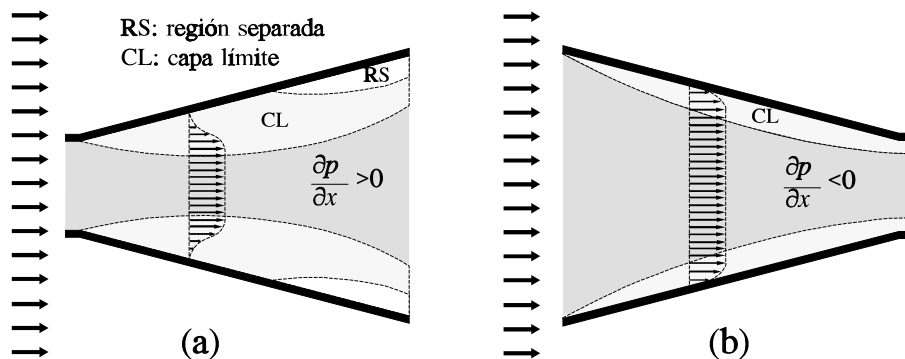


Figura 34.3

contrario, en una boquilla (Figura 34.3b) se presenta un gradiente de presión favorable, de modo que la capa límite crece gradualmente y no es posible la separación, por lo que el diseño de estos dispositivos es relativamente sencillo. La separación del flujo alrededor de objetos (como el ala de un avión, ...) tiene suficiente interés como para que le dediquemos un estudio más detenido más adelante.

§34.2. Flujo laminar y flujo turbulento.- En la lección anterior, al referirnos a la ley de viscosidad de Newton, ya hemos utilizado el concepto de *flujo laminar*, entendiéndolo por tal un flujo en el que *el fluido fluye en láminas o capas* que se deslizan unas respecto a otras sin que haya mezcla macroscópica del fluido perteneciente a diferentes láminas o capas fluidas. Un fino filamento de tinta inyectado en un flujo laminar aparecerá como un línea simple, sin que ésta se disperse en el flujo, salvo la pequeña dispersión debida al movimiento molecular. El flujo laminar, también llamado *flujo puramente viscoso*, es un flujo *bien ordenado a escala macroscópica*.

Por el contrario, cuando se inyecta un filamento de tinta en un *flujo turbulento*, el tinte se dispersa rápidamente en multitud de hilillos enmarañados que se van mezclando con el fluido a medida que éste avanza. Este comportamiento se debe a las pequeñas *fluctuaciones macroscópicas de velocidad* que se superponen a la velocidad media del flujo en cada punto del mismo, lo que produce una mezcla macroscópica de fluido perteneciente a diferentes capas, dando lugar a la rápida dispersión del tinte en el flujo. El flujo turbulento es un flujo *desordenado a escala macroscópica*.

Para examinar estos dos regímenes de flujo viscoso es conveniente recordar la clásica experiencia de Reynolds, en la que se hace fluir agua a través de una tubería de vidrio, como se muestra en la Figura 34.4, controlando el caudal por medio de una válvula de salida. En el interior de la tubería se inyecta un fino filamento de tinta de la misma densidad que el agua y se investiga su comportamiento para distintas velocidades de flujo. Se observa que el flujo es laminar para pequeñas velocidades de flujo. Sin embargo, cuando se aumenta progresivamente la velocidad de flujo, llega un momento en que se alcanza un estado en el que el tinte, al avanzar con el flujo, adopta un movimiento fluctuante; esto es, tiene lugar una *transición* desde el régimen de flujo laminar a un régimen de flujo inestable. Al aumentar aún más la velocidad del flujo, se producen fluctuaciones en el flujo y el filamento de tinta se dispersa totalmente; este flujo irregular se denomina *flujo turbulento*.

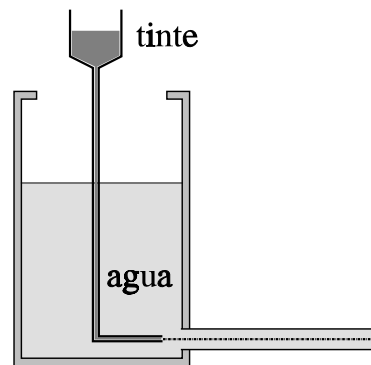


Figura 34.4

El experimento de Reynolds pone de manifiesto la dependencia del régimen de flujo laminar o turbulento con la velocidad del mismo. En general, el que el flujo sea laminar o turbulento depende de las características del fluido (ρ y η), de la velocidad de flujo y de la configuración y tamaño del conducto por el que fluye o del objeto alrededor del cual fluye el fluido.

En el caso del fluido en el interior de un tubería, la naturaleza del mismo (laminar o turbulento) está determinada por el valor del número de Reynolds (*vide* §33.9):

$$\Re = \frac{\rho D V}{\eta} \quad [34.1]$$

donde ρ es la densidad del fluido, η la viscosidad del mismo, D el diámetro de la tubería y V la velocidad media del flujo. La experiencia nos demuestra que para $\Re < 2300$ el flujo es laminar y que para $\Re > 2300$ el flujo es frecuentemente turbulento; este valor de \Re recibe el nombre de *número de Reynolds crítico* para las tuberías.

En realidad no existe un valor bien definido de \Re para el cual siempre ocurra la transición del régimen laminar al turbulento, sino que más bien existe un intervalo de valores de \Re en el cual tiene lugar dicha transición. El número de Reynolds crítico sólo indica la inminencia de la transición del régimen laminar al turbulento. Por otra parte, bajo condiciones experimentales cuidadosamente controladas, es posible mantener el régimen laminar para valores de \Re muy superiores al de \Re_{crit} (incluso para $\Re = 40000$).

Podemos poner de manifiesto la diferencia esencial existente entre el régimen laminar y el turbulento si representamos gráficamente en función del tiempo la componente de velocidad v_x en un punto fijo en el interior de la tubería. En un flujo laminar estacionario, la representación gráfica será una línea recta horizontal (Figura 34.5a). En cambio, en un flujo turbulento estacionario, la gráfica (Figura 34.5b) indica la existencia de fluctuaciones macroscópicas al azar de la velocidad v_x alrededor del valor medio temporal $V_x = \langle v_x \rangle$ de la misma; cuando dicho valor medio permanece constante en el transcurso del tiempo, el flujo turbulento es considerado como estacionario.

Aunque muchos flujos turbulentos de interés son estacionarios en los valores medios, la presencia de las fluctuaciones al azar complica el análisis del flujo. Así, en un flujo laminar unidimensional, el esfuerzo cortante y el gradiente transversal de velocidad están relacionados por la ley de Newton

$$\sigma_{yx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad [34.2]$$

pero esta relación no es válida en el flujo turbulento. En el flujo turbulento no existe una relación universal entre el campo de esfuerzos y el de velocidades medias

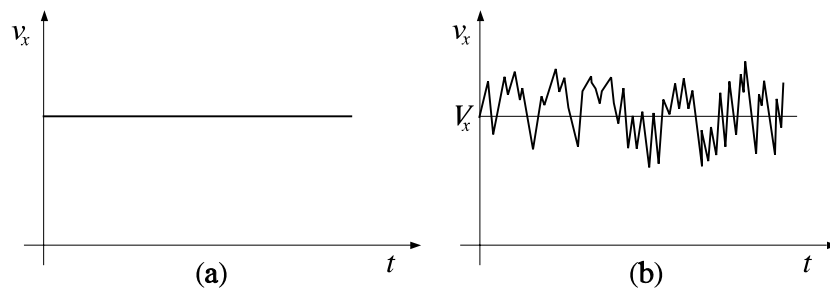


Figura 34.5

temporales, de modo que debemos trabajar basándonos en la experimentación y en teorías semiempíricas.

§34.3. Flujo interno.- El flujo interno es aquél en el que el fluido fluye confinado en el interior de una estructura sólida, como el que se produce en el interior de tuberías, difusores, boquillas, canales y maquinarias. Al considerar un flujo interno debemos tener en cuenta el comportamiento de la capa límite. En la Figura 34.6 se ilustra un flujo laminar en la región de entrada de una tubería. Inmediatamente después de la entrada perfectamente redondeada, el flujo es prácticamente uniforme, con una velocidad v_0 . La condición de adherencia en las paredes de la tubería impone que la velocidad del fluido en contacto con éstas debe ser cero a lo largo de toda la tubería; en consecuencia, se desarrolla una capa límite a lo largo de las paredes. Al principio, esta capa límite es muy delgada; pero es de esperar que vaya aumentando de espesor a medida que se avanza en la tubería, delimitándose una zona central de flujo no viscoso (irrotacional), a veces llamada *núcleo*, que se va estrechando flujo abajo.

Para un fluido incompresible, la ecuación de continuidad nos indica que el fluido contenido en el núcleo del flujo debe acelerarse, de modo que la velocidad media de flujo en una tubería, esto es

$$V = \frac{1}{S} \int_S v \, dS \tag{34.3}$$

debe ser igual a la velocidad de entrada; es decir, $v=v_0=cte$. En consecuencia, al escribir la ecuación de Bernoulli a lo largo de una línea de corriente en la región de flujo no-viscoso (núcleo) se ve que la presión debe decrecer en la dirección del flujo.

A partir de una distancia suficientemente grande de la entrada de la tubería, la capa límite ocupa completamente toda la sección de la misma, desapareciendo la región de flujo no viscoso; esta distancia recibe el nombre de *longitud de entrada* (L_e). Más allá de la longitud de entrada, el perfil de velocidad no cambia a lo largo de la tubería y decimos que tenemos un *flujo completamente desarrollado*.

En un flujo laminar, la longitud de entrada es función del número de Reynolds ($\Re = \rho DV/\eta$) y del diámetro de la tubería. Las investigaciones teóricas realizadas por BOUSSINESQ nos llevan a la relación

$$L_e = 0.03 D \Re \tag{34.4}$$

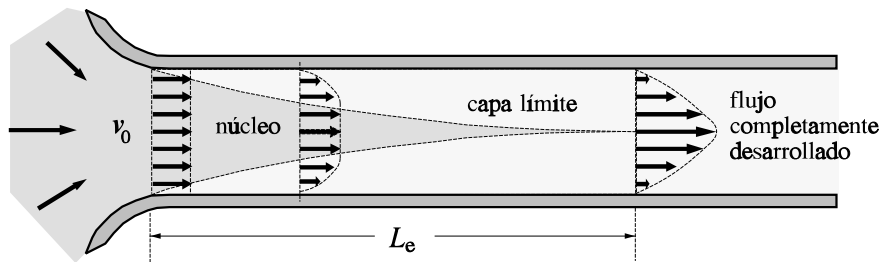


Figura 34.6

que concuerda satisfactoriamente con los resultados experimentales. Puesto que el número de Reynolds crítico en una tubería es 2300, tenemos que

$$\text{(flujo laminar)} \quad L_e \leq 69 D \quad [34.5]$$

No existe una relación general semejante a la de Boussinesq para el régimen de flujo turbulento en una tubería. La longitud de entrada en régimen turbulento es unas veces mayor y otras menor, dependiendo de las condiciones locales, que la correspondiente al flujo laminar. Se ha podido comprobar experimentalmente que la longitud de entrada en régimen turbulento en una tubería suele estar comprendida en el siguiente intervalo de valores

$$\text{(flujo turbulento)} \quad 25 < \frac{L_e}{D} < 40 \quad [34.6]$$

En muchos problemas de interés práctico, la longitud de entrada es pequeña en comparación con la longitud total del conducto o tubería en la que se presenta el flujo completamente desarrollado, de modo que la importancia de aquélla es despreciable en cuestiones tales como el cálculo de la pérdida de carga.

Estamos ahora en condiciones de abordar el estudio analítico del *flujo interno, estacionario, incompresible, laminar y completamente desarrollado*. En realidad, son relativamente pocos los problemas de este tipo en los que podemos obtener soluciones analíticas exactas, pero el método para resolverlos es interesante en sí mismo. Utilizaremos básicamente la ecuación de Navier-Stokes y la de continuidad para determinar el campo de velocidades; el conocimiento de éste nos permitirá obtener abundante información adicional (esfuerzos, caída de presión, caudal, ...). Como ejemplo, analizaremos el flujo entre dos placas paralelas estacionarias y el flujo de Couette; después, haremos un estudio más detenido del flujo en tuberías.

Ejemplo I.- Analizar el flujo laminar completamente desarrollado entre dos láminas planas y paralelas, ambas estacionarias.

Supondremos que ambas láminas son muy largas en la dirección del eje z , de modo que el flujo sea unidimensional. Suponiendo el flujo incompresible, las ecuaciones del movimiento pueden obtenerse a partir de la ec. de Navier-Stokes para el flujo estacionario; esto es, en la dirección del flujo, tenemos

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{d^2 v}{dy^2} \quad [34.7]$$

Integrando una vez se obtiene

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y + C_1 \quad [34.8]$$

y mediante una segunda integración

$$v = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + C_1 y + C_2 \quad [34.9]$$

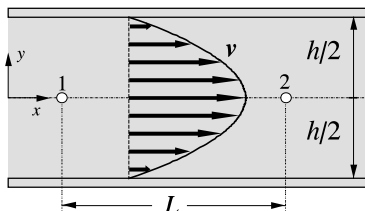


Figura 34.7

Para evaluar las constantes C_1 y C_2 debemos servirnos de las condiciones de contorno (o adherencia); esto es, $v=0$ para $y=\pm h/2$, de modo que se obtiene

$$C_1 = 0 \quad C_2 = -\frac{h^2}{8\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad [34.10]$$

y por tanto

$$v = \frac{h^2}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \left[\left(\frac{y}{h} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \quad [34.11]$$

que corresponde a un *perfil de velocidades* de forma parabólica.

