1 Cálculo de Áreas

Ejemplos

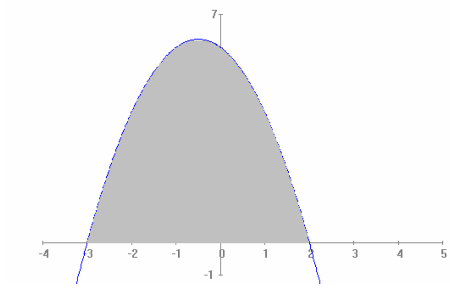
1. Encontrar el área de la región limitada por la curva $y = 6 - x - x^2$ y el eje x.

Solución

$$A = \int_{-3}^{2} (6 - x - x^2)\,dx = (6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}) /_{-3}^{2}$$

$$A = (12 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3}) - (-18 - \frac{9}{2} - \frac{-27}{3})$$

A = 125/6 unidades cuadradas



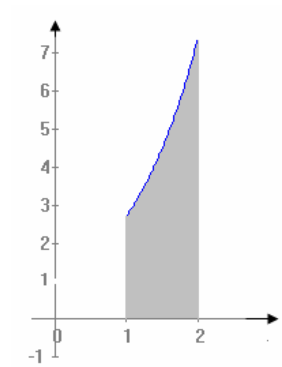
2. Encontrar el área de la región entre la curva $y = e^x$ y el eje x entre x = 1 y x = 2

Solución

A = $\int_{1}^{2} e^x dx = e^x \,|_1^2$

= $e^2 - e$

= e (e -1) unidades cuadradas.



3. Encontrar el área de la región limitada por la curva $y = x^2 - x - 2$ y la línea y = 0 entre x = -2 y x = 2

Solución

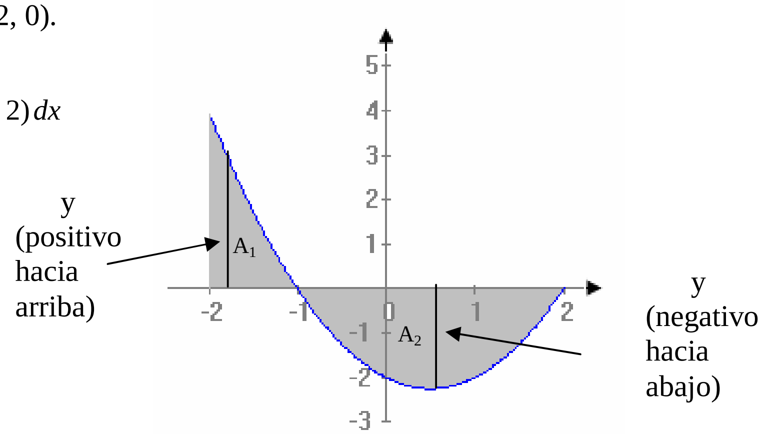
Las intersecciones con el eje x son (-1, 0) y (2, 0).

A = $A_1 + A_2$ = $\int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2)\,dx + \int_{-1}^{2} -(x^2 - x - 2)\,dx$

= ………………………..

= ………………………..

=………………………..

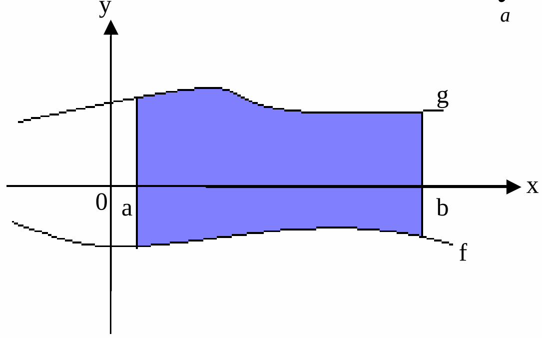


Observación

En el ejemplo 3 es erróneo calcular directamente $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ pues en la parte izquierdo (entre -2 y -1) la altura es y. Sin embargo, en la parte derecha (entre -1 y 2) la altua y es negativa

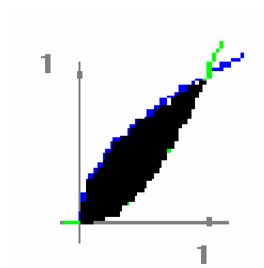
Área comprendida entre los grafos de dos funciones

Definición: Él área comprendida entre los grafos de las funciones f y g y las raíces verticales x = a y x = b, está dada por la integral definida A= $\int_a^b |f-g|\,dx,\ f \geq g\ o\ g \geq f.$



4. Hallar el área limitada por los grafos de $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^2$.

SOLUCIÓN



Hallando los puntos de intersección:

$\sqrt{x}-x^2=0 \Leftrightarrow x \geq 0\ y\ x-x^4=0$

$x \geq 0\ y\ x(x^3-1)=0$

x = 0 y x = 1, que son las raíces de f – g.

