

## II.- FUNDAMENTOS AERODINAMICOS DE LAS MAQUINAS EOLICAS

El viento está compuesto por partículas de aire en movimiento; cuando la masa de aire esté conformada por filetes yuxtapuestos, perfectamente individualizados, se dice que el movimiento del mismo es laminar, mientras que si los filetes de aire se entrecruzan y no conservan su individualidad, se dice que el movimiento es turbulento; éste es el caso más general que acontece en el viento.

Si en cada punto de una masa de aire en movimiento turbulento se miden las velocidades instantáneas, se observa que estas varían en magnitud y en dirección sin ninguna regularidad, pero no suelen apartarse mucho de un valor medio. Los movimientos desordenados del aire a nivel macroscópico se llaman turbulencias, que pueden influir en masas de aire importantes. Cuando el viento se encuentra con un obstáculo, su movimiento empieza a ser perturbado y a hacerse irregular a una cierta distancia del mismo.

### II.1.- FUERZAS SOBRE UN PERFIL

Un objeto situado en el seno de una corriente de aire presenta una resistencia al avance, deformando los filetes fluidos; ésta depende de la forma del objeto y de su posición con relación a la dirección del viento, Figura II.1.

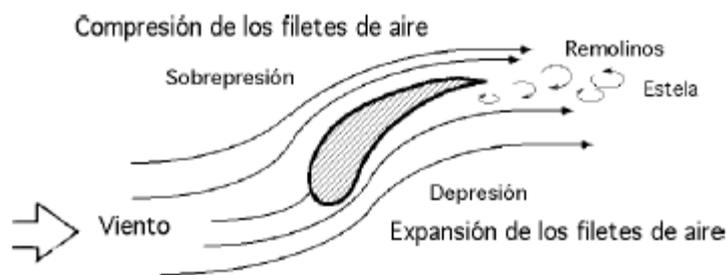


Fig. II.1.- Perfil situado en el seno de una corriente fluida

Al estudiar los efectos de la resistencia del aire sobre una placa plana, se observa que la resultante  $\vec{R}$  de las fuerzas aplicadas a la placa es un vector cuyo punto de aplicación es su centro aerodinámico, {centro de empuje}, siendo su dirección perpendicular a la placa, su sentido el del viento, y su intensidad proporcional a la superficie  $S$  expuesta y al cuadrado de la velocidad del viento  $V$ , en la forma:

$$R = C_w \rho \frac{S V^2}{2} = k S V^2$$

en la que  $k$  es un coeficiente que depende del ángulo  $\alpha$  de incidencia, de las unidades elegidas y de la turbulencia del movimiento;  $C_w$  es un coeficiente de resistencia (penetración),  $\rho$  es la densidad del aire y  $S$  la sección frontal del perfil.

Si el ángulo  $\alpha$  que forma el plano de la placa con la dirección del viento es grande, existe una sobrepresión en la parte delantera de la placa y una depresión en su parte posterior de carácter turbulento, Figura II.2; si el ángulo de incidencia  $\alpha$  es pequeño, la sobrepresión aparece en la parte inferior de la placa y la depresión por encima, por lo que aparece una fuerza que tiende a elevarla, Figura II.3, conocida como fuerza de sustentación o de elevación.

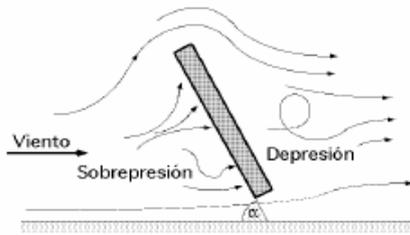


Fig II.2

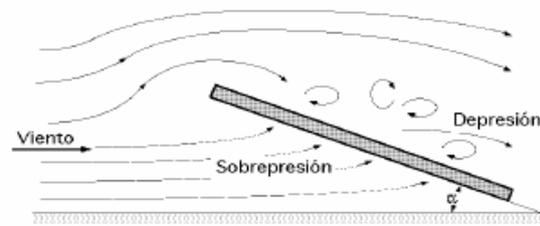


Fig II.3

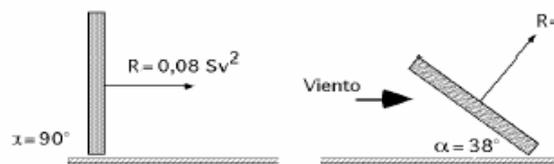


Fig II.4

En la Figura II.4 se representa un perfil placa plana con dos tipos de inclinación; se indican los valores de  $\vec{R}$  observándose que, contra más pequeño sea el ángulo de inclinación  $\alpha$ , la resultante  $\vec{R}$  será mayor. Para perfiles planos (fijos) de longitud  $L$  paralelos a la velocidad  $V$  del viento, el valor del n° de Reynolds es:

$$Re = \frac{V L}{\nu}$$

El valor de  $C_w$  es

{	Régimen laminar,	$C_w = \frac{1,328}{\sqrt{Re}} ; Re < 10^5$
	Régimen turbulento,	$\begin{cases} C_w = \frac{0,074}{Re^{1/5}} ; 10^5 < Re < 10^7 \\ C_w = \frac{0,455}{(\log Re)^{-2,58}} ; Re > 10^7 \end{cases}$

Para otros perfiles no planos con su eje de simetría paralelo a la dirección del viento, se indica en la Figura II.5 el valor del coeficiente  $C_w$ .