Distribución de esfuerzos cortantes.- Esta distribución viene dada por

$$\sigma_{yx} = \eta \frac{dv}{dy} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y \quad [34.12]$$

Caudal.- El caudal se calcula mediante la expresión

$$\mathfrak{Q} = \int_S v \cdot dS \quad [34.13]$$

de modo que para un longitud l en la dirección del eje z se tiene

$$\frac{\mathfrak{Q}}{l} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} v \, dy = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[y^2 - \frac{h^2}{4} \right] dy \quad [34.14]$$

o sea

$$\frac{\mathfrak{Q}}{l} = -\frac{h^3}{12\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad [34.15]$$

Caudal en función de la caída de presión en la dirección del flujo.- Puesto que $(\partial p/\partial x)$ es constante en un flujo completamente desarrollado, podemos escribir

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_2 - p_1}{L} = \frac{\Delta p}{L} = -\frac{\Delta' p}{L} \quad [34.16]$$

donde hemos designado por $\Delta' p = p_1 - p_2 = -\Delta p$ la *caída de presión* en la dirección del flujo. Sustituyendo esta expresión en [34.15] obtenemos

$$\frac{\mathfrak{Q}}{l} = \frac{h^3}{12\eta} \left(\frac{\Delta' p}{L} \right) \quad [34.17]$$

Velocidad media de flujo.- La velocidad media de flujo viene dada por

$$V = \frac{\mathfrak{Q}}{S} = \frac{\mathfrak{Q}}{hl} = -\frac{h^2}{12\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{h^2}{12\eta} \left(\frac{\Delta' p}{L} \right) \quad [34.18]$$

Velocidad máxima de flujo.- Para determinar la velocidad máxima y el valor de la ordenada en la cual se presenta, haremos $dv/dy=0$ y resolveremos para el correspondiente valor de y . El resultado es

$$y = 0 \quad v_{\text{máx}} = -\frac{h^2}{8\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{3}{2} V \quad [34.19]$$

Todos los resultados obtenidos son válidos únicamente para el flujo laminar completamente desarrollado. Se comprueba experimentalmente que la transición del régimen laminar al turbulento

se presenta, en este caso, para $\Re_{\text{crít}}=1200$. Por consiguiente, antes de utilizar las expresiones anteriores para un problema concreto deberemos asegurarnos de que el régimen de flujo es laminar ($\Re < 1200$).

Ejemplo II.- Analizar el flujo laminar completamente desarrollado entre dos grandes láminas planas y paralelas, una de las cuales se mantiene fija, en tanto que la otra se mueve paralelamente a la primera con velocidad constante. Este flujo recibe el nombre de *flujo de Couette*.

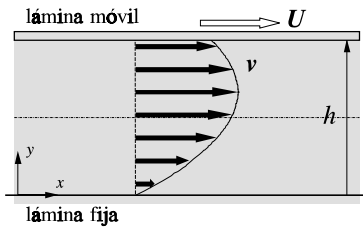


Figura 34.8

Obviamente, la ecuación del movimiento correspondiente a este flujo es la misma que ya hemos establecido en el ejemplo anterior [34.7], que nos llevará por integración, al igual que antes, a

$$v = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + C_1 y + C_2 \quad [34.20]$$

debiéndose evaluar las constantes de integración C_1 y C_2 a partir de las condiciones de contorno o adherencia específicas para el flujo de Couette; esto es, $v=0$ para $y=0$ y $v=U$ para $y=h$. De este modo se obtiene

$$C_1 = \frac{U}{h} - \frac{h}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad C_2 = 0 \quad [34.21]$$

y por tanto

$$v = \frac{U}{h} y + \frac{h^2}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \left[\left(\frac{y}{h} \right)^2 - \frac{y}{h} \right] \quad [34.22]$$

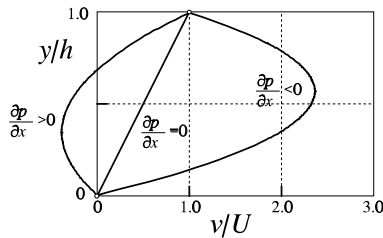


Figura 34.9

que corresponde a un *perfil de velocidades* de forma parabólica. Sin embargo, es conveniente observar que en ausencia de gradiente de presión en la dirección del flujo (*i.e.*, para $\partial p/\partial x=0$) el perfil de velocidades es lineal, ya que $v=(U/h)y$.

La ecuación [34.22] sugiere que el perfil de velocidad puede ser considerado como una combinación de dos perfiles: uno lineal y otro parabólico. El resultado es un familia de perfiles de velocidad que depende de los valores de U y $(1/\eta)(\partial p/\partial x)$, tres de los cuales han sido representados en la Figura 34.9 Obsérvese como la presencia de un gradiente

de presión adverso puede provocar la inversión del flujo.

Distribución de esfuerzos cortantes.-

$$\sigma_{yx} = \eta \frac{dv}{dy} = \eta \left[\frac{U}{h} + h \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \left(\frac{y}{h} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad [34.23]$$

Caudal.-
$$Q = \int_S v \cdot dS = l \int_0^h v dy = l \int_0^h \left[\frac{U}{h} y + \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - hy) \right] dy \quad [34.24]$$

o sea
$$\frac{\mathfrak{C}}{l} = \frac{hU}{2} - \frac{h^3}{12\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad [34.25]$$

Velocidad media de flujo.-
$$V = \frac{\mathfrak{C}}{S} = \frac{\mathfrak{C}}{hl} = \frac{U}{2} - \frac{h^2}{12\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad [34.26]$$

Velocidad máxima de flujo.- Determinaremos la derivada dv/dy , la igualaremos a cero y resolveremos para el valor correspondiente de y . Obtenemos

$$\frac{dv}{dy} = \frac{U}{h} + \frac{h^2}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \left[\frac{2y}{h^2} - \frac{1}{h} \right] = 0 \quad [34.27]$$

o sea
$$y = \frac{h}{2} - \frac{U/h}{(1/\eta)(\partial p/\partial x)} \quad v_{\text{máx}} = \frac{U}{2} \left[1 - \frac{U}{h^2(\partial p/\partial x)} \right] - \frac{h^2}{8\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad [34.28]$$

no existiendo una relación sencilla entre $v_{\text{máx}}$ y V .

Los resultados anteriores sólo son válidos para el flujo de Couette en régimen laminar completamente desarrollado. Se comprueba experimentalmente que el número de Reynolds crítico para el flujo de Couette es $\Re_{\text{crit}} \approx 1500$ para $(\partial p/\partial x=0)$, estando definido el número de Reynolds por $\Re = \rho h U / \eta$.

§34.4. Flujo en tuberías. Ley de Hagen-Poiseuille.- Dada la importancia práctica que tiene la conducción de fluidos mediante tuberías cilíndricas, dedicaremos una atención especial al análisis del flujo en éstas. En realidad, ya hemos prestado una atención especial al flujo en tuberías al referirnos en el epígrafe anterior a la *longitud de entrada* en el flujo interno. Ahora, profundizaremos el análisis del flujo en tuberías para flujo completamente desarrollado. En primer lugar nos referiremos al flujo laminar; luego, al flujo turbulento.

Para comenzar, determinaremos la distribución o perfil de velocidad para el caso de un flujo laminar, incompresible y estacionario en una tubería de sección transversal circular y constante. Como el flujo puede considerarse *axil simétrico* respecto al eje de la tubería, todas las variables que lo caracterizan resultan ser función exclusivamente de la distancia al eje de simetría, siempre que puedan desprejarse las variaciones hidrostáticas. En consecuencia, resultará conveniente utilizar coordenadas cilíndricas.

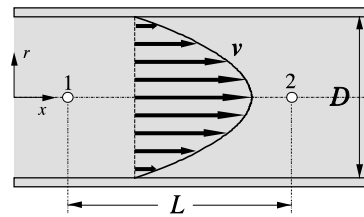


Figura 34.10

La componente de la ecuación de Navier-Stokes en la dirección del flujo es

$$\rho \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2 v \quad [34.29]$$

siendo nula la derivada total dv/dt (=local+convectiva) en este caso, por tratarse de un flujo estacionario y paralelo. Entonces, sustituyendo en la ecuación del movi-

miento [34.29] la expresión de ∇^2 en coordenadas cilíndricas y teniendo en cuenta que v es función exclusivamente de r , *i.e.*, $v=v(r)$, tenemos

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad [34.30]$$

que es la ecuación diferencial del movimiento, en la que $(\partial p/\partial x)=\text{cte}$ representa el gradiente de presión en la dirección del flujo. Mediante una primera integración se obtiene

$$r \frac{dv}{dr} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{r^2}{2} + C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dr} = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) r + \frac{C_1}{r} \quad [34.31]$$

e integrando de nuevo

$$v = \frac{1}{4\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad [34.32]$$

Para evaluar la constante C_1 tendremos en cuenta que $\ln r \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow 0$, de modo que la constante C_1 debe ser igual a cero para que la ecuación [34.32] tenga significado físico. Por otra parte, la constante C_2 se determina a partir de la condición de contorno o adherencia del fluido en la pared de la tubería; *i.e.*, cuando $r=D/2$ es $v=0$, de modo que

$$C_2 = - \frac{D^2}{16\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad [34.33]$$

y la distribución o perfil de velocidad vendrá expresado por

$$v = \frac{1}{4\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \left[r^2 - \frac{D^2}{4} \right] \quad [34.34]$$

que corresponde a un perfil de velocidad de forma parabólica, como se ilustra en la Figura 34.10. Podemos interpretar este flujo como si se tratase de un gran número de tubos telescópicos deslizándose cada uno respecto de los dos adyacentes (interno y externo), manifestándose una cierta fuerza de fricción en estos deslizamientos (la viscosidad); el tubo central es el que avanza más rápidamente y el más externo (en contacto con las paredes de la tubería) permanece en reposo.

La distribución de esfuerzos tangenciales puede determinarse fácilmente a partir de la distribución de velocidades; o más directamente a partir de la expresión [34.31], ya que

$$\sigma_{rx} = \eta \frac{dv}{dr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) r \quad [34.35]$$

de modo que crece linealmente con la distancia radial r , presentando un valor máximo justamente sobre la capa fluida en contacto con las paredes de la tubería.

La expresión [34.34] para la distribución de velocidad nos permite determinar el flujo volumétrico o caudal a través de cualquier sección de la tubería. Para ello, consideraremos un elemento de superficie infinitesimal, de forma anular, en la

sección recta de la tubería (zona oscura en la Figura 34.11). cuya área será $dS=2\pi r dr$, a través del cual el fluido fluye con una velocidad $v(r)$; tenemos

$$\mathfrak{C} = \int_S v dS = \frac{\pi}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \int_0^{\frac{D}{2}} \left[r^2 - \frac{D^2}{4} \right] r dr \quad [34.36]$$

o sea
$$\mathfrak{C} = - \frac{\pi D^4}{128\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad [34.37]$$

En un flujo completamente desarrollado, el gradiente de presión longitudinal ($\partial p/\partial x$) es constante; por tanto, podemos escribir

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_2 - p_1}{L} = \frac{\Delta p}{L} = - \frac{\Delta' p}{L} \quad [34.38]$$

siendo $\Delta' p = p_1 - p_2$ la caída de presión en la dirección del flujo. Sustituyendo esta expresión en [34.36] se tiene

$$\mathfrak{C} = \frac{\pi D^4}{128\eta} \frac{\Delta' p}{L} \quad [34.39]$$

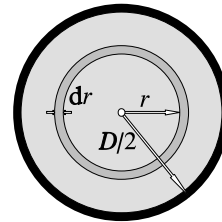


Figura 34.11

expresión que fue descubierta experimentalmente en 1839 por el fisiólogo francés Jean Louis Marie POISEUILLE (1799-1869) y en 1840 por el ingeniero hidráulico alemán Gotthif Heinrich Ludwig HAGEN (1797-1884), independientemente, y es conocida como *ley de Hagen-Poiseuille*. Esta ley establece que el flujo volumétrico o caudal a través de una tubería de un fluido viscoso en régimen laminar ($\mathfrak{R} < 2300$) es inversamente proporcional a la viscosidad del fluido, directamente proporcional a la diferencia de presiones entre los extremos de la tubería y proporcional a la cuarta potencia del diámetro de la misma. Así, por ejemplo, si se duplica el diámetro, el caudal aumenta en un factor 16; lo que es muy de tener en cuenta cuando se diseña una instalación.

Ejemplo III.- Viscosímetro de Ostwald.- La ley de Hagen-Poiseuille nos permite diseñar un *viscosímetro*, relativamente simple pero muy preciso, sin más que medir el caudal a través de un tubo de sección constante y la diferencia de presiones entre sus extremos. En el *viscosímetro de Ostwald*² (Figura 34.12), la diferencia de presiones Δp es de origen hidrostático. Describiremos brevemente el modo de operar.

Se mide el tiempo t que emplea en pasar entre las marcas A y B un volumen de líquido \forall , bajo la diferencia de presiones $\Delta p = \rho gh$ debida al desnivel del líquido entre las dos ramas del viscosímetro, que se mantiene verticalmente. Englobando en un factor de proporcionalidad k todas las magnitudes que son constantes en la expresión [34.39], tenemos

² Wilhelm OSTWALD (1853-1932), físico y químico alemán. Premio Nobel en Química en 1909, por el mérito de sus trabajos sobre catálisis, así como por sus fundamentales investigaciones acerca del equilibrio químico y de la velocidad de reacción.

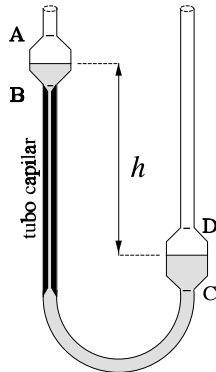


Figura 34.12

$$\forall = k \frac{\rho t}{\eta}$$

El mismo volumen \forall de otro líquido de densidad ρ' y viscosidad η' empleará un tiempo t' en pasar por el capilar y tendremos una expresión análoga a la anterior. Entonces, dividiéndolas miembro a miembro, tendremos

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{\rho' t'}{\rho t} \quad [34.41]$$

de modo que puede determinarse la viscosidad del líquido problema si se conoce la de otro líquido de referencia.