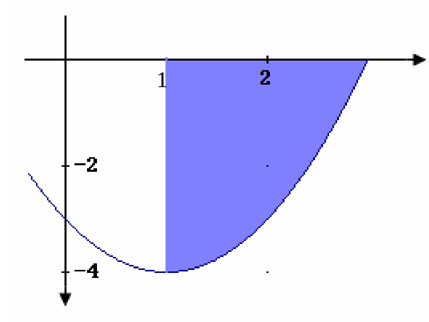
Por tanto, A = $\int_0^1 \left|\sqrt{x}-x^2\right| dx = \int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx = \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1/3$

Observación

Como se puede notar el área debe ser un número positivo, así los ejemplos muestran regiones por encima del eje x para que las integrales definidas sean positivas. Cuando la gráfica de y = f(x) está por debajo del eje x, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ es un número negativo y por tanto no podrá ser un área; sin embargo, es el inverso aditivo del área de la región limitada por y = f (x); x = a; x = b.

5. Encontrar el área de la región limitada por $y = x^2 - 2x - 3$; por el eje de las x; por x = 1; por x = 3.

Solución



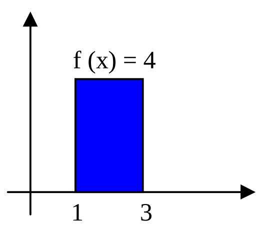
Esbozando la gráfica, se observa que la región está por Debajo del eje de las x; a partir de ello entonces hallamos el área, expresando la integral definida anteponiendo un signo negativo, justamente para hacerla positiva.

$$A = -\int_1^3 (x^2 - 2x - 3)dx = -(\qquad\qquad\qquad)$$

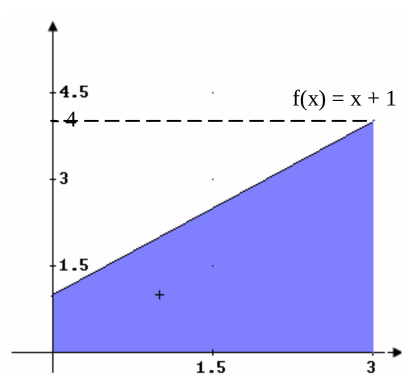
=

=

1. Calcular cada una de las siguientes áreas empleando el teorema y, si es posible, compruebe el resultado empleando alguna fórmula de la geometría elemental.
   a) Calcule el área de la región sombreada por medio de integrales y verifiquelo por medio de geometría elemental.



   b) Calcule el área de la región sombreada por medio de integrales y verifiquelo por medio de geometría elemental.



2. Calcular el área de la región limitada por el eje x de las rectas verticales x = 1; x = 8 y la gráfica de la función f, donde:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & , x \leq 6 \\ -x^2 + 12x - 31, & x > 6 \end{cases}$$

Solución

Dividir el área en dos regiones

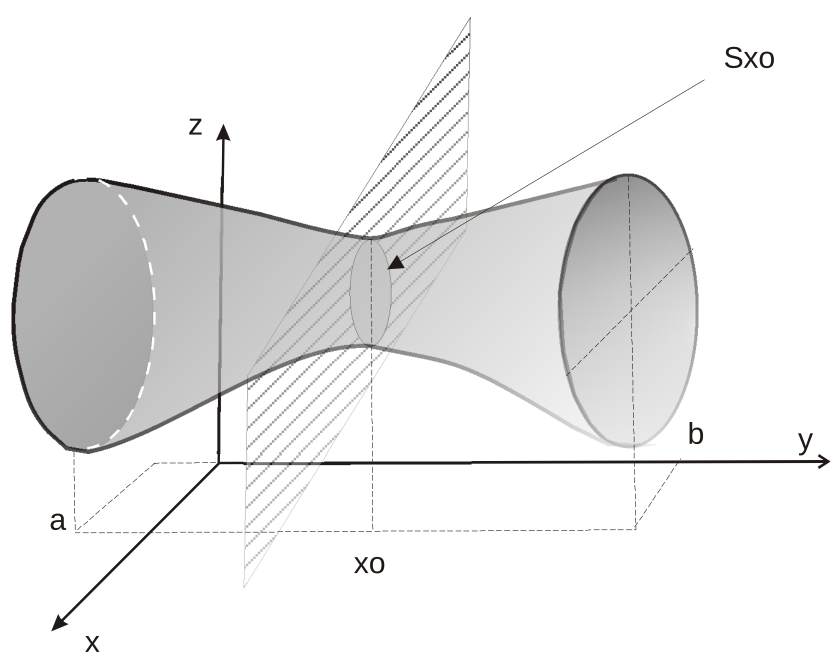
3. Hallar el área de la región limitada por ele eje x, la recta vertical x = 22 y la gráfica de la función $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \le 4 \\ -x+20, & x>4 \end{cases}$

4. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de y = x^2+2; y = -x; x = 0 y x = 2