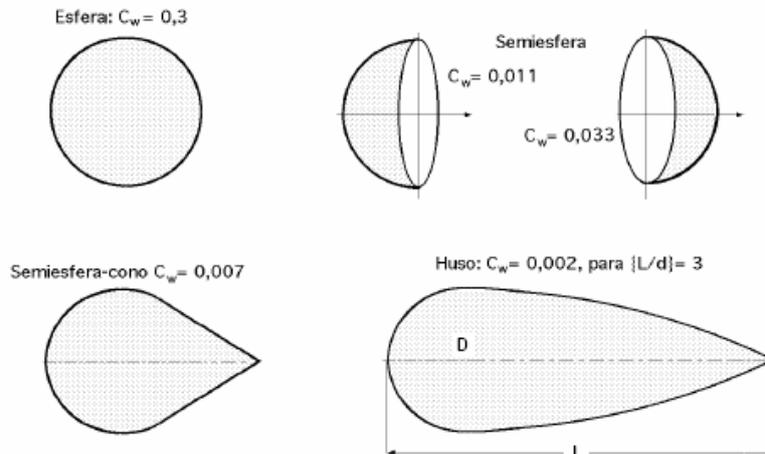


Fig. II.5.- Coeficiente  $k$  para algunos perfiles semiesféricos

Para un perfil diseñado en forma aerodinámica se definen dos zonas que son:

- a) El **extradós**, que es la parte del perfil en donde los filetes de aire están en depresión
- b) El **intradós**, que es la parte del perfil en donde los filetes de aire están en sobrepresión.

Si la placa no está perfilada convenientemente, las turbulencias originadas sobre el extradós disminuyen la energía cinética del aire. Si se permite que la placa se desplace bajo el efecto de la fuerza ejercida por el viento, producirá un cierto trabajo recuperable en forma de energía mecánica; contra menor sea la turbulencia, mayor será este trabajo.

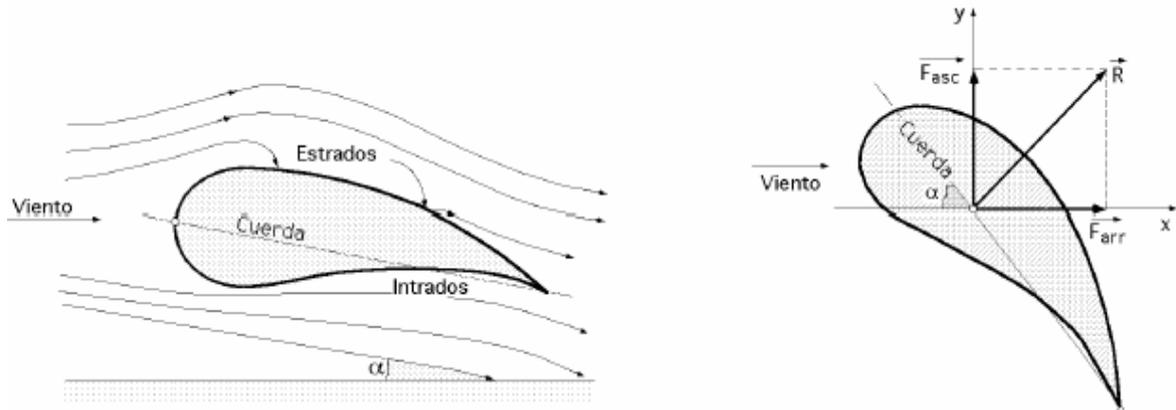


Fig. II.6.- Coeficientes de arrastre y ascensional

### **FUERZAS DE ARRASTRE Y ASCENSIONAL EN PERFILES FIJOS**

La componente de  $\vec{R}$  en la dirección del viento es la fuerza de arrastre  $F_{arr}$ , mientras que la componente de  $\vec{R}$  perpendicular a la fuerza de arrastre es la fuerza ascensional  $F_{asc}$ :

$$F_{arr} = R \operatorname{sen} \alpha = k_x S V^2$$

$$F_{asc} = R \operatorname{cos} \alpha = k_y S V^2$$

La fuerza  $\vec{R}$  es siempre normal a la cuerda del perfil, que es al mismo tiempo su longitud característica; el empuje ascensional aumenta a medida que  $\alpha$  disminuye.

La cuerda se considera desde el borde de ataque del perfil, al borde de salida posterior.

Si la forma del perfil no es plana, se puede descomponer  $\vec{R}$  en función de dos tipos de coeficientes  $k_x$  de arrastre, y  $k_y$  ascensional, siendo el eje x paralelo a la dirección del viento, Figura II.6.

Se define la **esbeltez de un perfil**, para un valor dado de  $\alpha$ , como la relación entre los coeficientes  $k_y$  y  $k_x$ , en la forma:

Esbeltez:

$$f = \frac{k_y}{k_x} = \frac{C_y}{C_x} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},$$

## II.2.- ACCION DEL VIENTO SOBRE EL PERFIL

**PALAS PERFILADAS.**- El elemento básico de una aeroturbina es el rotor, que está formado por una o varias hélices o palas, (su teoría de cálculo elemental es análoga a la de las hélices de avión).

En el rotor están situadas las palas, cuyo número es variable según los casos; cada pala tiene un perfil que tiene forma aerodinámica; éstos perfiles tienen un extremo romo, que es el borde de ataque mientras que el otro extremo, de forma afilada, es el borde de salida.

Los perfiles tienen distintos nombres según su geometría. Se denominan biconvexos si el intradós y el extradós son convexos y plano-convexos si tienen el extradós convexo y el intradós plano y de doble curvatura si el intradós y el extradós son cóncavos.

### SECCIONES DE UN PERFIL

En la figura II.7 se muestra los términos utilizados en un perfil



Fig. II.7 perfil aerodinámico

1. **LÍNEA DE LA CUERDA:** Es la línea recta que pasa por el borde de ataque y por el borde de fuga.
2. **CUERDA:** Es la línea recta que une el borde de ataque con el borde de fuga. Es una dimensión característica del perfil.
3. **LÍNEA DE CURVATURA MEDIA:** Línea equidistante entre el extradós y el intradós. Esta línea "fija" la curvatura del perfil. Si la línea de curvatura media "cae" sobre la cuerda (como en la figura) se dice que la curvatura es positiva, si cae por debajo, negativa, y si va por debajo y por arriba, doble curvatura.
4. **CURVATURA MÁXIMA:** Es la máxima distancia entre la línea de curvatura media y la cuerda del perfil. El valor suele darse en % de la cuerda.
5. **ESPESOR MÁXIMO Y POSICIÓN:** Son dos características importantes, que se expresan en % de la cuerda. El valor varía desde un 3 % en los perfiles delgados hasta un 18 % en los más gruesos.
6. **RADIO DE CURVATURA DEL BORDE DE ATAQUE:** Define la forma del borde de ataque y es el radio de un círculo tangente al extradós e intradós, y con su centro situado en la línea tangente en el origen de la línea de curvatura media.