La velocidad media de flujo se determina como el cociente del caudal por el área de la sección recta de la tubería; esto es,

$$V = \frac{\mathfrak{C}}{S} = \frac{\mathfrak{C}}{\pi R^2} = -\frac{D^2}{32\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad [34.42]$$

Para encontrar el punto en que la velocidad es máxima, igualaremos a cero dv/dr y resolveremos para el correspondiente valor de r ; así se obtiene

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) r = 0 \quad [34.43]$$

de modo que

$$\text{para } r=0 \quad \text{es} \quad v_{\text{máx}} = -\frac{D^2}{16\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = 2V \quad [34.44]$$

Resulta interesante expresar el perfil de velocidad en unidades de la velocidad máxima; para ello dividiremos miembro a miembro las expresiones [34.34] y [34.44] y, después de simplificar la expresión resultante, tendremos

$$\frac{v}{v_{\text{máx}}} = 1 - \left(\frac{r}{D/2} \right)^2 \quad [34.45]$$

Todas las expresiones anteriores son válidas para el flujo laminar completamente desarrollado en tuberías. Sin embargo, excepto en el caso de fluidos muy viscosos circulando por tuberías de pequeño diámetro, el flujo en tuberías tiene lugar generalmente en *régimen turbulento*. Como ya hemos indicado anteriormente, la naturaleza del flujo turbulento es tan poco conocida que todavía no se ha establecido una teoría adecuada para analizarlo; por eso es necesario recurrir a la experimentación y elaboración de fórmulas semiempíricas sobre los resultados experimentales obtenidos.

NIKURADSE ha realizado un extenso trabajo experimental acerca de la distribución de velocidades en el flujo turbulento completamente desarrollado en una tubería. En la Figura 34.13 mostramos varias distribuciones de velocidad, obtenidas en esos experimentos, para el caso de una *tubería lisa*; cada perfil de velocidad corresponde a un valor determinado del número de Reynolds. A

fin de poder comparar, en la Figura 34.13 se muestra también el perfil de velocidad correspondiente a un flujo laminar. Obsérvese que los perfiles correspondientes al régimen turbulento presentan una *pendiente más fuerte* cerca de las paredes que el correspondiente al régimen laminar; esto es, aquéllos son más romos o aplanados.

Es posible representar aproximadamente estos perfiles de velocidad mediante una ley empírica de tipo potencial; esto es,

$$\frac{v}{v_{\text{máx}}} = \left(1 - \frac{r}{D/2}\right)^{1/n} \quad [34.46]$$

en la que el exponente varía lentamente con el número de Reynolds, yendo desde $n=6$ hasta $n=10$ para números de Reynolds desde 4000 hasta 3.2×10^6 . El valor $n=7$ se utiliza corrientemente; entonces, la fórmula [34.46] toma el nombre de *principio de la raíz séptima*.

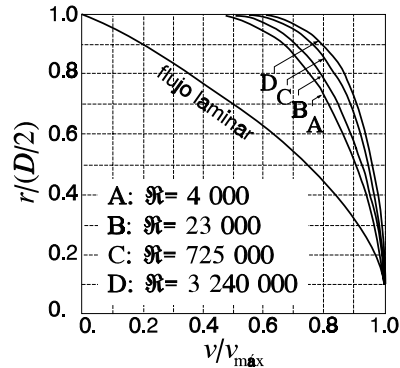


Figura 34.13

§34.5. Ecuación de Bernoulli para el flujo viscoso. Pérdida de carga.-

Como ya hemos visto en el epígrafe §32.8, la ecuación de Bernoulli es esencialmente una formulación del principio de conservación de la energía aplicado a las corrientes fluidas. Aplicaremos ahora este principio de conservación de la energía (Primer Principio de la Termodinámica) a un tubo de corriente (de sección recta infinitesimal y variable) para cualquier flujo viscoso estacionario en el que no se produzca trabajo útil ($w=0$); entonces, la ecuación de Bernoulli puede disponerse en la forma

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2\right) = (u_2 - u_1) - q \quad [34.47]$$

donde u representa la *energía interna específica* (i.e., por unidad de masa) que varía generalmente de un punto a otro del fluido y $-q$ es el *calor transferido* por unidad de masa desde el fluido en el interior del volumen de control (zona oscura en la Figura 34.14) hacia el medio ambiente durante el tránsito de aquél desde la posición 1 a la 2, como se ilustra en la Figura 34.14. Por otra parte, como ya sabemos, el término

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz\right) \quad [34.48]$$

representa el *flujo de energía mecánica específica* a través de una sección determinada del tubo de corriente, de modo que el segundo miembro de la expr. [34.47] es igual a la *pérdida de energía mecánica específica* al pasar el volumen de control desde la posición 1 a la 2. Esto es, se produce una conversión irreversible de energía mecánica en energía interna del fluido ($u_2 - u_1$) y en calor ($-q$) que es transferido al exterior. Las fuerzas de fricción en el flujo

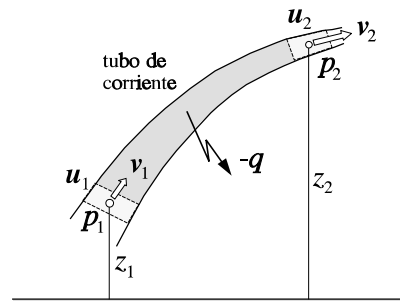


Figura 34.14

Las fuerzas de fricción en el flujo

viscoso son las responsables de esta disipación de energía mecánica, de modo que parte del trabajo realizado por las fuerzas de presión y gravitatorias, y que en el caso de un flujo ideal se manifiesta como un aumento de energía cinética, ahora aparece como energía calorífica. En estas condiciones, la energía mecánica no permanece constante a lo largo de un tubo de corriente, sino que va disminuyendo conforme se evalúa en puntos más avanzados del flujo.

Naturalmente, la energía total se conserva, pero la energía calorífica que aparece a expensas de la energía mecánica que desaparece es de poca aplicación. Esto es así en virtud de que, en las situaciones reales de transporte de fluidos mediante tuberías, cualquier aumento de la energía interna suele perderse en el almacenamiento posterior y de que generalmente resulta antieconómico contribuir a calentar el medio ambiente (la atmósfera). Por eso, resulta conveniente agrupar las "pérdidas de energía" en un solo término, que llamamos *pérdida de carga* y representamos por H_q ; esto es,

$$H_q = (u_2 - u_1) - q \quad [34.49]$$

y la ecuación de Bernoulli para el flujo viscoso se escribe en la forma

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g z_2 \right) = H_q \quad [34.50]$$

Cuando tratamos de extender la relación anterior a un volumen de control que abarque toda la sección recta de una tubería, nos encontramos con que la velocidad no es uniforme en todos los puntos de una misma sección recta; *i.e.*, varía de unos tubos de corriente a otros. El modo correcto de proceder sería utilizar el promedio exacto de energía cinética en cada sección de la tubería; sin embargo, lo que suele hacerse es elegir una velocidad media $V = \bar{C}/S$ que se eleva al cuadrado para formar el término de energía cinética que aparece en la ecuación [34.50]. Puede demostrarse que el error que se comete con esta forma de proceder es despreciable, tanto en el flujo laminar como en el turbulento. Así pues, reescribiremos la ecuación de Bernoulli para el flujo viscoso en una tubería como

$$\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho} \right) + \left(\frac{V_1^2}{2} - \frac{V_2^2}{2} \right) + g (z_1 - z_2) = H_q \quad [34.51]$$

donde V_1 y V_2 representan las velocidades medias de flujo en las secciones respectivas.

Consideremos ahora un flujo viscoso incompresible completamente desarrollado en una tubería recta de sección constante colocada horizontalmente (Figura 34.15). En estas condiciones es $V_1 = V_2$ (condición de continuidad) y $z_1 = z_2$, de modo que al aplicar la ecuación [34.51] tenemos

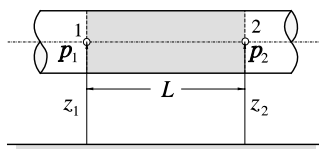


Figura 34.15

$$\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho} \right) = H_q \quad [34.52]$$

Si no existiese fricción en este flujo, no habría caída de presión; en consecuencia, podemos interpretar la *pérdida de carga* (H_ℓ) en este flujo como la *pérdida de carga de presión* ($\Delta'p/\rho$) debida a la fricción.

Consideremos ahora el mismo flujo anterior, pero con la tubería inclinada (Figura 34.16). De nuevo es $V_1=V_2$, pero $z_1 \neq z_2$; de modo que tenemos

$$\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho} \right) = g (z_2 - z_1) + H_\ell \quad [34.53]$$

siendo la diferencia z_2-z_1 la misma para todos los tubos de corriente. Ahora, a la *pérdida de carga de presión* ($\Delta'p/\rho$) contribuye el incremento de altura ($g\Delta z$) además de la *pérdida de carga por fricción* (H_ℓ).

Por último, supongamos que la tubería experimenta un cambio de dirección y otro de sección transversal, como se ilustra en la Figura 34.17. Aplicando la ec. [34.51] se obtiene

$$\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho} \right) = \left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right) + g (z_2 - z_1) + H_\ell \quad [34.54]$$

de modo que la *pérdida de carga de presión* incluye ahora el efecto del cambio de velocidad, además del cambio de altura y de la *pérdida de carga por fricción*. En este ejemplo vemos que la *pérdida de carga* (H_ℓ) tiene lugar en tres tramos bien diferenciados. Las *pérdidas de carga* correspondientes a los tramos L_1 y L_2 son las de mayor cuantía; por eso reciben el nombre de *pérdidas mayores* y las designaremos por $(H_\ell)_1$ y $(H_\ell)_2$, respectivamente. La *pérdida de carga* en el codo de reducción es de menor cuantía; estas *pérdidas* se llaman *pérdidas menores* y se designan por $H_{\ell m}$.

§34.6. Calculo de las pérdidas de carga en tuberías.- La *pérdida de carga total* (H_ℓ) es la suma de las *pérdidas mayores* (H_ℓ) debidas a los efectos de fricción en el flujo totalmente desarrollado en una tubería de sección constante y de las *pérdidas menores* ($H_{\ell m}$) debidas a las transiciones de régimen, entradas, salidas, curvaturas y accesorios en general. Consideraremos por separado ambos casos.

1) PÉRDIDAS MAYORES.- Las *pérdidas mayores* de carga para un flujo en una tubería horizontal es igual a la *pérdida de carga de presión*, como ya hemos visto en el epígrafe anterior [34.52]; esto es,

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{\Delta'p}{\rho} = H_\ell \quad [34.55]$$

La *pérdida de carga* para un flujo en una tubería de sección constante depende exclusivamente del régimen de flujo, ya que representa el montante de energía

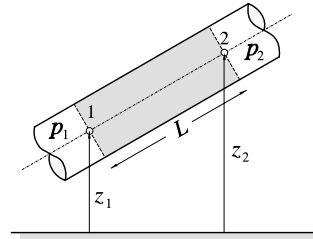


Figura 34.16

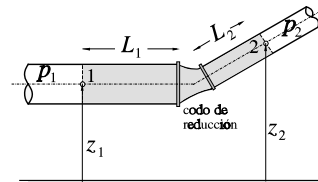


Figura 34.17

mecánica que es convertida en energía térmica. Por consiguiente, la expresión [34.55] para el cálculo de la pérdida de carga también es válida para el flujo en una tubería inclinada.

1.a) Régimen laminar.- En un régimen laminar completamente desarrollado, la caída de presión puede calcularse analíticamente a partir de la expresión [34.39]; esto es,

$$\Delta'p = \frac{128\eta L \mathfrak{C}}{\pi D^4} = \frac{128\eta LV(\pi D^2/4)}{\pi D^4} = 32 \frac{L}{D} \frac{\eta V}{D} \quad [34.56]$$

que sustituida en [34.55] conduce a

$$H_\ell = 32 \frac{L}{D} \frac{\eta V}{\rho D} = \left(\frac{64}{\mathfrak{R}} \right) \frac{L}{D} \frac{V^2}{2} \quad [34.57]$$

expresión en la que hemos hecho aparecer el número de Reynolds.

1.b) Régimen turbulento.- En el régimen de flujo turbulento no podemos evaluar analíticamente la caída de presión y, por tanto, debemos recurrir básicamente a los resultados experimentales. En el régimen turbulento completamente desarrollado en una tubería de sección recta constante, la caída de presión $\Delta'p$ es función de los seis parámetros siguientes: la densidad ρ del fluido, la viscosidad η del mismo, la velocidad media V del flujo, la longitud L de la tubería, el diámetro D de la misma y la rugosidad ε de sus paredes. Esto es,

$$\Delta'p = F(\rho, \eta, V, L, D, \varepsilon) \quad [34.58]$$

Mediante el análisis dimensional, se encuentra que estos seis parámetros se agrupan en cuatro grupos adimensionales, de modo que

$$\frac{\Delta'p}{\rho V^2} = F_2 \left(\frac{\rho V D}{\eta}, \frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D} \right) \quad [34.59]$$

donde reconocemos la presencia del número de Reynolds; así, reescribiremos la expresión anterior en la forma

$$H_\ell = \frac{\Delta'p}{\rho} = \frac{V^2}{2} F_3 \left(\mathfrak{R}, \frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D} \right) \quad [34.60]$$

donde hemos dividido por 2 para hacer aparecer el término de energía cinética ($\rho V^2/2$) y hemos igualado con la expresión [34.55]. Así, el análisis dimensional nos aproxima a la forma de la relación funcional de H_ℓ con los parámetros del flujo; a partir de aquí, es necesario recurrir a la experimentación.