EJERCICIOS

2 Volumen de un sólido en función de las áreas de las secciones transversales.

Sea un sólido limitado del espacio. Bajo ciertas condiciones es posible calcular el volumen V(s) de ese sólido. Sea S_{x_0} la sección plana del sólido S determinado al trazar un plano perpendicular a su eje, por ejemplo al eje x en el punto x_0 (ver figura). Supongamos que existe un intervalo $[a,b]$ tal que $S=\bigcup_{x\in[a,b]} S_x$ y que $\forall x \in [a,b]$, la sección plana S_x tienen área conocida $A(S_x)$, de manera que la función $x \in [a,b] \to A(S_x)$, sea continua, luego se tiene: $V(S)=\left[\int_a^b A(S_x)dx\right]u^3$

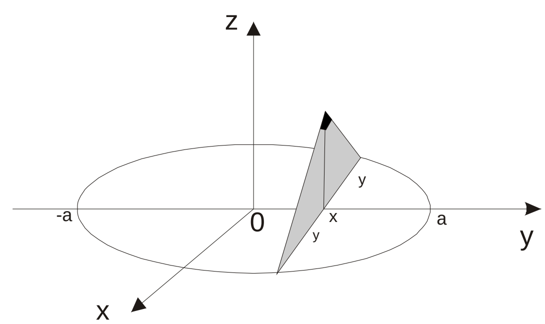


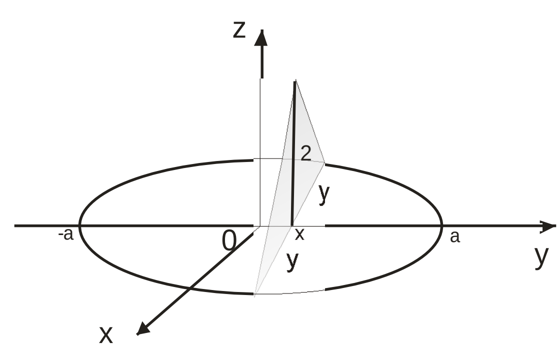
Ejemplo

La base de un sólido es la región limitada por la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Hallar el volumen de sólido S suponiendo que las secciones transversales perpendiculares al eje x son:

a) Triángulos rectángulos isósceles, cada uno con hipotenusa sobre el plano xy.
b) Cuadrados.
c) Triángulos de altura 2.

Solución



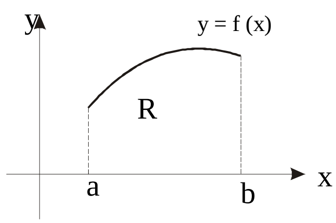


3 Volumen de un sólido de revolución

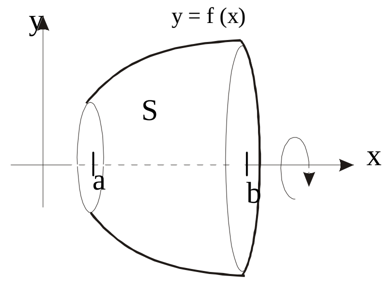
a) MÉTODO DEL DISCO CIRCULAR Y DEL ANILLO CIRCULAR

La siguiente es una aplicación geométrica en la cual la caracterización de la integral definida como el límite de una suma se emplea para hallar el volumen de un Sólido de revolución que se forma al girar una región R, alrededor del eje x en el plano xy.

La técnica consiste en expresar el volumen del sólido como el límite de una suma de los volúmenes de discos de aproximación. En particular, suponga que R es una región plana limitada por la curva y = f(x), el eje x, y las rectas x = a y x = b (ver Fig.8) y S es el sólido que se forma al rotar R alrededor del eje x (ver Fig.9).

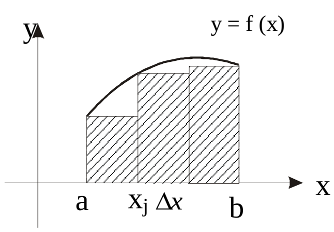


(Fig. 8)

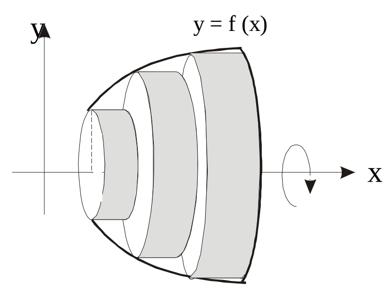


(Fig. 9)

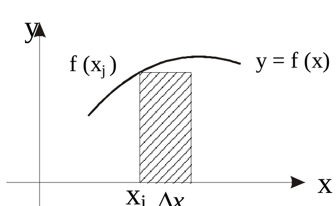
Divida el intervalo $a \le x \le b$ en n subintervalos iguales de longitud Δx, y sea x_j el comienzo del j – ésimo subintervalo. Luego aproxime la región R por los n rectángulos (ver Fig.10) a continuación el sólido S por los correspondientes n discos cilíndricos formados por la rotación de tales rectángulos alrededor del eje x (ver Fig.11).