En general, los tipos de perfiles utilizados en las máquinas eólicas rápidas son de la serie NACA (National Advisory Committee of Aeronautics), y vienen determinados por un conjunto de cifras que definen su geometría.

## NOMENCLATURA DE PERFILES NACA-4 CIFRAS

- La primera cifra tiene un significado geométrico, e indica la máxima flecha de la línea media de la cuerda en % , proporcionando la máxima curvatura.
- La segunda cifra tiene un significado geométrico, e indica su posición, es decir, la distancia desde el borde de ataque hasta la posición de la máxima flecha de la línea media o máxima curvatura
- Las dos últimas cifras indican el espesor relativo máximo en % respecto a la cuerda.

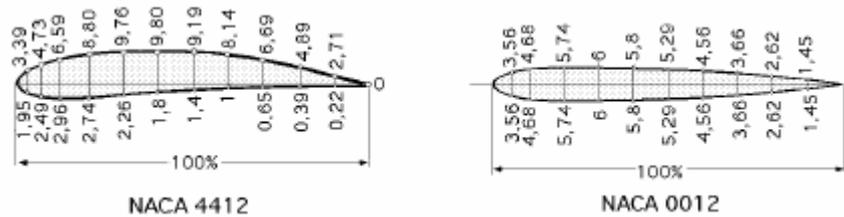


Fig. II.8.- Perfiles NACA

El perfil se obtiene mediante dos parábolas tangentes en el punto de máxima línea media

*Ejemplo: El perfil NACA2415, tiene un 2% de altura máxima de la línea media, situada a un 40% del borde de ataque, con un espesor relativo del 15%.*

Los perfiles NACA44XX tienen el intradós con parte convexa, por lo que son de construcción más compleja y al igual que los anteriores; el XX indica el máximo espesor del perfil.

## NOMENCLATURA DE PERFILES NACA-5 CIFRAS

- La primera cifra indica el valor del coeficiente de sustentación ideal de la curvatura del perfil, multiplicado por 20 y dividido por 3.
- Las dos cifras siguientes indican el doble de la posición de la flecha máxima de la línea media (curvatura) en % de la cuerda
- Las dos últimas cifras indican el espesor relativo máximo de la cuerda en %, igual al del perfil NACA de 4 cifras

El perfil se obtiene mediante una parábola cúbica conectada a una línea recta que llega hasta el borde de salida.

La serie 230XX muy utilizada en rotores de aeroturbinas se corresponde con perfiles simétricos biconvexos, indicando la relación XX el espesor máximo.

**COMPONENTES AERODINAMICAS EN UNA PALA** - La pala de una hélice de un aerogenerador eólico es una pala perfilada que transforma la energía cinética del viento en energía mecánica de rotación. Las fuerzas que actúan sobre un elemento de longitud de pala  $dx$  en rotación, se obtienen estudiando la acción del viento relativo que recibe la pala de velocidad  $\vec{C}$  (viento aparente o estela), que se puede considerar suma del viento real de velocidad  $\vec{V}$ , y de un viento originado por el movimiento de rotación de la pala, de velocidad  $\vec{U}$ , Figura II.9.

Si se trata de una hélice de avión (propulsiva), como el viento incidente es un viento relativo debido al desplazamiento del avión, existe una diferencia en la posición de la pala respecto a la del aerogenerador, como se indica en la Figura II.10, en la que se determinan los siguientes ángulos:

$\beta$  es el ángulo que forma una cuerda cualquiera del perfil con el plano de rotación; es el ángulo de calaje o de inclinación (cuerda/u)

$\alpha$  es el ángulo que forma la cuerda del perfil con la velocidad aparente del viento  $c$ , (ángulo de incidencia o de ataque)

$\theta$  es el ángulo que forma el plano de rotación con la dirección aparente del viento que pasa por el borde de ataque; se conoce como ángulo aparente del viento.

