ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

PROBLEMA
Determinar el camino S recorrido por un pez durante el tiempo t. Si su velocidad es proporcional al trayecto, sabiendo que en 10 seg. el cuerpo recorre 100mts. y en 15 seg. 200mts.

Se llama ecuación diferencial a la ecuación que liga la variable independiente x, la función incógnita y = f(x) y sus derivadas $y', y'', ..., y^{(n)}$, es decir, una ecuación de la forma $F(x, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$. Es decir, una ecuación diferencial es una ecuación que depende de la derivada o derivadas de la función incógnita.

Si la función incógnita $y = f(x)$ depende de una variable independiente x, la ecuación diferencial se llama ordinaria.
Ejemplo:

1) $\frac{dy}{dx} + 2x^2 + xy = 0$
2) $y'' + 3xy' + \tan x - 8 = 0$
El orden de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden que figura en la ecuación .

Ejemplo:
1) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4xy - \ln x$
2) $4y''' - y' + \frac{y}{5} - x^2 = 0$

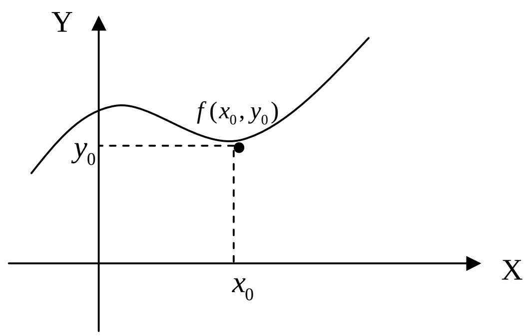
Se llama solución de una ecuación diferencial a una función $y = \varphi(x)$, determinada en el intervalo (a, b) junto con sus derivadas sucesivas hasta el orden *n* inclusive, tal que al hacer la sustitución $y = \varphi(x)$ en la ecuación diferencial, ésta, se convierte en una identidad con respecto a x en el intervalo (a, b).

Ejemplo
Dada la ecuación diferencial $y'' + y = 0$, su solución es $y = \varphi(x) = senx + \cos x$, pues derivando dos veces esta función se tiene: $y' = \cos x - senx,\ y'' = -senx - \cos x$; sustituyendo en la ecuación diferencial se comprueba la identidad, esto es, $-senx - \cos x + senx + \cos x = 0$
La gráfica de una solución de la ecuación diferencial se denomina curva integral de la ecuación.

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Dada la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, donde la función f(x,y) está definida en un recinto D el plano XOY que contiene el punto (x_0, y_0). Si la función f(x,y) satisface las condiciones:
a) f(x,y) es una función continua de dos variables x e y, en el recinto D;
b) f(x,y) admite derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$, continua con respecto de x e y en el recinto D, entonces existe una, y sólo una solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación dada que satisface a la condición $y|_{x=x_0} = y_0$.

La condición $y|_{x=x_0} = y_0$ se llama *condición inicial*.



El problema de la búsqueda de la solución de la ecuación $y' = f(x, y)$ que satisface a la condición inicial $y|_{x=x_0} = y_0$ lleva el nombre de *Cauchy*.
Geométricamente esto significa que se busca la curva integral que pasa por el punto dado $f(x_0, y_0)$ del plano XOY según la figura.

CAMPO DIRECCIONAL
La ecuación $y' = f(x, y)$ determina en cada punto (x, y) donde existe la función f(x,y), el valor de la pendiente a la curva integral en este punto.

Por lo tanto, la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ determina un campo de direcciones.
La terna (x, y , y’) determina la dirección de una recta que pasa por el punto (x,y). El conjunto de los segmentos de estas rectas es la representación geométrica del campo de direcciones.

EJEMPLO
1) Hallar el campo direccional de $y' = 2x$

2) Hallar el campo direccional de $y' = \frac{-x}{4y}$

ECUACIONES DIFERECIALES ORDINARIAS (EDO) DE PRIMER ORDEN

Son ecuaciones diferenciales de la forma F(x, y, y’) = 0.

Si despejamos la derivada y’ de F(x, y, y’) = 0 tendríamos lo siguiente: $y' = \frac{dy}{dx} = g(x, y)$.

1) Ecuaciones diferenciales ordinarias de variable separable. Si se tiene que la ecuación diferencial F(x, y, y’) = 0 se puede expresar como: $y' = \frac{dy}{dx} = g(x, y)$ entonces es factible expresar esta a su vez de la forma

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

La solución general de (*) se obtiene integrándola directamente.

$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$, donde C es una constate de integración.

EJEMPLO

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $xy' - y = y^3$

b) $(y^2 + xy^2)\frac{dy}{dx} + x^2 - x^2 y = 0$

c) $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\,y' = 0$

d) $e^{2x-y}dx + e^{y-2x}dy = 0$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$

f) Encontrar la solución particular de $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} - \frac{x}{1+y}$, $y(0) = 1$

g) Encontrar la solución particular de $y^2 y' - x^2 = 0$, $y(-2) = -2$

2) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Homogéneas.

a) Función Homogénea: Una función f(x,y) se denomina homogénea de grado k, en x e y , sí y solo sí, cumple con la siguiente condición:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$$

Ejemplo

1. $f(x, y) = x^2 y - 4y^3$ es homogénea de grado 3
2. $f(x, y) = e^x$ no es homogénea
3. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ es homogénea de grado 0 en x e y.

b) Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de primer grado es de la forma:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

es homogénea si M y N son homogéneas del mismo grado en x e y.

c) Solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria Homogénea (EDOH). Para solucionar una EDOH, se hace un cambio de variable y = ux, entonces aplicando diferencial se tiene: dy = u dx + x du, luego se reemplaza en la función homogénea dada, de tal forma que queda como una Ecuaciones diferencial ordinaria de variable separable.