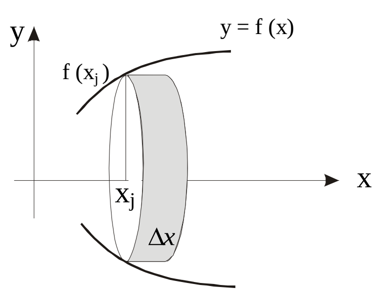
(Fig.10)



(Fig. 11)



(Fig. 12)



(Fig. 13)

El radio r_j del disco j-ésimo (ver Fig.13) es la altura $f(x_j)$ del j-ésimo rectángulo (ver Fig.12), así

Volumen del disco j-ésimo = (área de la sección transversal circular) (ancho)

$$= \pi r_j^2 (ancho) = \pi [f(x_j)]^2 \Delta x$$

El volumen total de S es aproximadamente la suma de los volúmenes de los n discos. Es decir,

$$\text{Volumen de S} = \sum_{j=1}^{n} \pi [f(x_j)]^2 \Delta x$$

La aproximación mejora cuado n crece sin límite y

$$\text{Volumen de S} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \pi [f(x_j)]^2 \Delta x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

En resumen:

Fórmula del volumen

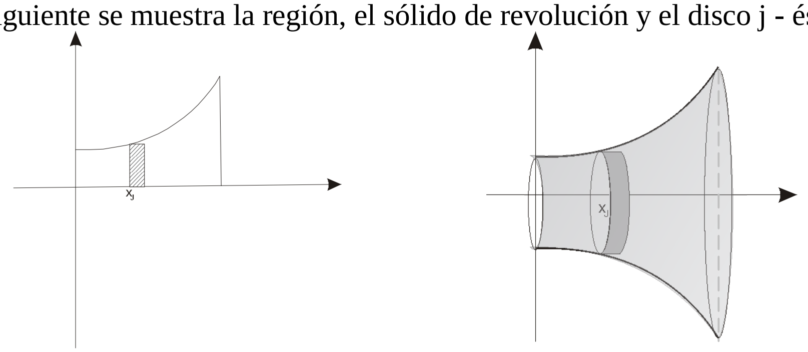
Suponga que f(x) es continua y no negativa en $a \le x \le b$ y sea R la región bajo la curva y = f(x) entre x = a y x = b. Entonces el volumen del sólido S formado al rotar R alrededor del eje x es

$$Volumen\ de\ S = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Ejemplo:
Hallar el volumen del sólido S formado al rotar la región bajo la curva y = x^2 + 1 desde x = 0 hasta x = 2 alrededor del eje x

Solución

En la figura siguiente se muestra la región, el sólido de revolución y el disco j - ésimo



El radio del disco j-ésimo es f(x_j) = $x_j^2 + 1$. Por tanto

$$\text{Volumen de S} = \pi \int_0^2 (x^2+1)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1) dx$$

$$= \pi \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x\right)\Big|_0^2 = \frac{206}{15}\pi = 43.14$$

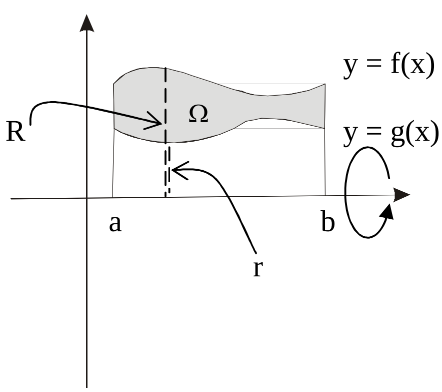
Observación:

Sean f,g: [a, b] $\rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas cuyas gráficas se encuentran a un mismo lado del eje x, y además $|g(x)| \leq |f(x)|, \quad \forall x \in [a,\ b]$. Sea S el sólido de revolución que se obtiene por la rotación en torno al eje x, de la región Ω acotada por las curvas y = f(x), y = g(x) y las rectas verticales x = a, x = b, en la figura (Fig. 14), sólo muestra el caso 0 <g(x) < f(x).
Como la sección transversal S, obtenida por la intersección de S con el plano perpendicular al eje x que pasa por x $\in$ [a, b], es un anillo circular (Fig. 15) tenemos:

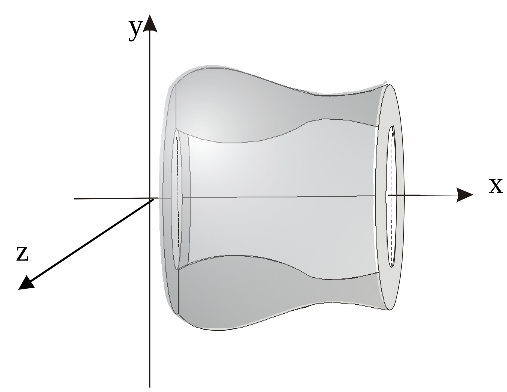
$$A(S_x) = \pi\left\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\right\}, \ \forall x \in [a,b]$$

Luego

$$\boxed{V = \left(\pi\int_a^b \left\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\right\} dx\right) u^2}$$



(Fig. 14)



(Fig. 15)