La experimentación pone de manifiesto que la pérdida de carga es directamente proporcional a la longitud L de la tubería, de modo que [34.60] se escribirá como

$$H_\ell = f \left(\mathfrak{R}, \frac{\varepsilon}{D} \right) \frac{L}{D} \frac{V^2}{2} \quad [34.61]$$

Finalmente, a la función desconocida $f=f(\mathfrak{R}, \varepsilon/D)$ se le llama *factor de fricción*, resultando la forma definitiva

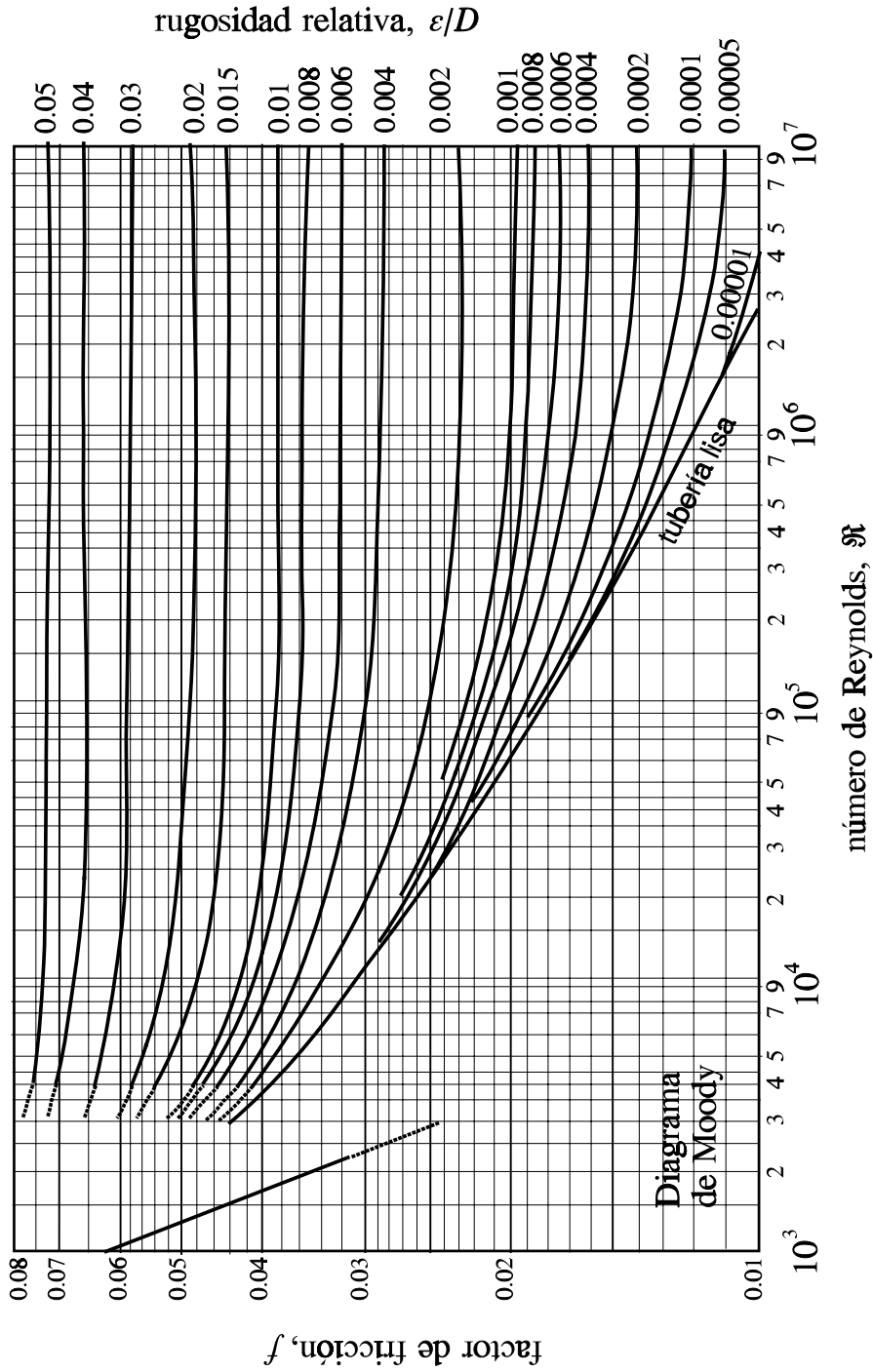

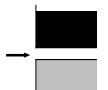
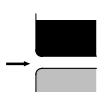
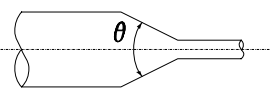
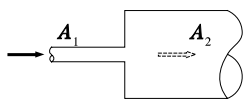
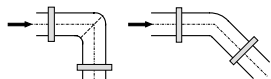


Figura 34.18

Tabla 34.1.- Rugosidad ε de algunas tuberías comerciales.

TIPO DE TUBERÍA	ε (mm)	TIPO DE TUBERÍA	ε (mm)
tubería estirada	0.000 15	madera	0.183 - 0.914
acero comercial o hierro forjado	0.045 72	fundición	0.259
fundición asfaltada	0.122	hormigón	0.305 - 3.05
hierro galvanizado	0.152	acero remachado	0.914 - 9.14

Tabla 34.2.- Pérdidas menores en accesorios comerciales.

Tipo de accesorio		Coeficiente K de pérdidas menores	
Entrada/salida reentrante		0.78	1.0
Entrada/salida angular		0.34	1.0
Entrada/salida bien perfilada		0.04	1.0
Contracción gradual		30.°	0.02
		45.°	0.04
		60.°	0.07
Expansión súbita		$\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$	
Codos 90°/45°		0.90	0.42

$$H_l = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2} \quad [34.62]$$

El factor de fricción es función del número de Reynolds \Re y de la rugosidad relativa ϵ/D de las paredes de la tubería y ha sido determinado experimentalmente para distintos valores de \Re y de ϵ/D . Los resultados, publicados por L.F. MOODY en 1944, se muestran gráficamente en la Figura 34.18.

Para calcular la pérdida de carga H_l para un flujo en unas condiciones conocidas, se comenzará evaluando el número de Reynolds \Re y consultando en las tablas comerciales el valor de la rugosidad relativa ϵ/D de la tubería; en la Tabla 34.1 se indican los valores para algunos materiales de uso corriente. Entonces, el factor de fricción f se determina a partir de la curva apropiada en el gráfico de Moody (Figura 34.18). Finalmente, se calculará el valor de H_l utilizando la expresión [34.62].

Obsérvese que el factor de fricción para el régimen laminar puede obtenerse comparando las expresiones [34.57] y [34.62]; como resulta obvio, tenemos

$$f_{\text{laminar}} = \frac{64}{\Re} \quad [34.63]$$

de modo que el factor de fricción para el régimen laminar es función únicamente del número de Reynolds e independiente de la rugosidad de la tubería, lo que está de acuerdo con los resultados experimentales.

2) PÉRDIDAS MENORES.- En cuanto se refiere a las pérdidas de carga en las entradas y salidas de las tuberías, en los ensanchamientos y contracciones en las mismas, en los codos y en las válvulas, se debe recurrir a la experimentación. Es costumbre expresar tales pérdidas en la forma general

$$H_{\text{mn}} = K \frac{V^2}{2} \quad [34.64]$$

en donde K es el *coeficiente de pérdidas por fricción* para diversos tipos de pérdidas menores que se encuentra tabulado en los manuales especializados. En la Tabla 34.2 indicamos algunos valores aproximados de K .

En algunos casos es preferible expresar las pérdidas menores en la forma

$$H_{\text{mn}} = f \frac{L_{\text{eq}}}{D} \frac{V^2}{2} \quad [34.65]$$

donde L_{eq} es la *longitud equivalente* de una tubería recta. En la Figura 34.19 se representa gráficamente

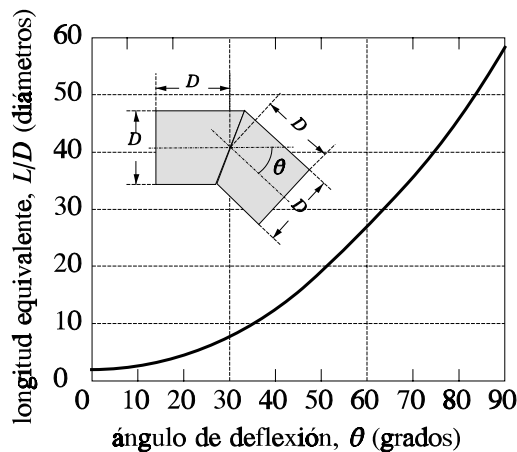


Figura 34.19

la variación de la longitud equivalente para codos (tipo *inglete*) en función del ángulo de deflexión.

Ejemplo IV.- Un depósito de grandes dimensiones desagua por medio de una tubería recta y horizontal, reentrante en el depósito y situada a 7 m por debajo del nivel del agua en el mismo. La tubería puede considerarse hidrodinámicamente lisa, su diámetro es de 12 mm, su longitud de 15 m y descarga directamente a la atmósfera. Con estos datos, determinar el caudal en el desagüe, teniendo en cuenta las pérdidas mayores y menores en la tubería.

Comenzaremos escribiendo la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2. Teniendo en cuenta que $V_1=V_2=V$, $z_1=z_2$ y $p_2=p_a$ (presión atmosférica), tenemos

$$\frac{p_1 - p_a}{\rho} = H_f + H_{\text{mn}} \quad [34.66]$$

donde las pérdidas mayores y menores en la tubería vienen dadas por

$$H_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2} \quad H_{\text{mn}} = K \frac{V^2}{2} \quad [34.67]$$

siendo $K=0.78$ el coeficiente de pérdidas menores correspondiente a la entrada reentrante (*vide* Tabla 34.2).

A continuación, escribiremos la ec. de Bernoulli (sin pérdidas) entre los puntos 0 y 1, a lo largo de una línea de corriente. Puesto que $V_0 \approx 0$, $z_0 - z_1 = h$ y $p_0 = p_a$, tenemos

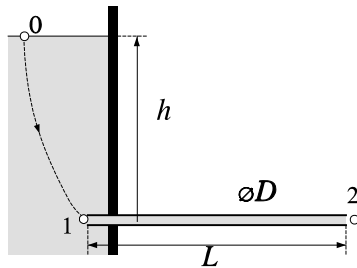


Figura 34.20

$$\frac{p_a - p_1}{\rho} - \frac{V^2}{2} + g h = 0 \quad [34.68]$$

Ahora, eliminando $p_a - p_1$ entre las ecuaciones [34.66] y [34.68], sustituyendo las expresiones [34.67] de las pérdidas y despejando V^2 , tenemos finalmente

$$V^2 = \frac{2gh}{f \frac{L}{D} + K + 1} \quad [34.69]$$

y sustituyendo los valores numéricos de los datos del problema

$$V^2 = \frac{2 \times 9.8 \times 7}{f \frac{15}{0.012} + 0.78 + 1} = \frac{137.2}{1250f + 1.78} \quad [34.70]$$

El coeficiente de fricción f depende del número de Reynolds \Re ; éste depende de la velocidad media V del flujo en la tubería; a su vez, ésta depende del valor del factor de fricción f . Pero resulta que en este problema no conocemos ni f , ni \Re , ni V . Además, como es posible que el flujo sea turbulento, no existirá una relación analítica entre f y \Re , de modo que tendremos que acudir a la consulta de los gráficos de Moody y llevar a cabo un proceso reiterativo de cálculo para resolver el problema por aproximaciones sucesivas. Teniendo en cuenta la densidad y la viscosidad del agua ($\rho=1000 \text{ kg/m}^3$, $\eta=1.002 \text{ cP}=1.002 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$), el número de Reynolds viene dado por

$$\Re = \frac{\rho D V}{\eta} = \frac{1000 \times 0.012}{1.002 \times 10^{-3}} V = 11976 V \quad [34.71]$$

Tabla 34.3

V (supuesto)	\Re	f	V (calculado)
12.00 m/s	$1.44 \cdot 10^5$	0.0167	2.46 m/s
2.46	$7.25 \cdot 10^4$	0.0195	2.29
2.29	$2.74 \cdot 10^4$	0.0238	2.09
2.09	$2.50 \cdot 10^4$	0.0245	2.06
2.06	$2.47 \cdot 10^4$	0.0247	2.05

Comenzaremos suponiendo un valor de V (v.g., $v = \sqrt{2gh} \approx 12$ m/s) y calcularemos el valor correspondiente de \Re . Con este valor de \Re determinaremos el valor de f (gráficos de Moody). Entonces, calcularemos el nuevo valor de V hasta que no exista diferencia apreciable entre los valores de V supuesto y calculado. En la Tabla 34.3 se muestran los resultados. Como vemos, el proceso converge rápidamente y podemos tomar como solución correcta $V=2.05$ m/s, con todas sus cifras exactas. De este modo, el caudal será

$$Q = V \times \pi \frac{D^2}{4} = 2.32 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = 13.9 \text{ l/min}$$

§34.7. Flujo externo.- Flujo externo es el de un fluido sobre o alrededor de un objeto, como el que tiene lugar cuando un fluido fluye sobre una superficie o alrededor de un cuerpo sumergido en su seno.

Al principio de esta lección, hemos utilizado el flujo incompresible sobre una lámina plana semiinfinita como paradigma para establecer una descripción cualitativa de algunas de las características más conspicuas del flujo viscoso sobre un contorno sólido; esto es, la presencia de una *capa límite* y la aparición de una *región separada* del flujo. Ahora vamos a considerar una situación algo más compleja, correspondiente al flujo incompresible y estacionario alrededor de un cilindro de longitud infinita.

Comenzaremos imaginando un *flujo ideal* (i.e., no viscoso) alrededor de un cilindro. El mapa de líneas de corriente correspondiente a una sección transversal del cilindro se muestra en la Figura 34.21. Se observará que el flujo es simétrico con respecto a ambos ejes x e y .

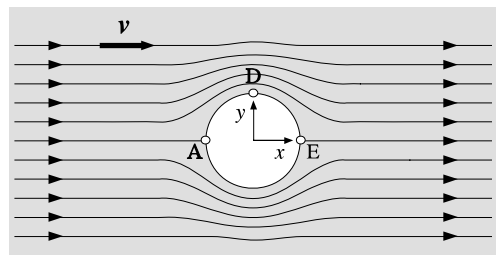


Figura 34.21

En los puntos A y E, en los que las líneas de corriente se bifurcan, la velocidad de las partículas fluidas es muy pequeña; estos puntos son llamados *puntos de estancamiento o de remanso*. Por el contrario, en el punto D, en donde las líneas de corriente están muy apretadas, la velocidad del flujo es máxima. Así pues, la velocidad de flujo alrededor del cilindro aumenta a partir del punto A hasta

alcanzar un valor máximo en D y luego disminuye conforme se sobrepasa el cilindro. De acuerdo con el teorema de Bernoulli para el flujo ideal, un incremento de velocidad está asociado a una disminución de presión e inversamente. En consecuencia, la presión sobre la superficie del cilindro decrece conforme nos movemos desde el punto A hacia el punto D, alcanza un valor mínimo en D y aumenta a partir del punto D hacia el E. Puesto que el flujo es simétrico respecto de ambos ejes x e y , la distribución de presiones también lo es.