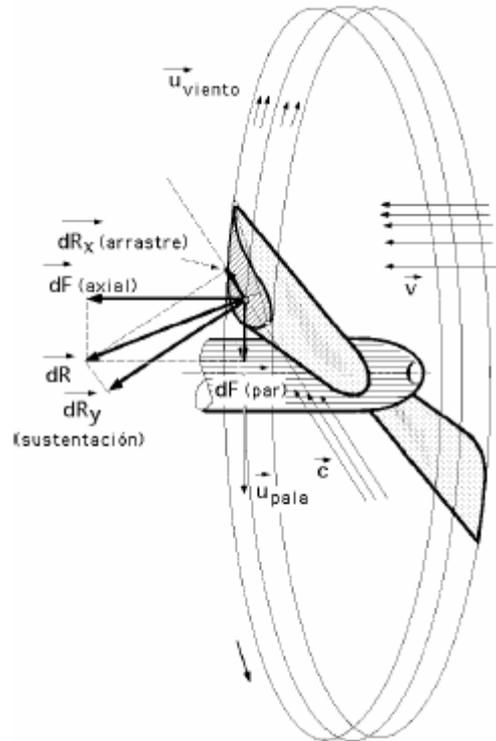


Fig II.9.- Fuerzas que actúan sobre un elemento de pala en rotación

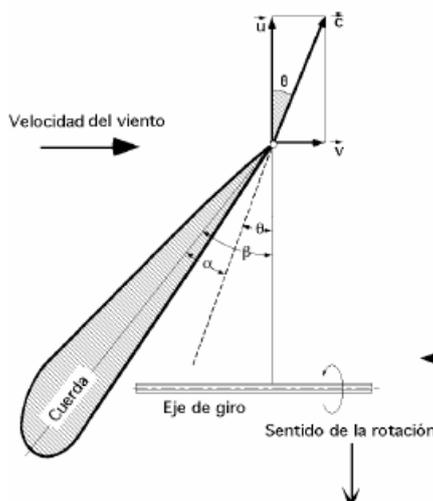


Fig II.10.a.- Pala de hélice de avión

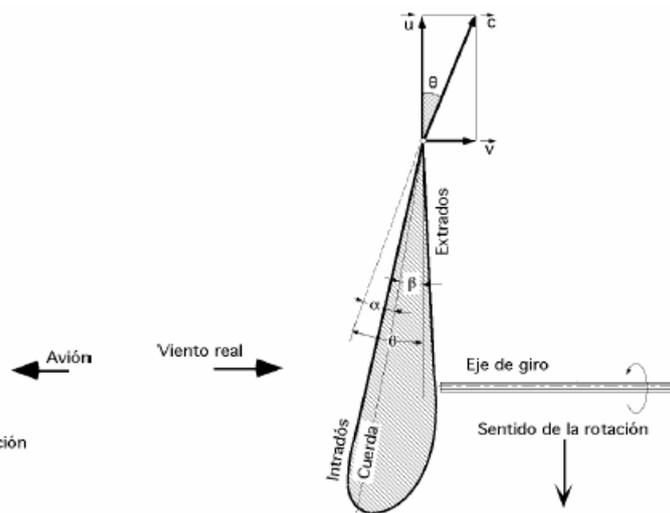


Fig II.10. b.- Pala de hélice de aerogenerador

se tiene que:

$$\begin{cases} \beta = \theta - \alpha, \text{ para una hélice de aerogenerador} \\ \beta = \theta + \alpha, \text{ para una hélice de avión} \\ \vec{u} \text{ es la velocidad del viento creada por el desplazamiento (giro) de la pala} \\ \vec{v} \text{ es la velocidad del viento real (velocidad nominal)} \end{cases}$$

**FUERZAS DE ARRASTRE Y ASCENSIONAL EN PERFILES MOVILES.**- La fuerza que actúa en el centro aerodinámico de un elemento de pala en rotación, de superficie frontal elemental  $dS$ , (proyección del perfil sobre la dirección del viento aparente), viene dada por  $dR$ , Figura II.11. Esta fuerza se puede descomponer a su vez en otras dos,  $dR_x$  en la dirección del viento aparente (Fuerza de arrastre), que se corresponde con una degradación de la energía, y  $dR_y$ , (Fuerza ascensional o empuje) sobre el elemento de pala considerado.

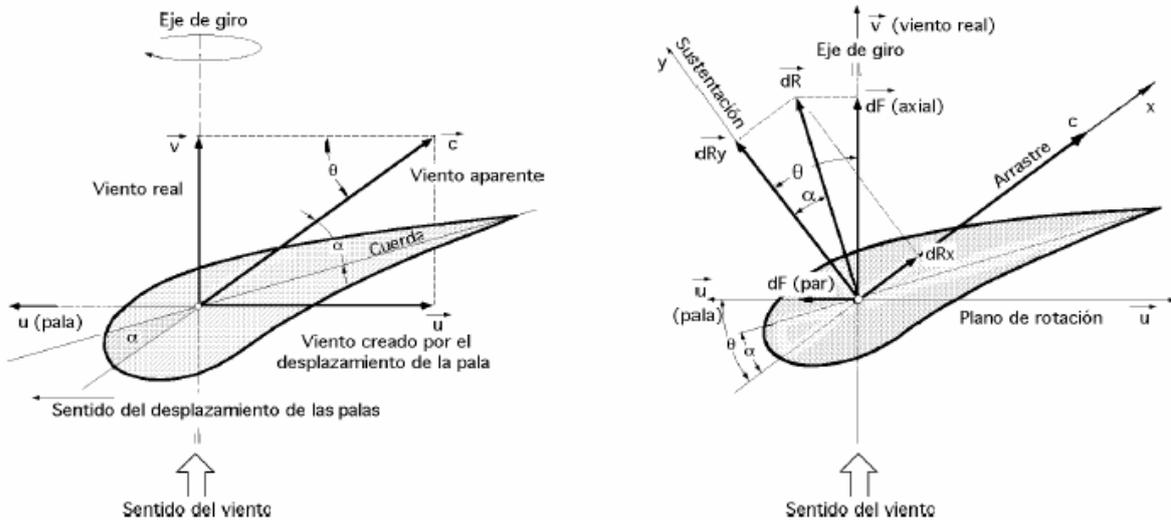


Fig II.11.- a) Velocidades y b) fuerzas que aparecen sobre una pala de aerogenerador

Por lo tanto, para el elemento de pala diferencial en rotación  $dS$ , y de acuerdo con la Fig II.11 se puede poner:

$$\text{Fuerza de arrastre, } dR_x = \frac{1}{2} C_x \rho c^2 dS = dF_{arr}$$

$$\text{Fuerza ascensional, } dR_y = \frac{1}{2} C_y \rho c^2 dS = dF_{asc}$$

$C_x$ , es el coeficiente de arrastre y  $C_y$  es el coeficiente ascensional, que dependen del tipo de perfil, del ángulo de incidencia y del número de Reynolds.  $dS$ , es el área del elemento diferencial de la pala que se ofrece al viento, de valor,  $L dr$ , siendo  $L$  la longitud característica del perfil, igual a la longitud de su cuerda. Los coeficientes  $C_x$  y  $C_y$  vienen relacionados por el coeficiente aerodinámico total  $C_T$ , de la forma:

$$C_T^2 = C_x^2 + C_y^2$$

**FUERZAS DE PAR Y AXIAL.**- Si se proyectan las fuerzas de arrastre o de resistencia  $dR_x$  y de empuje ascensional o sustentación  $dR_y$ , sobre el plano de rotación, se obtiene una fuerza útil,  $dF_{par}$ , (paralela a  $U$ ), que hace girar la hélice, y otra fuerza perpendicular,  $dF_{axial}$ , (fuerza de empuje del viento sobre el rotor), que se compensa por la reacción del soporte del eje del rotor de la hélice, de la forma:

$$\begin{aligned} dF_{par} &= dR_y \sen \theta - dR_x \cos \theta = \frac{1}{2} \rho c^2 dS (C_y \sen \theta - C_x \cos \theta) = \\ &= \frac{1}{2} \rho \frac{v^2}{\sen^2 \theta} dS (C_y \sen \theta - C_x \cos \theta) = \frac{\rho v^2}{2} (1 + \cotg^2 \theta) dS (C_y \sen \theta - C_x \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_{axial} &= dR_y \cos \theta + dR_x \sen \theta = \frac{1}{2} \rho c^2 dS (C_y \cos \theta + C_x \sen \theta) = \\ &= \frac{1}{2} \rho \frac{v^2}{\sen^2 \theta} dS (C_y \cos \theta + C_x \sen \theta) = \frac{\rho v^2}{2} (1 + \cotg^2 \theta) dS (C_y \cos \theta + C_x \sen \theta) \end{aligned}$$

siendo  $\theta$ , el ángulo que forma la dirección del viento aparente (relativa), entre los vectores velocidad  $\vec{U}$  y  $\vec{C}$ . Los valores que intervienen en el cálculo de estos elementos diferenciales son función de las velocidades en cada zona y, por tanto, del ángulo de ataque  $\alpha$ , ya que conocido éste, es posible obtener los valores de  $C_x$  y  $C_y$  en función de él.

Como,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{C_x}{C_y} = \frac{dR_x}{dR_y}$ , resulta

$$C_y \cos \theta + C_x \operatorname{sen} \theta = C_y \left( \cos \theta + \frac{C_x}{C_y} \operatorname{sen} \theta \right) = C_y (\cos \theta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \theta) = C_y \frac{\cos (\theta - \alpha)}{\cos \alpha}$$

Obteniéndose:

$$dF_{\text{axial}} = \frac{1}{2} \rho v^2 dS C_y \frac{\cos (\theta - \alpha)}{\operatorname{sen}^2 \theta \cos \alpha}$$

$$dF_{\text{par}} = \frac{1}{2} \rho v^2 dS C_y \frac{\operatorname{sen} (\theta - \alpha)}{\operatorname{sen}^2 \theta \cos \alpha}$$

La fuerza de sustentación aumenta con el ángulo de ataque  $\alpha$  hasta un máximo y luego disminuye. Como  $\vec{U}$  varía con el radio  $r$ ,  $\vec{C}$  también variará, por lo que el ángulo  $\beta$  deberá variar a lo largo de la pala, y de ahí que éstas se construyan alabeadas.

**PAR MOTOR.-** Las máquinas eólicas cuyo par motor se obtiene a partir de la fuerza de arrastre  $F_{\text{arr}}$ , son los **aerogeneradores Savonius**, Figura II.12, y **los Molinos multipala** (12 a 24 palas), Figura II.13. El par motor es de la forma:

$$d\tau = r dF_{\text{arr}} = r dR_x$$

$$= \frac{r}{2} C_x \rho c^2 dS = \frac{r}{2} C_x \rho v^2 (1 + \cotg^2 \theta) dS = \frac{r}{2} C_y \rho v^2 \frac{\operatorname{sen} (\theta - \alpha)}{\operatorname{sen}^2 \theta \cos \alpha} dS$$

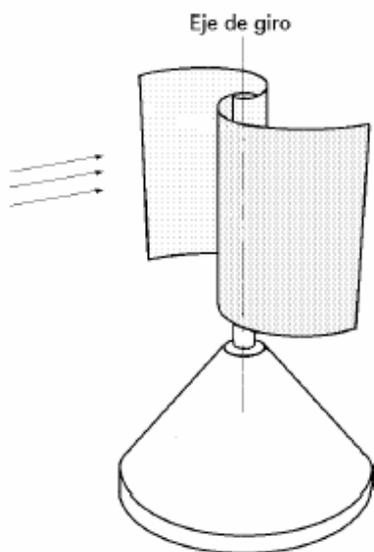


Fig II.12.- Rotor Savonius

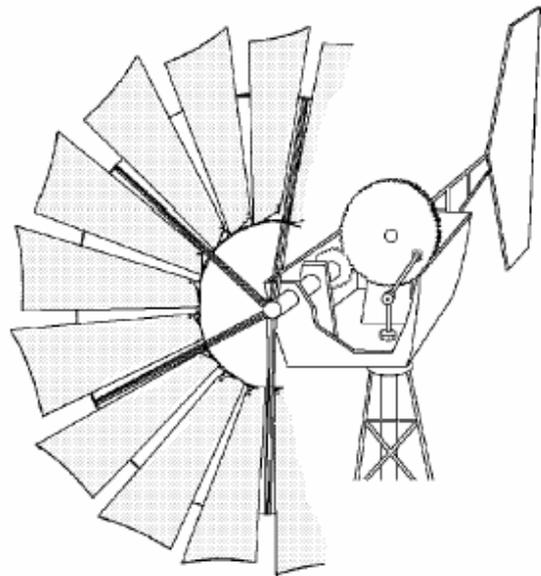


Fig II.13.- Molino multipala

Las máquinas eólicas en las que el par motor se obtiene a partir de la fuerza de par  $dF_{par}$ , son los **aerogeneradores Darrieux**, Figura II.14, y **Hélice**, Figura II.15.

$$d\tau = r dF_{par} = \frac{r}{2} \rho V^2 dS (1 + \cot^2 \theta) (C_y \sin \theta - C_x \cos \theta)$$