Para recordar mejor

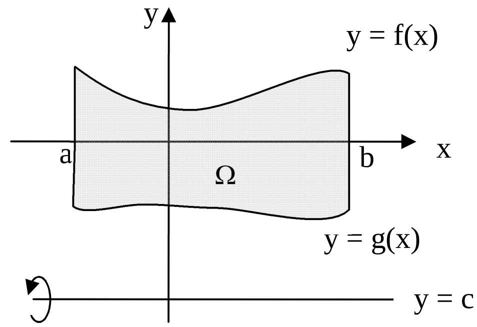
$$\boxed{V = \int_a^b \pi(R^2 - r^2)\, dx}$$

R: Radio mayor
r : Radio menor

Observación:

Sean f,g: [a, b] $\rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas cuyas gráficas se encuentran a un mismo lado de la recta y = c y $|g(x) - c| \leq |f(x) - c|, \quad \forall x \in [a,\ b]$. Sea S el sólido de revolución que se obtiene por la rotación en torno de la recta y = c, de la región Ω acotada por las gráficas de las curvas y = f(x), y = g(x) y las rectas verticales x = a, x = b, en la figura (Fig. 16) en tonces el volumen del sólido es:

$$\boxed{V = \left(\pi\int_a^b \left\{[f(x) - c]^2 - [g(x) - c]^2\right\} dx\right) u^2}$$



(Fig. 16)

Ejercicio:

Calcular el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje x de la región limitada por las gráficas de : $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

Ejercicios

Determinar el volumen del sólido que se genera al gira, alrededor del eje x, la región acotada por la parábola $y = x^2 + 1$ y la recta $y = x + 3$ Rta $\frac{117}{5}\pi$

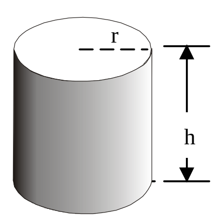
Encuentre el volumen del sólido generado al girar, alrededor del eje x, la región acotada por la curva $y = x^3$, el eje x, y la recta $x = 2$

La región limitada por las gráficas de y = x^2, y = $\sqrt{x}$, x = 2, gira alrededor del eje x. Calcular el volumen del sólido. Rta 5π u^3.

a) MÉTODO DEL DISCO CIRCULAR Y DEL ANILLO CIRCULAR

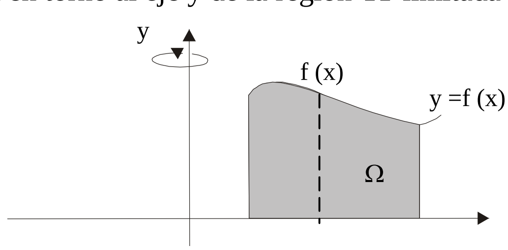
Recordemos que el área lateral de un cilindro circular recto de radio r y altura h (Fig. 17) esta dado por:

$$A = 2\pi rh$$



(Fig. 17)

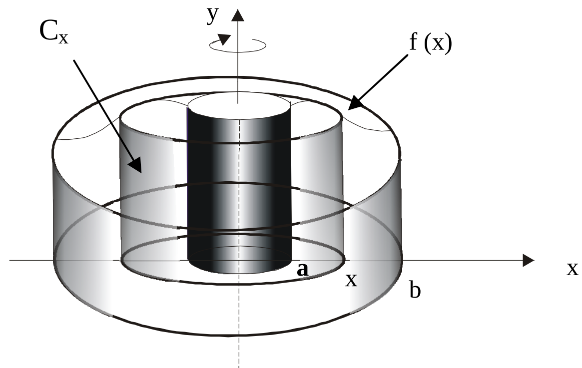
Sea f : $[a,b] \to \mathbb{R}$, $a \geq 0$, una función continua y no negativa y S el sólido de revolución obtenida por la rotación en torno al eje y de la región Ω limitada por las gráficas de y = f(x), y = 0, x = a, x = b (Fig.18).



(Fig. 18)

El sólido S (Fig. 19) puede ser considerado como la unión de los cilindros C_x, x $\in$[a,b], es decir

$$S = \bigcup_{x\in[a,b]} C_x$$



(Fig. 19)

Como el área lateral de cada cilindro C_x está dado por

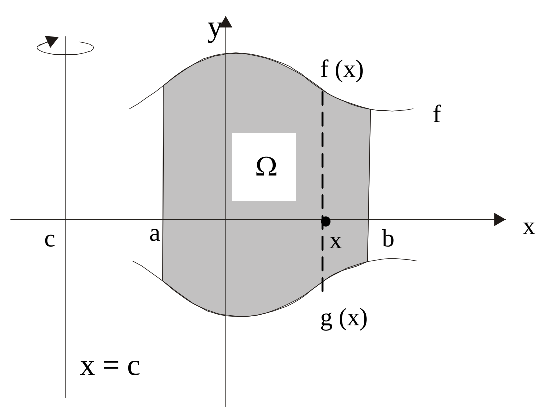
$$A(C_x) = 2\pi x f(x);\ x \in [a,b]$$

se deduce que el volumen del sólido S está dado por

$$V = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx$$

Observación. Sean f, g:$[a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $g(x) \le f(x),\ \forall x \in [a,b]$. S es el sólido de revolución obtenido al hacer rotar al rededor de la recta x = c, con $c \le a,$ la región Ω limitada por las curvas.
y = f(x), y = g(x) y las rectas x = a y x = b (Fig.20) entonces, el volumen del sólido S es:

$$V = 2\pi \int_a^b (x-c)[f(x) - g(x)]\, d\, x$$

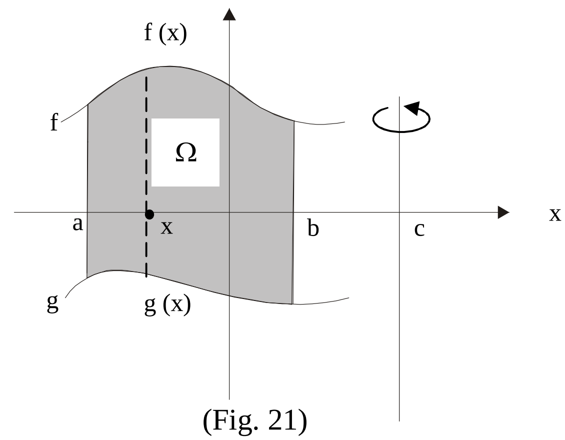


(Fig. 20)

Observación. Sea f , g: [a,b] $\to \mathbb{R}$ funciones continua tales que $g(x) \le f(x),\ \forall x \in [a,b]$. S es el sólido de revolución obtenido al hacer girar al rededor de la recta x = c, con $c \ge a,$ la región

Ω limitada por las graficas de: x = a y x = b, y = f(x), y = g(x) (Fig.21) el volumen del sólido S es

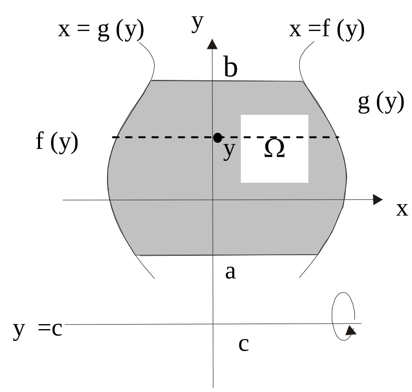
$$V = 2\pi\int_a^b (c-x)\left[f(x)-g(x)\right]dx$$



(Fig. 21)

Observación. Sean Ω, la región limitada por las gráficas de: x = f (y), x = g(y), y = a, y = b (Fig.22) donde f, g continuas en [a,b] y g(y) $\leq$ f (y), $\forall$ y $\in$[a,b] y S el sólido de revolución que se obtiene al hacer rotar la región Ω alrededor de lar recta y = c, con c $\leq$ a. El volumen de S es

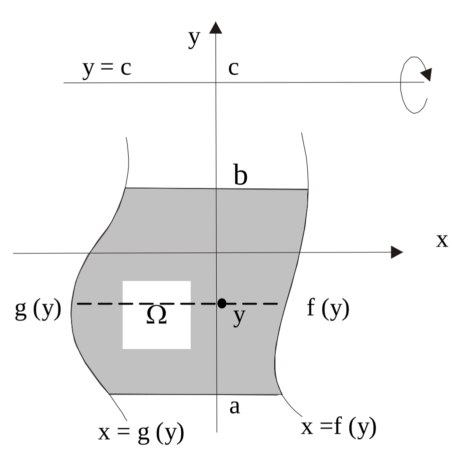
$$V = 2\pi\int_a^b (y-c)\left[f(y)-g(y)\right]dy$$



(Fig.22)

Observación. Sean Ω, la región limitada por las gráficas de: x = g(y), x = f (y), y = a, y = b (Fig.23) donde f, g continuas en [a,b] y g(y) $\leq$ f (y), $\forall$ y $\in$[a,b] y S el sólido de revolución que se obtiene al hacer rotar la región Ω alrededor de lar recta y = c, con b$\leq$ c . El volumen de S es

$$V = 2\pi\int_a^b (c-y)\left[f(y)-g(y)\right]dy$$



(Fig.23)

Ejemplo
Encontrar el volumen del sólido engendrado al girar sobre el eje y, la región limitada por la curva $y = (x - 2)^3$, el eje x la recta x = 3.

Solución

La región se muestra en la figura presente figura
Aplicando el método de la corteza, tenemos

$$V = 2\pi \int_2^3 xf(x)dx$$

$$= 2\pi \int_2^3 x(x-2)^3 dx$$

$$= 2\pi \int_2^3 (x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x)dx$$

$$= \frac{14\pi}{10} u^3$$

Ejemplo
Hallar el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por las gráficas de $x + y^2 + 3y - 6 = 0$ y $x + y - 3 = 0$, alrededor de la recta y = 3.

Solución

La gráfica de la región se muestra en la presente figura
El volumen del sólido es:

$$V = 2\pi \int_{-3}^{1} (3-y)\left[(6-3y-y^2)-(3-y)\right]dy$$

$$= 2\pi \int_{-3}^{1} (y^3 - y^2 - 9y + 9)dy$$

$$= \frac{256\pi}{3} u^3$$

Ejemplo
Calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar alrededor de la recta x = 1, la región limitada por las gráficas de: $Y = \left|x^2 - 2x - 3\right|$, $y + 1 = 0$, $x - 1 = 0$, $x - 4 = 0$.