Puesto que en un flujo no viscoso no existen esfuerzos tangenciales, las fuerzas debidas a la presión son las únicas que deberemos considerar para determinar la fuerza neta que actúa sobre la superficie del cilindro. Entonces, en virtud de la simetría de la distribución de presiones sobre la superficie del cilindro, llegamos a la conclusión de que no existe fuerza neta sobre el cilindro, ni en la dirección del eje x , ni en la del eje y . La fuerza neta en la dirección del eje x recibe el nombre de *arrastre*. Así, en el caso de un flujo no viscoso alrededor de un cilindro, el arrastre es nulo; esta conclusión es contraria a la experiencia, por la que sabemos que todos los cuerpos sufren algún arrastre cuando son colocados en un flujo real. La razón de este desacuerdo, llamado *paradoja de D'ALEMBERT*, radica evidentemente en el hecho de haber despreciado los efectos viscosos en todo el dominio completo del flujo. Los efectos viscosos en una delgada región adyacente al contorno sólido (*capa límite*) son de primordial importancia en la evaluación del flujo.

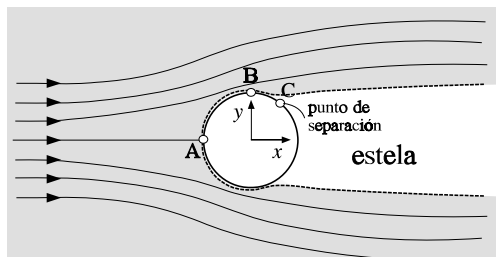


Figura 34.22

Consideremos ahora un *flujo real* (i.e., viscoso) alrededor de un cilindro. El correspondiente mapa de líneas de corriente se muestra en la Figura 34.22, en la que también se ha indicado la presencia de la capa límite.

Puesto que el espesor de la capa límite es muy pequeño, podemos suponer razonablemente que las distribuciones de velocidad y

presión fuera de la capa límite sean cualitativamente las mismas que en el caso de un flujo no viscoso. Por tanto, entre el punto de estancamiento A y el punto B existe una caída de presión o *gradiente de presión favorable*, bajo cuya influencia las partículas fluidas contenidas en la capa límite resultan aceleradas en su movimiento hacia B, de modo que se neutraliza parcialmente el efecto de frenado producido por la adherencia con la superficie del cilindro. Así pues, gracias a dicho gradiente de presión favorable, las líneas de corriente pueden subsistir y el espesor de la capa límite se incrementa lentamente.

Por el contrario, entre el punto B y la parte posterior del cilindro existe un *gradiente de presión adverso*, que tiende a retrasar el movimiento de las partículas fluidas que se mueven en la capa límite en esta región; a esta acción se suma la adherencia del fluido a la superficie del cilindro. En consecuencia, en algún punto sobre la superficie del cilindro, la cantidad de movimiento del fluido en la capa límite resulta ser insuficiente para hacer avanzar las partículas fluidas en contra del gradiente de presión adverso. Entonces, la capa fluida adyacente a la superficie del cilindro alcanzará el reposo y se producirá una *separación del flujo* respecto a la

superficie del fluido; el punto C donde ocurre eso es el llamado *punto de separación*. Como consecuencia de la separación del flujo, se origina una zona de presión relativamente baja detrás del cilindro; esta región recibe el nombre de *estela*, que al igual que la capa límite puede ser laminar o turbulenta. De este modo aparece una fuerza neta, debida a la presión que ejerce el flujo sobre la superficie del cilindro, en la dirección del flujo, que es el arrastre. Cuanto mayor sea la estela detrás del cuerpo, mayor será el arrastre sobre el mismo.

§34.8. Arrastre y sustentación.- Siempre que existe un movimiento relativo entre un cuerpo sólido y un fluido en el que está sumergido, el cuerpo sólido se encuentra sometido a una fuerza neta \mathbf{F} debida a la acción del fluido sobre la superficie de aquél. En general, la fuerza infinitesimal $d\mathbf{F}$ que actúa sobre un elemento de superficie dS del cuerpo sólido no es ni tangencial, ni perpendicular a dicho elemento. Esto se comprende fácilmente cuando se considera la naturaleza de los esfuerzos que actúan sobre la superficie del cuerpo:

- a) **esfuerzos tangenciales** de naturaleza puramente viscosa, debidos a la adherencia de la capa límite sobre la superficie del cuerpo;
- b) **esfuerzos normales**, debidos a la presión que ejerce el fluido sobre la superficie del cuerpo. La fuerza neta resultante vendrá dada por

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F}_{\text{visc}} + \int d\mathbf{F}_{\text{presión}} \quad [34.72]$$

Esta fuerza resultante puede ser descompuesta en dos componentes: una componente paralela a la dirección del movimiento relativo entre el cuerpo y el fluido no perturbado (lejos del cuerpo) y otra componente en dirección perpendicular a la anterior; estas dos componentes de la fuerza neta resultante reciben los nombres de *arrastre* y *sustentación*, respectivamente.

Puesto que

$$d\mathbf{F}_{\text{visc}} = (\eta \nabla^2 \mathbf{v}) dV \quad d\mathbf{F}_{\text{presión}} = -p dS \quad [34.73]$$

pudiéramos estar inclinados a pensar que siempre sea posible evaluar analíticamente la fuerza neta sobre la superficie de un cuerpo sumergido en movimiento relativo en el seno de un fluido (al menos, en principio, aparte de las complicaciones de cálculo que puedan surgir). Sin embargo, no es así. Como ya hemos visto en el epígrafe anterior, la presencia de un gradiente de presión adverso conduce frecuentemente a la separación del flujo, lo que impide la determinación analítica de la fuerza resultante sobre el cuerpo. En consecuencia, en la mayor parte de los problemas de interés, se debe recurrir a la determinación experimental de unos coeficientes adecuados para el cálculo posterior del arrastre y de la sustentación en situaciones concretas.

§34.9. Arrastre.- Ya hemos definido el arrastre como la componente de la fuerza ejercida sobre la superficie de un cuerpo en movimiento relativo en el seno de un fluido en la dirección de la corriente libre. La fuerza de arrastre tiene su origen en los esfuerzos tangenciales y normales que ejerce el flujo sobre la superficie del cuerpo.

El arrastre debido a los esfuerzos tangenciales, de naturaleza puramente viscosa, sobre la superficie de un cuerpo se denomina *arrastre de fricción o viscoso*. Este tipo de arrastre es muy importante en aquellos casos en los que el área superficial paralela al flujo es grande en comparación con el área proyectada normal al flujo. Así, por ejemplo, el arrastre sobre una lámina plana paralela a la dirección del flujo es esencialmente un arrastre de fricción o viscoso.

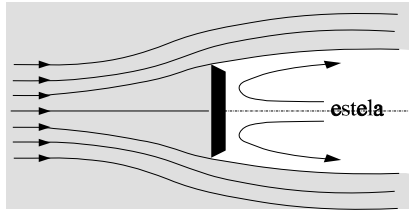


Figura 34.23

El arrastre debido a los esfuerzos normales recibe el nombre de *arrastre de presión*. Este tipo de arrastre suele ser dominante en aquellos casos en los que el área proyectada en la dirección normal al flujo es grande en comparación con el área superficial paralela al flujo; *i.e.*, para cuerpos escarpados. En estas condiciones, incluso para cuerpos simétricos, la presencia de un gradiente de presión adverso posibilita la separación del flujo respecto de la superficie del cuerpo, lo que da lugar a la aparición de una estela detrás del cuerpo y, en consecuencia, a una asimetría en la distribución de presiones sobre la superficie del mismo; esta asimetría es la causa inmediata del arrastre de presión. Así, en el caso de una lámina plana normal al flujo (*i.e.*, un disco, como se ilustra en la Figura 34.23), el arrastre es esencialmente un arrastre de presión. Para esta geometría, la separación del flujo se origina desde el mismo borde de la lámina y en la estela de baja energía detrás del cuerpo se produce una inversión del flujo.

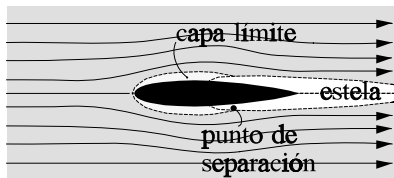


Figura 34.24

Para reducir el arrastre de presión es necesario disminuir la magnitud del gradiente adverso de presión sobre la superficie trasera del cuerpo, a fin de retrasar, e incluso impedir, la separación del flujo y la formación de la estela. Para ello, el cuerpo deberá afilarse gradualmente en su parte posterior, como se ilustra en la Figura 34.24, dotándolo de un *perfil fusiforme o perfil aerodinámico*. Sin embargo, si el perfil fusiforme es muy alargado, la disminución del arrastre de presión puede ser compensado sobradamente por un aumento del arrastre de fricción. En consecuencia, el diseño de un perfil aerodinámico implica un compromiso entre los arrastres de fricción y de presión que minimice el arrastre total sobre el perfil.

El arrastre que experimenta un cuerpo en el seno de un flujo resulta muy difícil de determinar analíticamente, ya que depende de factores tales como la transición del régimen laminar al turbulento en la capa límite y de la separación de ésta respecto de la superficie del cuerpo, por citar solamente dos dificultades. Por eso es necesario recurrir básicamente a la adquisición de datos experimentales y, con esta finalidad, es costumbre expresar el arrastre en la forma

$$F_D = C_D \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) A \quad [34.74]$$

donde V es la velocidad relativa del cuerpo en el fluido (o la velocidad de corriente libre, en el caso de un cuerpo estacionario en un flujo), A es el área característica (que es generalmente el área de la sección transversal máxima que el cuerpo ofrece al flujo), ρ es la densidad del fluido y C_D es un parámetro empírico adimensional que recibe el nombre de *coeficiente de arrastre*, cuyo valor depende de la forma del cuerpo y de la orientación del mismo respecto al flujo, así como del valor del número de Reynolds asociado al flujo alrededor del cuerpo. En la Tabla 34.4 presentamos algunos valores característicos del coeficiente de arrastre total para varios cuerpos de diferentes formas.

Para analizar, aunque sólo sea cualitativamente, ciertas características sobresalientes del coeficiente de arrastre, vamos a considerar el caso de una esfera que se mueve en el seno de un fluido. En este caso, al arrastre total contribuyen el arrastre de fricción y el arrastre de presión. En la Figura 34.25 hemos representado gráficamente la dependencia del coeficiente de arrastre C_D con el número de Reynolds \Re . Como podemos apreciar, el coeficiente de arrastre varía de una forma complicada, lo que nos pone sobre aviso de que algo interesante y complicado ocurre en el flujo.

Para valores bajos del número de Reynolds ($\Re < 1$) no se produce separación del flujo; en estas condiciones, sólo existe arrastre de fricción o viscoso sobre la esfera. La resolución de la ecuación de Navier-Stokes para el flujo incompresible alrededor de la esfera, despreciando las fuerzas inerciales frente a las fuerzas viscosas, conduce a la expresión

$$F_D = 3\pi\eta DV \quad [34.75]$$

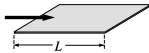
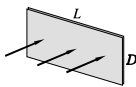

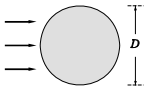

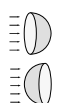
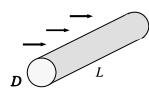
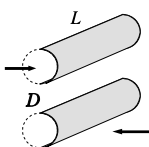
que fue deducida en 1845 por el físico irlandés Sir George STOKES (1819-1903) y que, en su honor, es conocida como *ley de Stokes*. Esta ley establece que la fuerza de arrastre que experimenta la esfera, cuando $\Re = \rho DV/\eta < 1$, es proporcional a la viscosidad del fluido, al diámetro de la esfera y a la velocidad relativa de la misma en el seno del fluido. La fórmula [34.75] tiene numerosas aplicaciones; por ejemplo, se la utiliza en la *experiencia de MILLIKAN*³ para la determinación de la carga eléctrica del electrón y en la medida del coeficiente de viscosidad de líquidos muy viscosos. Teniendo en cuenta la definición [34.74] del coeficiente de arrastre, puede comprobarse fácilmente que

$$C_D = \frac{24}{\Re} \quad \text{para } \Re < 1 \quad [34.76]$$

para el caso de una esfera, lo que concuerda excelentemente con los resultados experimentales, como puede observarse en la Figura 34.25.

³ *Prácticas de Laboratorio de Física General*; del mismo autor.
Práct. 14.- *Viscosidad (método de Stokes)*.
Práct. 24.- *Experiencia de Millikan*.

Tabla 34.4.- Coeficientes de arrastre (fricción + presión).