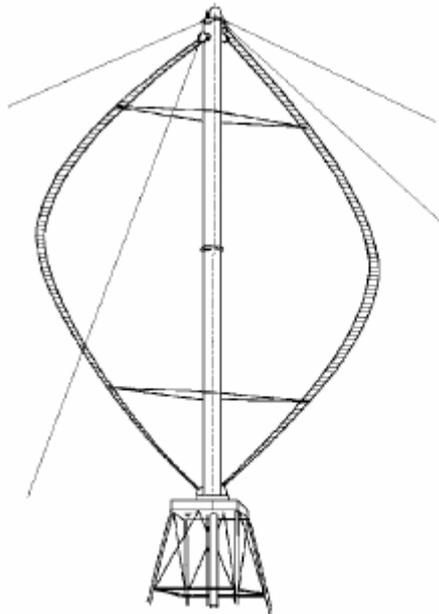


Fig. II.14.- Aerogenerador Darrieux

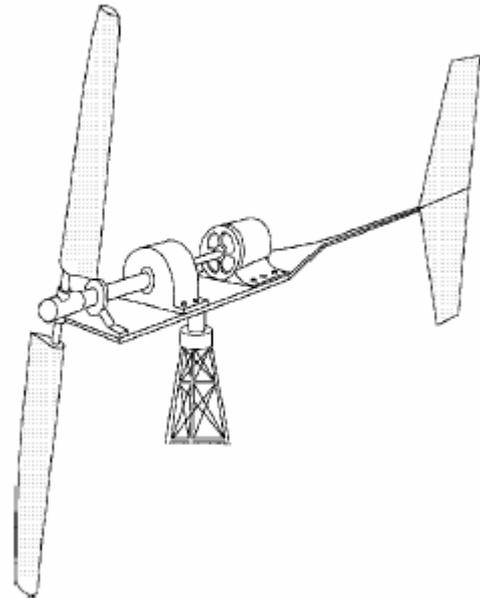


Fig. II.15.- Aerogenerador de hélice

**RENDIMIENTO AERODINAMICO DE LAS HELICES.-** La diferencial de la potencia útil generada por la pala es de la forma:

$$dN_{\text{útil}} = dF_{par} U$$

y la potencia consumida por el viento:

$$dN_{\text{viento}} = dF_{axial} V$$

por lo que se puede definir el rendimiento aerodinámico  $\eta$  (aerod) como la relación entre la potencia útil generada por la pala y la consumida por el viento en este efecto, en la forma:

$$\begin{aligned} \eta_{\text{aerod}} &= \frac{dF_{par} u}{dF_{axial} v} = \frac{dR_y \sin \theta - dR_x \cos \theta}{dR_y \cos \theta + dR_x \sin \theta} \frac{u}{v} = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos(\theta - \alpha)} \frac{u}{v} = \operatorname{tg}(\theta - \alpha) \frac{u}{v} = \\ &= \frac{\frac{dR_y}{dR_x} - \operatorname{cotg} \theta}{\frac{dR_y}{dR_x} \operatorname{cotg} \theta + 1} \frac{u}{v} = \frac{1 - \mu \operatorname{cotg} \theta}{1 + \mu \operatorname{tg} \theta} = \frac{f - \operatorname{cotg} \theta}{f + \operatorname{tg} \theta} \end{aligned}$$

que depende de la esbeltez  $f$  y del TSR

$$f = \frac{1}{\mu} = \frac{dR_y}{dR_x} = \frac{C_y}{C_x} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

siendo la relación TSR de la velocidad periférica (específica) de la pala  $\vec{U}$  (Tip-Speed-Ratio), un concepto que sustituye al número específico de revoluciones y se define como el cociente entre la velocidad periférica de la pala  $\vec{U}$  y la del viento  $V$ , sin intervención de velocidades inducidas.

$$\text{TSR} = \lambda = \cotg \theta = \frac{\omega R}{V} = \frac{\pi R n}{30V} \quad (\text{velocidad específica de punta})$$

La relación entre la velocidad angular  $\omega$  para un radio  $r$  cualquiera y el ángulo  $\theta$  Figura II.11 y figura II.16 es:

$$\text{SR} = \lambda_r = \frac{U}{V} = \cotg \theta = \frac{r \omega}{V} = \frac{\pi r n}{30V}$$

siendo SR (Speed-Ratio), en la que  $r$  es la distancia del elemento de pala considerado al eje de rotación del aerogenerador; si  $r$  disminuye, el ángulo  $\theta$  aumenta; si  $\beta$  es constante, el ángulo de incidencia  $\alpha$  también aumenta.

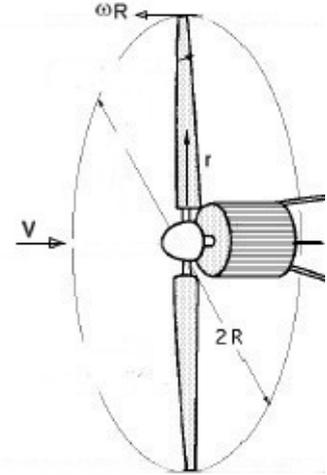


Fig. II.16 velocidad periférica  $\vec{U}$  y la del viento  $V$

Cuando se construye un aerogenerador hay que elegir una velocidad del viento que sea la más adecuada y a partir de ella intentar obtener el rendimiento máximo; ésta es la velocidad nominal, dependiendo su elección del paraje en donde se vaya a instalar el aparato; una vez fijada se elige el tipo de perfil de la pala y la velocidad de rotación deseada.

Conociendo la velocidad nominal del viento  $\vec{V}$  y la velocidad periférica de rotación  $\vec{U}$ , se determina el ángulo aparente del viento  $\theta$ , que varía a lo largo de la pala según la distancia al eje de rotación de la hélice.

También hay que tener en cuenta que para obtener el  $\eta$  (aerod.máx) el ángulo de incidencia del viento sobre la pala debe tener un valor fijo  $\alpha_0$  a todo lo largo de la misma; para que ésto sea así es necesario que el ángulo,  $\beta = \theta - \alpha$ , varíe al mismo tiempo que  $\theta$ .

La pala que tiene un mayor rendimiento aerodinámico es la que tiene forma de barrena en la que el ángulo  $\beta$  es muy importante al principio y lo es menos en la extremidad de la pala.

Una pala en forma de barrena es cara y difícil de construir, por lo que generalmente se utilizan palas de perfil constante o palas rectangulares, en las que, la pérdida de rendimiento respecto a las más sofisticadas, es pequeña.