Solución

La gráfica de la región se muestra en al presente figura
y se tiene

$$V = 2\pi \int_1^4 (x-1)\left[\left|x^2 - 2x - 3\right| + 1\right] dx$$

$$= 2\pi\{\int_1^3 (x-1)\left[\left(3 + 2x - x^2\right) + 1\right] dx + \int_3^4 (x-1)\left[\left(x^2 - 2x - 3\right) + 1\right] dx\}$$

$$= 2\pi\{\int_1^3 (-4 + 2x + 3x^2 - x^3)\, dx + \int_3^4 (x^3 - 3x^2 + 2) dx\}$$

$$= 2\pi(6 + \frac{35}{4}) = \frac{59}{2}\pi u^3$$

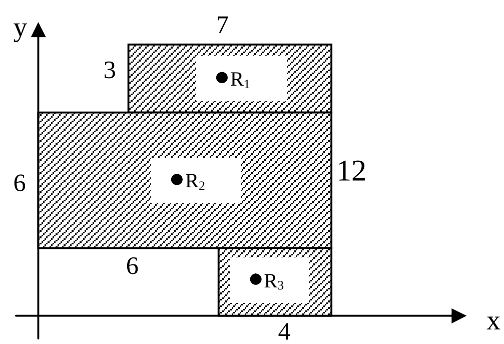
CENTRO DE GRAVEDAD DE UNA REGIÓN PLANA O LÁMINA

En primer lugar, es necesario tener en cuneta las siguientes consideraciones:

a. Una lámina es llamada homogénea si los porciones de igual área tiene el mismo peso.
b. La densidad ρ de una lámina es la masa de una unidad cuadrada de lámina. Si una lámina es homogénea, entonces su densidad (de área) ρ es constante y si A es el parea de dicha lámina, entonces su masa es m = ρ A.
c. El centro de masa de una lámina homogénea, puede pensarse con el punto de balance de la lamina tiene un centro geométrico, este será también el centro geométrico, este será también el centro de masa ó centro de gravedad. Por ejemplo el centro de masa de una lámina circular homogénea es el centro del circulo; el centro de masa de una lámina rectangular homogénea es el centro del rectángulo (intersección de las diagonales). Se define el momento de una lámina de masa m, respecto a una recta, como el momento de una partícula de masa m, situado en el centro de la lámina.
d. Si una lámina se corta en trozos, el momento de la lámina es la suma de los momentos de sus partes.

Ejemplo

Encontrar el centro de masa de una lámina homogénea de densidad ρ, que tiene la forma propuesta en la figura (la medida esta en centímetros)



(Fig.24)

Solución

La lámina está formada por 3 rectángulos y el área total De la lámina es igual al 93 cm^2. Si colocamos los ejes de Coordenadas tal como se muestra en la figura, los centros De masa de los rectángulos R_1, R_2 y R_3 son:

(13/2, 21/2), (5, 6) y (8, 3/2), respectivamente.

Luego $M_x = (21\rho)(21/2)+(60\rho)(6)+()12\rho(3/2) = 1197\rho/2$

$M_y = (21\rho)(13/2)+(60\rho)(5)+(12\rho)(8) = 969\rho/2$

Por tanto, el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de la lámina está dado por

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{969}{2}\rho}{93} = 5.209677419$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1197}{2}\rho}{93} = 6.435483871$$

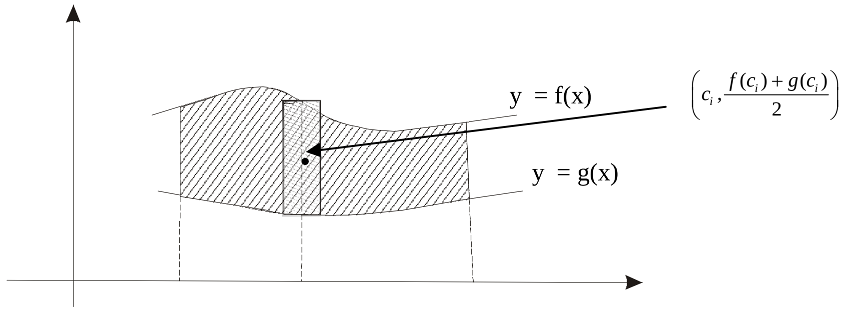
Sea F una lámina homogénea cuya densidad es constante e igual a ρ. Supongamos que F es la región limitada por las gráficas de:

$$y = f(x),\ y = g(x),\ x = a \text{ y } x = b$$

donde f y g son funciones continuas en [a, b] y $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$ (Fig. 24)

Sea P = $\{x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n\}$ una partición de [a, b] y c_i el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$; entonces se tiene que:

Mi = $\rho\,[f(c_i) - g(c_i)]\,\Delta_i x$, i = 1, 2, ….,n
es la masa del i-ésimo rectángulo sombreado en la figura