OBJETO	DIAGRAMA	C_D	\Re	longitud y área características	
placa plana (tangencial)		$1.33/\Re^{0.5}$ $0.074/\Re^{0.2}$	laminar $< 10^7$	L	área superficial de la placa
placa plana (normal)		L/D 1 1.18 5 1.20 10 1.30 20 1.50 30 1.60 ∞ 1.95	$> 10^3$	D	área superficial de la placa
disco circular		1.17	$> 10^3$	D	área del disco
esfera		$24/\Re$ 0.47 0.20	< 1 $10^3 - 3 \cdot 10^5$ $> 3 \cdot 10^5$	D	área proyectada
hemisferio macizo		1.17 0.42	$10^4 - 10^6$ $10^4 - 10^6$	D	área proyectada
hemisferio hueco		1.42 0.38	$10^4 - 10^6$ $10^4 - 10^6$	D	área proyectada
cilindro circular		1 0.63 5 0.80 10 0.83 20 0.93 30 1.00 ∞ 1.20	$10^3 - 10^5$	D	área proyectada
sección en C		∞ 2.30 ∞ 1.20	$> 10^3$ $> 10^3$	D	área proyectada

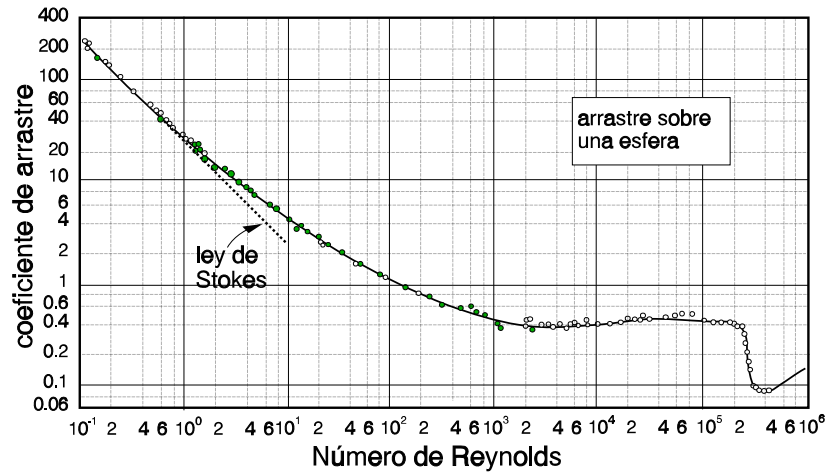


Figura 34.25

A medida que se aumenta el valor del número de Reynolds, hasta aproximadamente $\mathfrak{R} \approx 1000$, el coeficiente de arrastre decrece continuamente, pero mucho más lentamente de lo que predice la ley de Stokes. Esto es así como consecuencia de la separación del flujo respecto de la superficie de la esfera, lo que da lugar a la formación de vórtices o remolinos turbulentos detrás de la esfera; dichos remolinos poseen una energía cinética de rotación que toman de la energía cinética de la esfera, que de este modo se verá disminuida. Esos remolinos originan una *estela turbulenta* detrás de la esfera al ser arrastrados por la corriente. Así pues, en estas condiciones, el arrastre total sobre la esfera resulta ser la combinación del arrastre de fricción y del arrastre de presión. La contribución del arrastre de fricción al arrastre total disminuye cuando aumenta el número de Reynolds; así, para $\mathfrak{R} \approx 1000$, el arrastre de fricción representa aproximadamente el 5% del arrastre total.

En el intervalo $10^3 < \mathfrak{R} < 2 \times 10^5$, el coeficiente de arrastre permanece prácticamente constante. Para un valor de $\mathfrak{R} \approx 2 \times 10^5$, el coeficiente de arrastre experimenta una disminución brusca, cuya explicación cualitativa radica en la transición que se produce desde el régimen laminar al turbulento en la capa límite. La *capa límite turbulenta* puede penetrar más en el gradiente adverso de presión en la parte posterior de la esfera, de modo que la separación del flujo se retrasa bruscamente a una

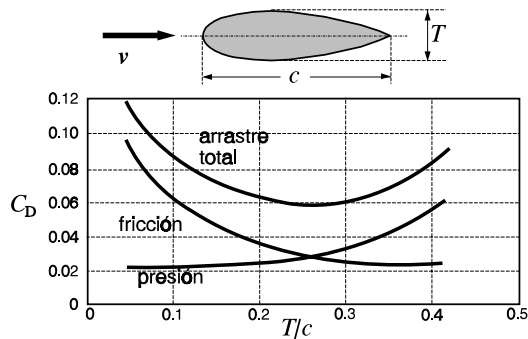


Figura 34.26

posición más posterior sobre la superficie de la esfera; en consecuencia, el espesor de la estela y el arrastre disminuyen notablemente. Para $\mathfrak{R} > 4 \times 10^5$, el valor del coeficiente de arrastre aumenta en forma irregular con el número de Reynolds.

El gradiente de presión a lo largo de un perfil fusiforme o aerodinámico es menos severo que el correspondiente a una esfera o a un cilindro de la misma área proyectada. Las contribuciones del arrastre de fricción y del arrastre de presión al arrastre total sobre un perfil fusiforme y para $\mathfrak{R} \approx 10^5$ se exhiben en la Figura 34.26, en función del cociente T/c entre las dimensiones del perfil; el valor mínimo $C_D \geq 0.06$ se alcanza para $T/c \approx 0.25$.

§34.10. Sustentación. Efecto Magnus.- Hemos definido la sustentación como la componente de la fuerza ejercida sobre la superficie de un cuerpo en movimiento relativo en el seno de un fluido en dirección perpendicular a la de la corriente libre. Al igual que la fuerza de arrastre, la fuerza de sustentación tiene su origen en los esfuerzos tangenciales y normales que ejerce el flujo sobre la superficie del cuerpo; sin embargo, en la mayor parte de los problemas de interés práctico, tan sólo los esfuerzos normales contribuyen a la sustentación.

No debemos confundir la *sustentación estática* o empuje de Arquímedes que actúa sobre todo cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido, con la *sustentación dinámica* a la que ahora nos referimos. La *sustentación estática* resulta del hecho de que la presión estática en el seno de un fluido varía con la profundidad, de forma que es menor sobre la superficie superior de un cuerpo sumergido que sobre la inferior, de modo que el resultado es un empuje neto hacia arriba igual al peso del fluido desalojado por el cuerpo. En cambio, la *sustentación dinámica* se debe a una causa completamente diferente, que se explica fácilmente a partir de las leyes de la Dinámica de los Fluidos, como veremos a continuación.

Cuando el flujo alrededor de un cuerpo que se mueve a través de un fluido es simétrico respecto de la dirección del flujo, no se ejerce sustentación dinámica sobre el cuerpo. Por el contrario, si el flujo no es simétrico respecto de dicha dirección, entonces aparece una fuerza neta sobre el cuerpo en la dirección perpendicular a la de la corriente libre; esta fuerza es la denominada *sustentación dinámica*.

Así, por ejemplo, si el flujo alrededor de un cuerpo es tal que la velocidad del fluido que pasa por encima del cuerpo es mayor que la del que pasa por debajo de él, entonces, de acuerdo con el teorema de Bernoulli, la presión sobre la superficie superior será menor que la que actúa sobre la superficie inferior, de modo que resultará una fuerza neta hacia arriba actuando sobre el cuerpo.

Resulta un flujo asimétrico alrededor de un cuerpo si al flujo simétrico inicial se le superpone un *flujo de circulación*. Un *flujo de circulación* es aquél que rodea al cuerpo y cuyas líneas de corriente son cerradas, estando caracterizado por la *circulación* Γ del campo de velocidades a lo largo de una tal línea de corriente. Un flujo de circulación particularmente interesante es el llamado *flujo de vórtice irrotacional* (vide §31.11c), cuya circulación Γ tiene el mismo valor a lo largo de todas las líneas de corriente.

En la Figura 34.27a hemos representado las líneas de corriente alrededor de un cilindro en reposo en el seno de un fluido que se mueve de izquierda a derecha; los puntos **1** y **2** son puntos de estancamiento y, por razones de simetría, la circulación

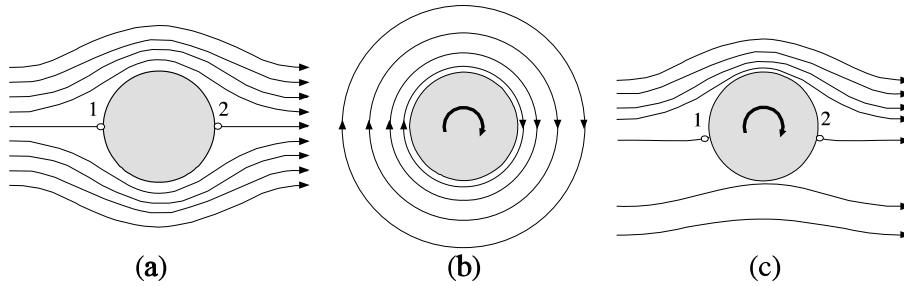


Figura 34.27

Γ es nula alrededor del cilindro. En la Figura 34.27b mostramos las líneas de corriente para un flujo de circulación alrededor del mismo cilindro; ahora, la circulación a lo largo de una línea de corriente, alrededor del cilindro, vale $\Gamma=2\pi r v$.

Si los dos flujos anteriores existen simultáneamente, el campo de velocidades resultante será la suma vectorial de los campos de velocidades correspondientes a los dos flujos superpuestos. De acuerdo con la Figura 34.27, en los puntos situados por encima del eje del cilindro, las velocidades se "suman"; en los situados por debajo, se "restan". El resultado de la superposición de ambos flujos se ilustra en la Figura 34.27c mediante el correspondiente mapa de líneas de corriente. Debemos observar que los puntos de estancamiento se han desplazado hacia la parte inferior del cilindro y que la velocidad del fluido que pasa por encima del cilindro es mayor que la del que pasa por debajo.

En consecuencia, de acuerdo con el teorema de Bernoulli, la presión sobre la superficie superior del cilindro es mayor que la que actúa sobre la superficie inferior del mismo, dando como resultado una fuerza neta de sustentación dinámica dirigida hacia arriba. Puede demostrarse (aunque escapa de los objetivos de las posibilidades de este curso) que el valor de esta fuerza de sustentación por unidad de longitud del cilindro viene dada por

$$\frac{F_L}{L} = \rho V \Gamma \tag{34.77}$$

que es la *fórmula de KUTTA y JOUKOWSKI*, en la que ρ es la densidad del fluido, V es la velocidad de corriente libre y Γ es la circulación alrededor del cilindro.

Podemos crear un flujo de circulación alrededor de un cilindro haciéndolo girar alrededor de su eje. Entonces, como consecuencia de la viscosidad del fluido, se establece un flujo de circulación alrededor del cilindro, ya que éste arrastra a la capa límite que lo impregna, y ésta a las capas sucesivas de fluido. Si el cilindro gira en el seno de un flujo uniforme, al producirse la superposición de ambos flujos se origina una forma de flujo similar a la de la Figura 34.27c. La fuerza transversal sobre un cilindro giratorio en el seno de una corriente fluida se conoce con la denominación de *efecto Magnus*. Como es obvio, la misma fuerza transversal aparece cuando un cilindro rotatorio se traslada en el seno de un fluido en reposo.

Naturalmente, el *efecto Magnus* no queda restringido a cuerpos de forma cilíndrica. Las pelotas de tenis "cortadas" o los balones de fútbol con "efecto" no describen trayectorias contenidas en un plano vertical, como sería de esperar, sino que se desvían hacia la derecha o hacia la izquierda, porque al lanzarlos se les imprimió un rápido movimiento de rotación de eje aproximadamente vertical, de modo que están sometidos a una fuerza desviadora perpendicular a la velocidad de traslación y al eje de rotación.

El efecto Magnus tiene importancia práctica en el movimiento de avance de los proyectiles dotados de movimiento de rotación. También se ha intentado aprovecharlo para impulsar embarcaciones en las que se sustituye la vela por un cilindro de grandes dimensiones que se hace girar mediante un pequeño motor (*barco de Flettner*).

§34.11. Sustentación de un perfil aerodinámico.- Resulta factible establecer un flujo de circulación alrededor de un objeto situado en una corriente fluida, aunque el objeto no gire, siempre que tenga una forma adecuada. Este es el caso del ala de un avión, de la que nos ocuparemos en este epígrafe.

Si la sección transversal del ala, o *plano de sustentación*, fuese simétrica respecto a la dirección de avance (Figura 34.28a), la distribución de líneas de corriente también sería simétrica y no habría sustentación. Como ya hemos visto en el epígrafe anterior, la sustentación se origina como consecuencia de una asimetría de las líneas de corriente, lo que puede conseguirse colocando el ala en posición oblicua respecto de la dirección de avance (Figura 34.28b) o dando al perfil del ala una forma asimétrica (Figura 34.28c). En estas condiciones, la velocidad de flujo sobre la superficie superior del ala resulta aumentada, en tanto que resulta disminuida por debajo del ala, lo que origina una sustentación dinámica, ya que la presión que actúa sobre la superficie superior del ala es menor que la que actúa sobre la superficie inferior de la misma.

Podemos imaginar el flujo alrededor del perfil como la superposición de un flujo potencial y de otro de circulación, siendo la sustentación proporcional a la circulación Γ de este último. En efecto, a causa de la asimetría del ala (en particular, en el borde de la cola) y de las fuerzas viscosas combinadas con los gradientes adversos de presión en la parte posterior del perfil, se forma un remolino (*remolino de arranque*) detrás del ala, como se ilustra en la Figura 34.29a. La conservación del momento angular total exige que en el seno del fluido se origine otro remolino cuyo momento angular sea igual y opuesto al del remolino de arranque, como se indica en la Figura 34.29b. El remolino de arranque, apenas formado, se desprende del borde de cola y es arrastrado por la corriente. De este modo, queda un flujo de circulación alrededor del ala, que se superpone al flujo potencial primitivo (como ocurriría en el caso del cilindro giratorio) para originar una distribución de líneas de corriente como la que se muestra en la Figura 34.28c.

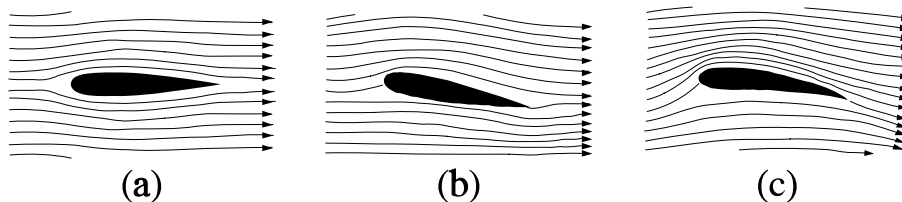


Figura 34.28

Obsérvese que el flujo alrededor del ala de avión no da lugar a una "tracción" sobre la superficie superior del ala, lo que, por supuesto, no es posible. El fluido presiona sobre toda la superficie del ala, si bien presiona con mayor intensidad sobre la superficie inferior que sobre la superior, lo que da lugar a la sustentación dinámica del ala.

A efectos prácticos, resulta conveniente expresar la fuerza de sustentación dinámica en la forma

$$F_L = C_L \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) A_L \quad [34.78]$$

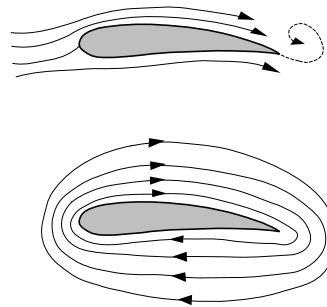


Figura 34.29

donde V es la velocidad de corriente libre, A_L es el área de sustentación (*i.e.*, el área máxima proyectada del perfil aerodinámico), ρ es la densidad del fluido y C_L es un parámetro empírico adimensional que recibe el nombre de *coeficiente de sustentación*.