**POTENCIA MAXIMA.**- Para hallar la potencia máxima se puede partir de la expresión de la potencia útil de la forma:

$$\begin{aligned} dN_{\text{útil}} &= u \, dF_{\text{par}} = u (dR_y \, \text{sen } \theta - dR_x \, \text{cos } \theta) = \frac{u}{2} \rho \, c^2 \, dS (C_y \, \text{sen } \theta - C_x \, \text{cos } \theta) = \\ &= \frac{u}{2} \rho \, v^2 \, dS (\cotg^2 \theta + 1) (C_y \, \text{sen } \theta - C_x \, \text{cos } \theta) = \\ &= \frac{\rho \, v^3 \, dS}{2} \cotg \theta (\cotg^2 \theta + 1) (C_y \, \text{sen } \theta - C_x \, \text{cos } \theta) \end{aligned}$$

que en la práctica se simplifica considerando que el valor de,  $\theta < 20^\circ$ , es decir:

$$\text{tg } \theta = \text{sen } \theta \quad ; \quad \text{cos } \theta \approx 1 \quad ; \quad \cotg \theta \approx \frac{1}{\text{sen } \theta}$$

quedando la expresión de  $dN_{\text{útil}}$  en la forma:

$$\begin{aligned} dN_{\text{útil}} &= \frac{\rho \, v^3 \, dS}{2} \frac{1}{\text{sen } \theta} (\cotg^2 \theta + 1) (C_y \, \text{sen } \theta - C_x) = \\ &= \frac{\rho \, v^3 \, dS}{2} \left\{ C_y (\cotg^2 \theta + 1) - C_x \frac{\cotg^2 \theta + 1}{\text{sen } \theta} \right\} = \frac{\rho \, v^3 \, dS}{2} \left( \frac{C_y}{\text{sen}^2 \theta} - \frac{C_x}{\text{sen}^3 \theta} \right) = \\ &= \frac{\rho \, v^3 \, dS}{2} (C_y \cotg^2 \theta - C_x \cotg^3 \theta) \end{aligned}$$

La condición de potencia máxima desarrollada por el viento correspondiente al elemento de superficie de pala  $dS$ , se calcula derivando la expresión de la  $dN_{\text{útil}}$  respecto de  $\theta$ , obteniéndose:

$$2C_y \cotg \theta - 3 C_x \cotg^2 \theta = 0$$

cuyas soluciones son,

$$\begin{cases} \cotg \theta = 0 \\ 2 C_y = 3 C_x \cotg \theta \Rightarrow \cotg \theta = \frac{2 C_y}{3 C_x} = \frac{2 f}{3} = \frac{2}{3 \mu} \end{cases}$$

por lo que:

$$dN_{\text{útil máx}} = \frac{\rho \, v^3 \, dS}{2} \left( C_y \frac{4 C_y^2}{9 C_x^2} - C_x \frac{8 C_y^3}{27 C_x^3} \right) = \frac{2 \rho \, v^3 \, dS}{27} \frac{C_y^3}{C_x^2}$$

**PAR MOTOR MAXIMO.**- El par motor  $d\tau$  correspondiente al elemento de superficie de pala  $dS$  se ha calculado anteriormente; también se puede hallar como sigue:

$$dN_{\text{útil}} = d\tau \, \omega = d\tau \frac{\pi n}{30}$$

Despejando  $d\tau$  se tiene:

$$\frac{dN_{\text{útil}}}{w} = \frac{dN_{\text{útil}}}{u} \, r = \frac{dN_{\text{útil}}}{v \cotg \theta} \, r = \frac{r \rho \, v^2 \, dS}{2} (C_y \cotg \theta - C_x \cotg^2 \theta)$$

que se anula para,

$$\cotg \theta = \frac{C_y}{C_x}$$

La condición de par motor máximo se obtiene para el siguiente valor de  $\theta$ :

$$C_y = 2 C_x \cotg \theta \quad ; \quad \cotg \theta = \frac{C_y}{2 C_x}$$

y es de la forma:

$$d\tau_{m\acute{a}x} = \frac{r \rho V^2 dS}{2} \left( \frac{C_y^2}{2 C_x} - \frac{C_x C_y^2}{4 C_x^2} \right) = \frac{r \rho V^2 dS}{8} \frac{C_y^2}{C_x}$$

**VELOCIDAD ANGULAR MAXIMA.**- La velocidad angular máxima  $\omega_{m\acute{a}x}$ :

$$\omega_{m\acute{a}x} = \left( \frac{dN}{dC} \right)_{m\acute{a}x} = \frac{\frac{2 \rho v^3 dS}{27} \frac{C_y^3}{C_x^2}}{\frac{r \rho v^2 dS}{8} \frac{C_y^2}{C_x}} = \frac{16}{27} \frac{v}{r} \frac{C_y}{C_x}$$

En los aerogeneradores de eje horizontal, para obtener una velocidad angular  $\vec{\omega}$  uniforme, es necesario que tanto la velocidad  $\vec{V}$  del viento, como su dirección, permanezcan constantes respecto a la pala.

La relación  $\lambda = \frac{U}{V} = \cotg \theta$  suele variar entre 0, 2 y 10 lo que permite hacer la siguiente

clasificación de maquinaria eólica de eje horizontal según el valor de  $\lambda$  :

*Para grandes molinos .....  $u/v < 1$*

*Para aerogeneradores de palas múltiples.....  $u/v \approx 3$*

*Para aerogeneradores rápidos de hélice.....  $u/v \approx 10$*

### II.3.- MODELO TEORICO DE BETZ

Vamos a suponer que la energía eólica se puede recuperar y transformar mediante un aerogenerador de hélice (dato éste no estrictamente necesario, por cuanto la demostración es válida para cualquier otro medio de transformación).

La hélice se supone inmersa en una corriente de aire de velocidad  $\vec{V}$  que, aguas abajo posee velocidad no nula  $\vec{V}_2$ , lo que permite asegurar que no es posible la transformación y recuperación de toda la energía del viento en otra forma de energía.

Se supondrá que aguas arriba de la hélice, el aire que circula por el tubo de corriente indicado en la Figura II.17, posee una velocidad  $\vec{V}_1$  en la sección transversal ficticia  $A_1$ , que es la velocidad del viento sin perturbar, mientras que la velocidad  $\vec{V}_2$  se corresponde con otra sección transversal ficticia  $A_2$  aguas abajo de la zona en que se encuentra la hélice.