(Fig.18)

El centro de gravedad de i-ésimo rectángulo se encuentra en el punto

$$\left(c_i, \frac{f(c_i)+g(c_i)}{2}\right)$$

Sustituyendo cada rectángulo por un punto material y localizando la masa de cada rectángulo en su centro de gravedad se obtiene que los momentos de masa de los n-rectángulos, determinados por la partición, respecto a los ejes x e y son:

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \rho[f(c_i) - g(c_i)][\frac{f(c_i)+g(c_i)}{2}]\Delta_i x$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \rho[f(c_i) - g(c_i)]c_i\,\Delta_i x$$

Luego, el centro de gravedad ($\bar{x}, \bar{y}$) estará aproximadamente en el centro de gravedad de los rectángulos determinados por la partición, es decir:

$$\bar{x} \approx \frac{M_y}{m} = \frac{\rho\sum_{i=1}^{n} c_i[f(c_i) - g(c_i)]\Delta_i x}{\rho\sum_{i=1}^{n}[f(c_i) - g(c_i)]\Delta_i x}$$

$$\bar{y} \approx \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\rho\sum_{i=1}^{n}\{[f(c_i)]^2 - [g(c_i)]^2\}\Delta_i x}{\rho\sum_{i=1}^{n}[f(c_i) - g(c_i)]\Delta_i x}$$

Pasando al límite cuando $\|P\| \to 0$, se obtiene que las coordenadas ($\bar{x}, \bar{y}$) del centro de gravedad de la lámina F están dadas por:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\left[f(x) - g(x)\right]dx}{\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx}{\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx}$$

Como se observa, las coordenadas del centro de masa de la lámina homogénea no dependen de su densidad ρ, sólo depende de su forma. Usualmente al centro de masa de una lámina se le denomina ***centro de gravedad o centroide***, reservando el término ***centro de masa*** para un sólido.

Observación

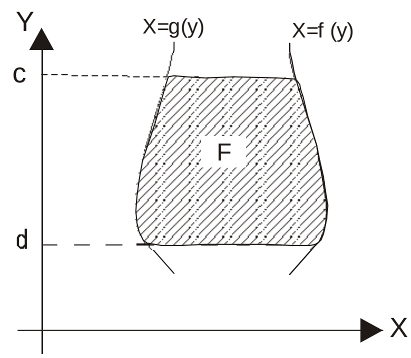
a) Si la región plana F es simétrica con respecto a la recta x = x_0, entonces $\bar{x} = x_0$

b) Si la región plana F es simétrica con respecto a la recta y = y_0, entonces $\bar{y} = y_0$.

c) Si la región plana F está limitado por las gráficas de:
X = f(y), x = g(y), y = c, y = d, donde f y g son funciones contínuas en [c, d] y f(y) $\geq$ g(y), $\forall$ y $\in$ [c, d], figura (Fig.26) , el centro de gravedad $(\bar{x}, \bar{y})$ está dado por:

$$\bar{y} = \frac{\int_c^d y[f(y) - g(y)]dy}{\int_c^d [f(y) - g(y)]dy}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{2}\int_c^d \{[f(y)]^2 - [g(y)]^2\}dy}{\int_c^d [f(y) - g(y)]dy}$$



(Fig.26)

Problema

Encontrar el centroide de la región acotada por las curvas y = x^3, y = 4x en el primer cuadrante.

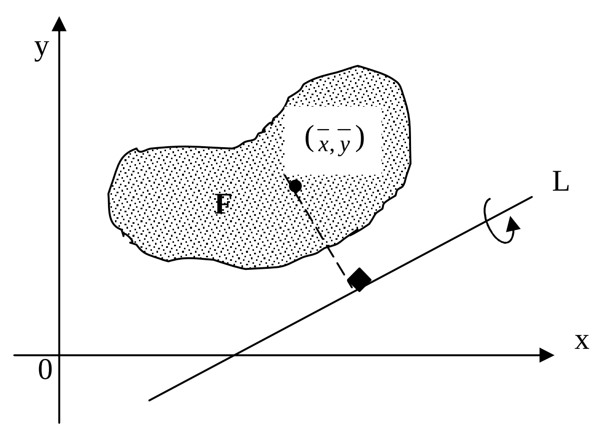
Hallar el centro de gravedad de la región limitada por las curvas $x^2 - 8y = 0$, $x^2 + 16y = 24$

Encontrar el centroide de la región limitada por las curvas $x = 2y - y^2$, x = 0

Teorema (Teorema de Papus para volúmenes)
Si un sólido S es obtenido al hacer rotar una región plana f en torno de una recta del mismo plano, que no sea secante a la región F, entonces el volumen de S es igual al área de la región f multiplicado por 2π r, siendo r el radio de la circunferencia descrito por el centro de gravedad de la región R, esto es:

$$V = 2\pi\, r.A$$

donde A es el área de F



(Fig.27)

Calcular el volumen del sólido S generado por la rotación de la región F limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta y = x + 2 en torno a esta última.