El valor del coeficiente de sustentación C_L para un perfil aerodinámico dado es función del número de Reynolds \mathfrak{R} y del *ángulo de ataque* α , definido este último como el ángulo formado por la *cuerda* del perfil y la dirección de corriente libre, como se indica en la Figura 34.30. Conforme aumenta el ángulo de ataque, el coeficiente

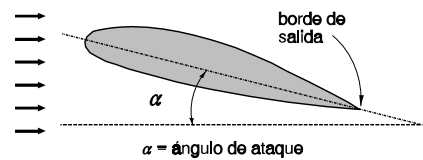


Figura 34.30

de sustentación aumenta gradualmente hasta que alcanza un valor máximo; a partir de entonces, un aumento del ángulo de ataque produce una disminución súbita en el valor del coeficiente de sustentación; en estas condiciones, se dice que el ala *pierde velocidad* y se compromete la seguridad del vuelo del avión. La pérdida de velocidad es el resultado de la separación del flujo que se produce sobre la mayor parte de la superficie superior del ala para grandes ángulos de ataque.

No puede aparecer una fuerza de sustentación F_L sobre un ala sin que simultáneamente aparezca una fuerza de resistencia al avance o fuerza de arrastre F_D , ya que las causas de ambas (circulación y remolinos) están estrechamente relacionadas. En la Figura 34.31 mostramos la variación de los coeficientes de sustentación y de arrastre para un perfil de ala típico en función del ángulo de ataque. El problema técnico que se plantea es el de determinar el perfil del ala de tal forma que el cociente F_L/F_D sea máximo; puede demostrarse que este cociente es

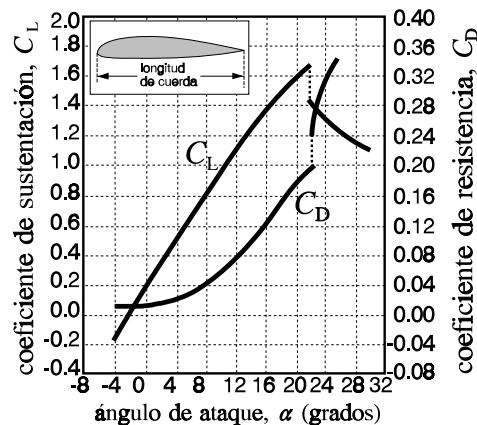


Figura 34.31

tanto mayor cuanto mayor es el cociente l/c entre la envergadura y la cuerda del ala (v.g., en los planeadores).

Se utilizan frecuentemente los *diagramas polares de LILIENTHAL*, en los que se representan C_L frente a C_D para un perfil aerodinámico dado. Uno de tales diagramas polares se muestra en la Figura 34.32. Sobre estos diagramas se puede determinar gráficamente el ángulo de ataque óptimo que proporciona un valor máximo del cociente F_L/F_D para un perfil de ala dado. La tangente a la curva de Lilienthal, trazada desde el origen, corresponde a un cociente C_L/C_D máximo y el punto de contacto permite determinar el valor del ángulo de ataque óptimo.

Como acabamos de ver, el diseño de las alas de los aviones debe ajustarse para bajos coeficientes de arrastre a fin de obtener un rendimiento aceptable durante el vuelo a la velocidad de crucero. Sin embargo, puesto que el coeficiente de sustentación es relativamente bajo en esas condiciones, es necesario completar el diseño del ala para proporcionar un mayor coeficiente de sustentación durante las operaciones de despegue y de aterrizaje, cuando la velocidad del avión es relativamente baja. Para ello, se utiliza fundamentalmente la técnica de variar la geometría del ala cuando se requiera una mayor sustentación, haciendo girar la sección posterior del ala, llamada *alerón*, respecto de un eje transversal.

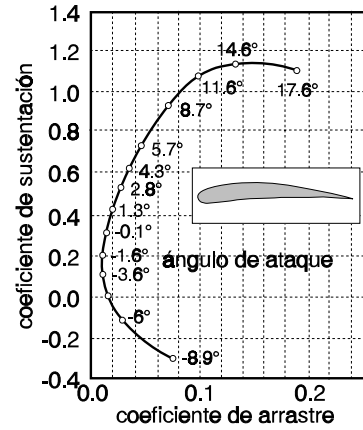


Figura 34.32

Problemas

34.1.- Supongamos que un flujo laminar sobre una placa plana venga representado por el siguiente campo de velocidades:

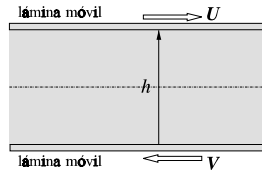
$$\begin{cases} v = V_{\infty} \frac{y}{\delta} & \text{para } 0 \leq y \leq \delta \\ v = V_{\infty} & \text{para } y > \delta \end{cases}$$

donde δ es el espesor de la capa límite, que crece en función de la distancia al borde de ataque de acuerdo con la expresión $\delta = a\sqrt{x}$

y donde y es la distancia perpendicular a la placa. Encontrar la expresión de la fuerza de arrastre que el flujo ejerce sobre la placa, en función de las dimensiones de ésta.

34.2.- Un sistema hidráulico opera a una presión manométrica de 200 atm y 55 °C de temperatura. El fluido es aceite SAE-10 ($\rho=0.88 \text{ g/cm}^3$, $\eta=10 \text{ cP}$ a 55 °C). Una válvula de control del sistema consiste en un pistón de 2.54 cm de diámetro y 1.27 cm de largo, ajustado a un cilindro con una holgura media de 5 μm . Determinar la pérdida de aceite (en cm^3/min) a través de la válvula si la

presión manométrica sobre la cara de baja presión del pistón es de 12 atm.



Prob. 34.3

34.3.- Consideremos un flujo laminar completamente desarrollado de un fluido viscoso entre dos grandes placas planas y paralelas entre sí, ambas móviles, en sentidos opuestos, con velocidades respectivas U y V . **a)** Determinar el campo de velocidades entre las dos placas. **b)** Determinar el esfuerzo tangencial sobre cada una de las placas. **c)** Encontrar la expresión del flujo.

34.4.- Un líquido viscoso e incompresible fluye en régimen estacionario y laminar sobre una pared vertical. El espesor δ de la película de fluido sobre la pared es constante. Puesto que la superficie libre del fluido está expuesta a la presión atmosférica, no existe gradiente de presión, de modo que el descenso del fluido se debe exclusivamente a la gravedad. **a)** Determinar la distribución de velocidades en la película fluida. **b)** Encontrar una expresión para el caudal.

34.5.- Repetir el Problema 34.4 para el caso de una película fluida de espesor constante que desliza sobre un plano inclinado de ángulo θ sobre la horizontal.

34.6.- Una película de glicerina pura a $20\text{ }^\circ\text{C}$, de 1.5 mm de espesor, se desliza por un plano inclinado 30° respecto a la horizontal. **a)** Calcular el caudal por unidad de anchura de la película. **b)** Calcular la velocidad de la capa de glicerina en contacto con el aire. **c)** Determinar el valor de la velocidad media del flujo.

34.7.- Determinar la distribución de velocidades, el caudal y la pérdida de carga por unidad de longitud para un flujo laminar completamente desarrollado en el espacio anular comprendido entre dos tubos cilíndricos y concéntricos.

34.8.- El caudal de agua a $20\text{ }^\circ\text{C}$ en una tubería horizontal de hierro galvanizado, de 2 cm de diámetro, es de 1.5 l/min. **a)** Determinar el régimen de flujo en la tubería. **b)** Calcular la caída de presión a lo largo de 100 m de tubería como consecuencia de la viscosidad.

34.9.- Un líquido viscoso desciende, bajo la acción exclusiva de la gravedad, por el interior de una tubería cilíndrica y vertical. Expresar el caudal en la tubería en función de la densidad del líquido, de su viscosidad y del diámetro de la tubería.

34.10.- Las densidades del agua y del tolueno a $20\text{ }^\circ\text{C}$ son 0.9982 y 0.8869 g/cm³, respectivamente. La viscosidad del agua a $20\text{ }^\circ\text{C}$ es 1.002 cP. Si el agua emplea 115 s en pasar entre las marcas de un viscosímetro de Ostwald y el tolueno sólo emplea 78 s, ¿cuál es la viscosidad del tolueno a esa temperatura?

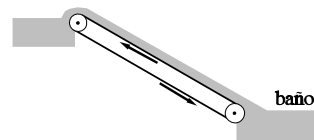
34.11.- Una corriente uniforme de aire a $20\text{ }^\circ\text{C}$, con una velocidad de 60 cm/s, penetra en un tubo muy largo de 2.5 cm de diámetro. Determinar la caída de presión entre la entrada del tubo y un punto situado en el interior del mismo y a 3 m de la embocadura. (**Nota:** Téngase en cuenta la longitud de entrada).

34.12.- A través de un tubo horizontal de 1.5 cm de diámetro circula glicerina a $20\text{ }^\circ\text{C}$, con una caída de presión de 0.8 kg/cm² por metro de tubo. Calcular el caudal y el número de Reynolds del flujo.

34.13.- Un remolque que transporta tuberías de pared delgada, de 80 cm de diámetro y 9 m de longitud, viaja a una velocidad de 90 km/h, con el aire en calma. Determinar la potencia, resultante del arrastre, exigida por un sólo tubo que está situado bastante por encima de la cabina del camión.

34.14.- Repetir el Problema 34.8 para un caudal de 15 l/min.

34.15.- Una tubería de fundición asfaltada, de 30 cm de diámetro interno y en posición horizontal, transporta agua a $20\text{ }^\circ\text{C}$. La pérdida de carga en 1000 m de longitud de tubería es de 40 cm de agua. **a)** Calcular la magnitud de los esfuerzos tangenciales que actúan sobre la pared interna de la tubería. **b)** Calcular la fuerza de arrastre que ejerce el flujo de agua sobre esos 1000 m de tubería. **c)** Calcular el caudal.

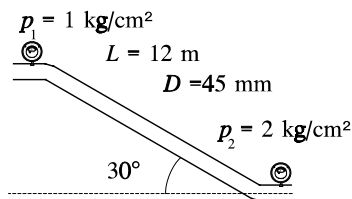


Prob. 34.16

34.16.- Una cinta transportadora pasa a través de un baño químico con una velocidad cons-

tante U y arrastra una película de líquido de espesor δ , densidad ρ y viscosidad η . La gravedad hace que el líquido tienda a escurrir hacia abajo, pero el movimiento de la cinta es suficiente para que el líquido suba completamente. Supóngase que se trata de un flujo laminar completamente desarrollado y que el aire atmosférico no produzca un esfuerzo tangencial apreciable sobre la superficie libre de la capa líquida. **a)** Deducir una expresión para la distribución de velocidades en la película líquida. **b)** Poniendo la condición de que la superficie libre de la película se encuentre en reposo, encontrar una expresión para el espesor de la película. **c)** En las condiciones del apartado anterior, determinar el caudal transportado por unidad de anchura de la cinta. **d)** Aplicación numérica de los apartados anteriores para el ácido sulfúrico a $20\text{ }^\circ\text{C}$, $\theta=45^\circ$, $U=0.75\text{ m/s}$ y una cinta de 10 cm de anchura.

34.17.- Generalizar la expresión [34.34] para el caso de un flujo laminar en una tubería recta de sección circular inclinada con un cierto ángulo θ respecto al plano horizontal.



Prob. 34.18

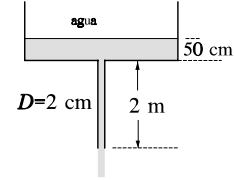
34.18.- a) Determinar la dirección del flujo a través del tubo representado en la figura adjunta. **b)** Calcular el caudal y el número de Reynolds del flujo. El fluido es aceite de oliva a $20\text{ }^\circ\text{C}$.

34.19.- Repetir el Problema 34.18 con $p_2 = 1.3\text{ kg/cm}^2$.

34.20.- Un depósito de grandes dimensiones desagua a través de una tubería de fundición asfaltada de 2 cm de diámetro interior y 20 m de longitud, que descarga directamente a la atmósfera. La tubería está colocada horizontalmente, reentrante en el depósito a 10 m por debajo del nivel del agua en el mismo. Con estos datos, determinar el caudal en el desagüe, teniendo en cuenta las pérdidas mayores y menores en la tubería.

34.21.- Un depósito abierto de grandes dimensiones contiene agua a $20\text{ }^\circ\text{C}$ hasta una altura de 50 cm por encima de su fondo. El depósito

desagua a la atmósfera a través de un tubo de hierro galvanizado, de 2 cm de diámetro y 2 m de longitud, acoplado a su fondo y en posición vertical, como se ilustra en la figura adjunta. Calcular el caudal de agua en el desagüe.



Prob. 34.21

34.22.- Repetir el Problema 34.21 para el caso en que el tubo vertical desague 60 cm por debajo de la superficie libre de un segundo depósito de grandes dimensiones.

34.23.- Dos depósitos de grandes dimensiones, abiertos a la atmósfera, contienen aceite de oliva a $20\text{ }^\circ\text{C}$, con un desnivel entre ellos de 10 m . Los depósitos están intercomunicados mediante una tubería de acero comercial, de 240 m de longitud y 12 cm de diámetro, con entradas angulosas en ambos depósitos, por debajo de los niveles de aceite en cada uno de ellos. **a)** Calcular el caudal que circula a través de la tubería. **b)** Se desea hacer circular el mismo caudal calculado en el apartado anterior desde el depósito en el que el nivel del aceite es más bajo hacia el otro. Calcular la potencia nominal mínima de la bomba que se necesita, suponiendo un rendimiento de ésta del 70%.