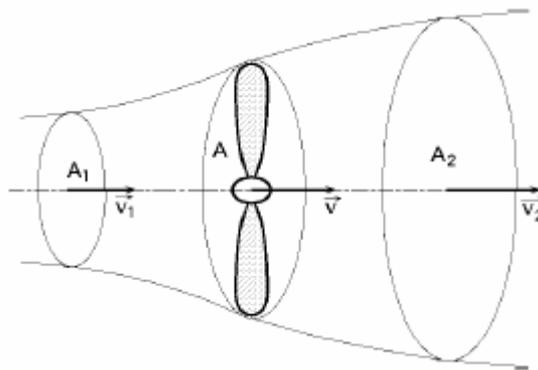


Fig. II.17.- Modelo de Betz

En el plano que contiene la hélice, la sección transversal batida por la misma sería un disco imaginario de sección  $A$ , siendo  $\vec{V}$  la velocidad útil del viento en la misma.

La hélice se supone como un disco de diámetro  $d$  que capta la energía del aire en movimiento que llega a él.

Si el disco fuese capaz de captar toda la energía cinética del viento, aguas abajo del mismo el aire estaría en reposo y, por lo tanto, la velocidad sería,  $V_2 = 0$ .

Suponiendo que el gasto másico  $G$  de aire que circula por el tubo es constante, se puede poner,

$$G = \rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2 = \rho A v$$

La variación de la energía cinética del viento en la unidad de tiempo es de la forma:

$$\Delta E_{\text{cinética}} = E_{c1} - E_{c2} = \frac{G}{2} (v_1^2 - v_2^2) = \frac{\rho A v}{2} (v_1^2 - v_2^2)$$

La fuerza  $F$  ejercida por el viento en la unidad de tiempo,  $\Delta t = 1$ , sobre el área ficticia  $A$  barrida por la hélice, es igual a la variación de la cantidad de movimiento del aire que la atraviesa; el trabajo generado por esta fuerza  $F$  en la unidad de tiempo, es la potencia  $N_{\text{útil}}$  de la forma,

$$N_{\text{útil}} = F v = \left| F = \frac{G \Delta v}{\Delta t} = \rho A v (v_1 - v_2) \right| = \rho A v^2 (v_1 - v_2)$$

que es igual a la variación de energía cinética del aire, en el mismo tiempo, pudiéndose poner:

$$N_{\text{útil}} = \rho A v^2 (v_1 - v_2) = \frac{\rho A v}{2} (v_1^2 - v_2^2) \Rightarrow v = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Si se hace el cambio,  $v_2 = b v_1$ , con,  $0 < b < 1$ , resulta:

$$N_{\text{útil}} = \frac{\rho A (v_1 + v_2)}{4} (v_1^2 - v_2^2) = \frac{\rho A v_1^3}{4} (1 + b) (1 - b^2)$$

El máximo valor de  $N_{\text{útil}}$  se obtiene haciendo,  $\frac{dN_{\text{útil}}}{db} = 0$ , resultando:

$$(1 - b^2) + (1 + b)(-2b) = 0 ; (1 + b)(1 - 3b) = 0$$

cuyas soluciones son, 
$$\begin{cases} b = -1, \text{ que no cumple con la condición, } 0 < b < 1 \\ b = \frac{1}{3} = \frac{v_2}{v_1} ; v_1 = 3 v_2 \end{cases}$$

que permite hallar la potencia máxima suministrada por el rotor, de valor:

$$N_{\text{útil máx}} = \frac{\rho A v_1^3}{4} \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{8 \rho A v_1^3}{27} = 0,37 A v_1^3$$

que se conoce como **ecuación de Betz**, y en la que se ha tomado como densidad media del aire,  $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$ , ya que en invierno ésta viene a ser del orden de 1,33 y en verano de 1,15.

De todo esto se deduce que la potencia máxima teórica es proporcional al diámetro  $D$  de la hélice y al cubo de la velocidad nominal del viento  $v_1$ .

Como la potencia del viento aguas arriba de la hélice, viene dada por la expresión:

$$N_{\text{disponible viento}} = \frac{\rho A v_1^3}{2} = 0,625 A v_1^3$$

el rendimiento máxima aerodinámico (o factor de potencia máxima), será:

$$\eta_{\text{máxima}} = \frac{N_{\text{útil máxima}}}{N_{\text{viento}}} = \frac{16}{27} = 0.595$$

$$\eta_{\text{máxima}} = 59.5\%$$

Que es el límite teórico o coeficiente de Betz, resultado que ninguna máquina eólica, por muy sofisticada que sea, puede superar.

**Consideraciones prácticas.-** La ecuación de Betz proporciona el límite superior de las posibilidades de un aerogenerador, pero en sí es poco fina, pues no tiene en cuenta una serie de factores como:

*La resistencia aerodinámica de las palas*

*La pérdida de energía por la estela generada en la rotación*

*La compresibilidad del fluido*

*La interferencia de las palas*

El rendimiento práctico depende del tipo de rotor, por lo que multiplicando la expresión anterior de la potencia máxima teórica por un coeficiente del rendimiento teórico máximo, que compendia los factores anteriores, y que está comprendido en el intervalo, 0,30 - 0,80, se obtiene

$$N_{m\acute{a}xima\ real} = (0.11-0.30) AV_1^3$$

En realidad habrá que tener en cuenta además el rendimiento de los diversos mecanismos que componen el aerogenerador, por lo que considerando el siguiente balance del mismo para los distintos componentes:

<i>Rendimiento de Betz</i> .....	59,3%
<i>Rendimiento de la hélice</i> .....	85%
<i>Rendimiento del multiplicador</i> .....	98%
<i>Rendimiento del alternador</i> .....	95%
<i>Rendimiento del transformador</i> .....	98%

se obtiene un rendimiento global de la instalación del orden del 46%.

En la práctica el rendimiento del aerogenerador será aún menor, por lo que se puede aceptar como un valor bastante razonable para la potencia del mismo, la siguiente expresión:

$$N_{\acute{u}til} = (0.11-0.17) AV_1^3$$