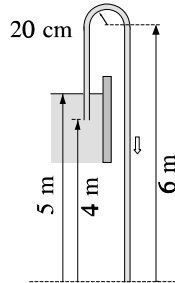
34.24.- Una tubería recta y horizontal de 12 cm de diámetro está prolongada por otra tubería recta y horizontal de 6 cm de diámetro. Consideremos dos tramos de tubería, de 100 m de longitud cada uno, situados uno a cada lado del tramo de reducción (que consideraremos de longitud despreciable). Ambas tuberías son de hierro forjado y el caudal de agua a $20\text{ }^\circ\text{C}$ es de 120 l/min . Se despreciarán las pérdidas menores en el tramo de reducción. **a)** Calcular la pérdida específica de energía en cada uno de los tramos y en el conjunto de ambos. **b)** Ídem las pérdidas de altura piezométrica. **c)** Ídem las caídas de presión.

34.25.- Con referencia a la Figura 34.17, de esta misma lección, supongamos que $l_1=10\text{ m}$, $D_1=15\text{ cm}$, $y_1=2\text{ m}$, $l_2=7\text{ m}$, $D_2=5\text{ cm}$, $y_2=8\text{ m}$, que ambas tuberías sean de hierro forjado y que el caudal sea de 50 l/s . Despreciaremos las pérdidas menores en el codo de reducción. **a)** Calcular la pérdida de energía específica en cada tramo de la tubería y entre los puntos 1 y 2. **b)** Calcular las caídas de alturas piezo-

métricas en cada tramo y entre 1 y 2. c) Ídem para las caídas de presión.

34.26.- Trasvase sifónico.

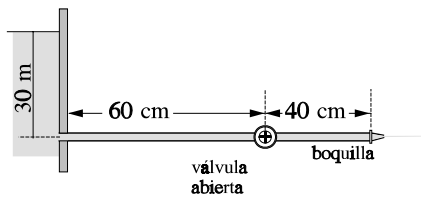
Se desea trasvasar aceite de oliva a 20 °C desde un gran depósito hasta otro situado a un nivel inferior, para lo que se recurre a la utilización de un dispositivo de sifón constituido por un tubo de hierro galvanizado de 4 cm de diámetro interior. Las dimensiones del dispositivo se especifican en la figura adjunta. a) Determinar la velocidad de salida del aceite. b) Determinar el caudal. c) Calcular el valor de la presión absoluta en el punto más alto del dispositivo.



Prob. 34.26

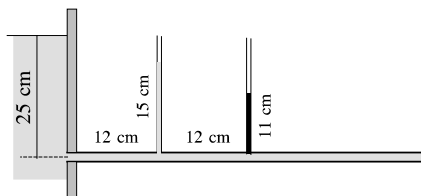
largo de un tubo está constituido por un depósito de grandes dimensiones que desagua a la atmósfera a través de un tubo horizontal de longitud L y sección constante, de 8 mm de diámetro interno. La entrada al tubo tiene bordes bien redondeados, de modo que pueden despreciarse las pérdidas menores en la misma. A lo largo de la tubería se han dispuesto dos tubos manométricos verticales, como se ilustra en la figura adjunta. En el instante en que el nivel de agua en el depósito se encuentra a 25 cm por encima de la entrada del tubo, los manómetros indican 15 cm y 11 cm, respectivamente. a) ¿Cuál es la longitud del tubo? b) En el instante mencionado, ¿cuál es el caudal en el desagüe? c) Calcular el factor de fricción y la rugosidad de las paredes del tubo.

34.29.- Determinar el diámetro mínimo que debe tener una tubería de acero comercial que debe transportar un caudal de 200 l/s de aceite de oliva a 20 °C con una caída máxima de presión de 0.5 kg/cm² en 100 m.



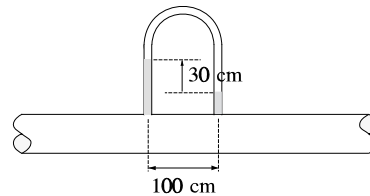
Prob. 34.27

34.27.- Calcular el caudal y trazar las líneas de alturas piezométricas y de alturas totales para el sistema esquematizado en la figura adjunta. El fluido es agua a 20 °C, que desagua a la atmósfera a través de una tubería de hierro galvanizado de 8 cm de diámetro que termina en una boquilla cuyo diámetro de salida es de 4 cm. Los coeficientes de pérdidas menores correspondientes a la entrada de la tubería, a la válvula totalmente abierta y a la salida de la boquilla son 0.34, 10.0 y 0.1, respectivamente.



Prob. 34.28

34.28.- Un aparato estándar para hacer demostraciones acerca de la pérdida de carga a lo



Prob. 34.30

34.30.- A través de una tubería horizontal fluye tetracloruro de carbono en régimen estacionario. La caída de presión entre dos puntos separados por una distancia de 1 m es de 30 cm de CCl₄, tal como se ilustra en la figura adjunta. El calor específico del CCl₄ es 0.20 cal/(g.°C) y la tubería está térmicamente aislada del ambiente. Calcular el aumento de temperatura del CCl₄ por metro de tubería.

34.31.- Se desea bombear 3600 l/min de petróleo crudo a 20 °C a través de una tubería horizontal de hierro forjado, de 23 cm de diámetro interior y 400 m de longitud. Determinar: a) la pérdida de carga a lo largo de la tubería, b) la pérdida de presión entre los extremos de la tubería y c) la potencia requerida.

34.32.- Un oleoducto está constituido por una tubería de fundición de 30 cm de diámetro y dispone de estaciones de bombeo provistas de bombas de 35 CV de potencia y una eficiencia del 70%. Calcular el incremento de presión que debe suministrar cada bomba y la distancia

entre ellas para mantener un caudal de 2400 l/min de petróleo crudo a 20 °C a través del oleoducto, en el supuesto de que el oleoducto esté a nivel.

34.33.- Un martillo neumático necesita un suministro de 0.225 kg/s de aire comprimido a presión manométrica de 6.7 kg/cm². La manguera que conduce el aire comprimido desde el compresor hasta el martillo tiene un diámetro de 4 cm y puede considerársela hidrodinámicamente lisa. La presión manométrica del aire a la salida del compresor es 7.1 kg/cm² y su temperatura es 37 °C. Despreciando los cambios en la densidad del aire y los efectos debidos a la curvatura de la manguera, calcúlese la longitud máxima que puede tener ésta.

34.34.- Una manguera contraincendios mide 80 m de longitud y 8 cm de diámetro interior, su rugosidad relativa vale 0.001 y está provista de una boquilla de salida de 2 cm de diámetro. El chorro de agua lanzado por la manguera debe alcanzar la parte más alta de un edificio de 25 m de altura, cuando el bombero está situado en la calle, a una distancia de 10 m del pie del edificio. El agua es suministrada por una boca de riego, a una presión manométrica de 0.40 atm. Una bomba, instalada en el camión de los bomberos, se encarga de aumentar la presión del agua a la entrada de la manguera; el rendimiento de dicha bomba es del 70%. Despreciando las pérdidas menores, calcular la potencia nominal mínima de la bomba.

34.35.- H. BLASIUS encontró en 1911 una correlación empírica entre el factor de fricción para un flujo turbulento en una tubería hidrodinámicamente lisa y el número de Reynolds. Esta correlación viene expresada por

$$f = \frac{0.316}{\Re^{1/4}} \quad \text{para } \Re \leq 10^5$$

a) Demostrar que la caída de presión en un flujo turbulento resulta ser proporcional a $V^{7/4}$, cuando se utiliza la fórmula de Blasius. a) Para un caudal dado, ¿cómo depende la caída de presión con el diámetro de la tubería?

34.36.- Una ecuación de correlación entre el coeficiente de fricción y la rugosidad relativa para un flujo en régimen de *turbulencia completa* (i.e., cuando el factor de fricción resulta ser prácticamente independiente del número de Reynolds) es

$$f = \frac{0.25}{[0.57 - \log(\varepsilon/D)]^2}$$

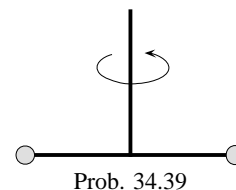
que fue obtenida originalmente por VON KÁRMÁN. Comparar los valores del factor de fricción obtenidos a partir de esta ecuación con los que se obtienen a partir del diagrama de Moody para valores de ε/D igual a 0.01, 0.001 y 0.0001. ¿Existe una buena concordancia?

34.37.- Los valores de la rugosidad absoluta que aparecen en la Tabla 34.1 corresponde a tuberías nuevas y limpias. Con el uso, las tuberías se hacen más rugosas, como consecuencia de la corrosión, de las incrustaciones y del depósito de materiales en sus paredes. Naturalmente, la velocidad de aumento de la rugosidad depende de la naturaleza del fluido que se conduce a través de la tubería. COLEBROOK y WHITE (1937) encontraron que la rugosidad absoluta aumenta linealmente con el tiempo de utilización de la tubería; esto es, $\varepsilon = \varepsilon_0 + \alpha t$, donde ε_0 es la rugosidad absoluta de la tubería nueva y α es un parámetro que debe ser determinado experimentalmente.

Después de 12 años de servicio, una tubería de acero comercial de 45 cm de diámetro presenta una caída de presión de 0.34 kg/cm² en 1000 m cuando conduce un caudal de 150 l/s de agua a 20 °C. Estimar la caída de presión para el mismo caudal de agua al cabo de 20 años de servicio.

34.38.- Calcular la fuerza total que ejerce un viento de 90 km/h sobre una valla publicitaria de 15 m de ancho por 3 m de largo, cuando el viento sopla perpendicularmente sobre la valla.

34.39.- Un mezclador rotatorio está constituido por dos discos circulares de 1 cm de radio, unidos mediante una varilla de 20 cm de longitud, como se ilustra en la figura. El mezclador gira en el interior de un recipiente de grandes dimensiones, que contiene agua a 20 °C, con una velocidad angular constante de 60 rpm. Calcular la potencia que debe comunicarse al eje del mezclador para mantenerlo en rotación. Nota: Despreciar el arrastre sobre las varillas y el movimiento inducido en el agua.



Prob. 34.39

El mezclador gira en el interior de un recipiente de grandes dimensiones, que contiene agua a 20 °C, con una velocidad angular constante de 60 rpm. Calcular la potencia que debe comunicarse al eje del mezclador para mantenerlo en rotación. Nota: Despreciar el arrastre sobre las varillas y el movimiento inducido en el agua.

34.40.- La antena de radio de un automóvil mide 120 cm de longitud y 6 mm de diámetro.

Hacer un estimación del momento que tiende a romperla por su base cuando el automóvil corre a 90 km/h.

34.41.- a) Determinar la velocidad límite de una esferita de acero (densidad, 7.87 g/cm^3) de 2 mm de diámetro que cae en un recipiente que contiene glicerina a 20°C . **b)** Calcular el valor del número de Reynolds correspondiente a esa velocidad límite para asegurarse de que fue correcto utilizar la ley de Stokes en el apartado anterior. **c)** Determinar el valor máximo del diámetro de la esferita de acero que aún permita utilizar la ley de Stokes.

34.42.- Repetir el Problema 34.41 para gotas de agua que caen en un depósito que contiene aceite de oliva a 20°C .

34.43.- a) ¿Qué diámetro máximo pueden tener las partículas de polvo de forma esférica y densidad 2.5 g/cm^3 a fin de que se pueda aplicar la ley de Stokes en su caída en el aire atmosférico a 20°C y 1 atm? **b)** Consideremos una partícula de polvo radiactivo, originada en una explosión nuclear, cuyo diámetro y densidad sean $25 \mu\text{m}$ y 2.5 g/cm^3 , respectivamente, que se encuentre a una altura de 80 km sobre el suelo. Determinar el tiempo que empleará dicha partícula en depositarse sobre el suelo.

34.44.- Un globo esférico, de 30 cm de diámetro, está lleno con un gas ligero y sujetado al suelo mediante un hilo de masa despreciable. **a)** Cuando el globo se encuentra en aire en calma, a 20°C y 1 atm, la tensión del hilo (medida con un dinamómetro sensible) es de 7.04 g. ¿Cuál es la masa del globo y de su contenido? **b)** Cuando se levanta un vientecillo, se observa que el hilo de sujeción forma un ángulo de 60° con la vertical. ¿Cuál es la velocidad de ese vientecillo? **c)** De nuevo con el aire en calma, se da suelta al globo. ¿Qué velocidad límite alcanzará?

34.45.- Determinar el diámetro mínimo de un paracaídas hemiesférico que permita un descenso con una velocidad constante de 5 m/s a un paracaidista que pesa 80 kg.

34.46.- Una cometa de juguete, que pesa 1.360 kg, puede ser considerada como un lámina plana de 0.93 m^2 de área. La cometa está "volando" en una corriente horizontal de aire (en condiciones normales) de 36 km/h y forma un ángulo de 8° con la horizontal. Supongamos que el coeficiente de sustentación de la cometa venga dado por la expresión $C_L = 2\pi \text{sen}\alpha$, siendo α el ángulo de ataque. Si el hilo de sujeción forma un ángulo de 50° con la horizontal, calcular la tensión del mismo.

34.47.- Las alas de los aviones modernos están diseñadas de forma que puedan proporcionar una sustentación de unos 100 kg por m^2 de superficie de ala. Supóngase que el aire ($\rho = 1.3 \text{ g/l}$) fluya en régimen currentilíneo alrededor del ala, con una velocidad de 90 m/s sobre la superficie superior de la misma. ¿Cuál debería ser la velocidad del aire bajo la superficie del ala para tener la sustentación deseada?

34.48.- Una avioneta pesa 1300 kg y la superficie total de sustentación correspondiente a sus alas es de 28 m^2 . Supongamos que los coeficientes de sustentación y de resistencia al avance sean los del perfil del ala de la Figura 34.31. La avioneta vuela horizontalmente con una velocidad de crucero de 140 km/h. **a)** Calcular el ángulo de ataque correspondiente a esa velocidad de crucero. **b)** Calcular el empuje que debe realizar el motor de la avioneta y la potencia desarrollada por el mismo en esas condiciones.

34.49.- Un avión de 4535 kg de peso, en orden de vuelo, está volando describiendo un círculo de 915 m de radio, en un plano horizontal, con una celeridad constante de 242 km/h. La superficie de sustentación efectiva de las alas del avión es 20.4 m^2 y el perfil de las mismas es el de la Figura 34.31. Determinar la fuerza de arrastre sobre el avión y la potencia desarrollada por sus motores.