Ejemplo:

Resolver: $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2 dy = 0$

Resolver: $xy' = 2(y - \sqrt{xy})$

Resolver: $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$

3) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Exactas.

a) Diferencial total:

Si $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, es una función diferenciable (x,y)$\in \mathbb{R}$, entonces la diferencial total de f es la función df, cuyo valor esta dado por: $df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$.

b) Diferencial Exacta:

Una expresión de la forma M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, se denomina exacta si existe una función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que: $df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$.

Es decir, que toda expresión que es la diferencial total de alguna función de x e y se llama diferencial exacta.

c) Definición Consideremos la ecuación diferencial.

M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0…………….(1)

Si existe una función z = f(x,y) tal que:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \text{ y } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Diremos que la ecuación (1) es una ecuación diferencial exacta.

d) Teorema: La condición necesaria y suficiente para que una ecuación diferencial M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, sea exacta, es que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Ejemplo: La ecuación diferencial ordinaria:

$(e^x seny - 2ysenx)dx + (e^x \cos y + 2\cos x)dy$ pues

$$M(x,y) = e^x seny - 2ysenx \to \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y - 2senx$$

$$N(x,y) = e^x \cos y + 2\cos x \to \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^x \cos y - 2senx$$

De donde $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

e) Solución de una Ecuación Diferencial Exacta:

Consideremos la ecuación exacta M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 ………..(1)

Entonces existe una función f(x,y) tal que: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ y

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ reemplazando en la ecuación (1) se tiene:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy = 0$ ……….(2) si z = f(x,y) entonces su diferencial total

es: $dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$ ………….(3)

Luego de (2) y (3) tenemos dz = 0 entonces, f(x,y) = c

Que es la solución de la ecuación diferencial.

Como $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ integramos con respecto a x.

$f(x,y) = \int M(x,y) + g'(y)$ ……….(4)

de donde g(y) es la constante de integración, que es una función que depende sólod e la variable y, puesto que la integración es con respecto a x, derivando la ecuación (4) con respecto a y, es decir, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y)$

Como $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ entonces se tiene:

$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y)$ N(x,y) de donde $g'(y)N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$,

integrando $g'(y) = \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy + k_1$........(5)

Reemplazando (5) en (4) se tiene la solución general de la ecuación diferencial (1); en forma análoga se hace para el otro caso cuando se toma $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ y se integre con respecto a la variable y.

Ejemplo: Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $(2xy^2 + 2y)dx + (2x^2y + 2x)dy = 0$

b) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$

4) ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Sea la ecuación diferencial ordinaria: $a_1(x)\dfrac{dy}{dx}+a_2(x)y=f(x)$ …………..(1)

Donde $a1, a2$ y f son funciones solamente de x o constantes.

Suponiendo que $a_1(x)\neq 0$, entonces, dividiendo a la ecuación (1) por $a_1(x)$ se tiene $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{a_2(x)}{a_1(x)}y=\dfrac{f(x)}{a_1(x)}$, de donde se tiene:

$\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$ …………….(2), esta ecuación es una ecuación diferencial lineal de primer orden en y. Si $Q(x)=0$, esto es, $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=0$ toma el nombre de ecuación diferencial lineal homogénea y una ecuación de variable separable cuya solución es: $y=Ke^{-\int p(x)dx}$.

La ecuación (2) tiene como solución: $y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx+c\right]$

EJEMPLO

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $\dfrac{dy}{dx}+2y=x^2+2x$

b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{e^y-x}$

c) $\left(x^5+3y\right)dx-xdy=0$

5)ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE 2° ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES.

a) ECUACIONES HOMOGÉNEAS. La ecuación lineal homogénea de 2° orden con coeficientes constantes p y q, es de la forma $ay''+by+cy=0$ ……….(1)

Si k_1 y k_2 son las raíces de la ecuación característica $ak^2+bk+c=0$ se presentan los siguientes casos:

1) la solución de la ecuación (1) es $y=C_1e^{k_1}x+C_2e^{k_2}x$, si k_1 y k_2 son reales y $k_1 \neq \mathrm{k}_2$.

2) la solución de la ecuación (1) es $y=e^{k_1x}(C_1+C_2x)$, si k_1 y k_2 son reales y $k_1=\mathrm{k}_2$.

3) la solución de la ecuación (1) es $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\cos\beta x)$, si $k_1=\alpha+\beta i$ y $\mathrm{k}_2=\alpha-\beta i,\ \beta\neq$ son reales y $k_1\neq\mathrm{k}_2$.

b) ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS La solución general de la ecuación diferencial lineal no homogénea

$$ay''+by+cy=f(x)\text{ …….(2)}$$

Se puede escribir en forma de suma $y=y_0+Y$

donde y_0 es la solución general correspondiente a la ecuación (1), que se determina por las fórmulas del 1) al 3), Y es la una solución particular de la ecuación (2).

La función Y se puede hallar por el método de los coeficientes indeterminados en los siguientes casos.

1. $f(x)=e^{a_1x}P_n(x)$ donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n.

Si a_1 no es raíz de la ecuación característica, se considera a $Y=e^{a_1x}Q_n(x),$ donde $Q_n(x)$ es un polinomio de grado n con coeficientes indeterminados.

Si a_1 es raíz de la ecuación característica, se considera $Y=x^re^{a_1x}Q_n(x)$, donde r es el grado de multiplicada de la raíz a_1 (r =1 o r = 2).

2. $f(x)=e^{a_1x}\left[P_n(x)\cos bx+Q_m(x)senbx\right]$.

Si las raíces de la función característica no son complejas, se considera $Y=e^{a_1x}\left[S_N(x)\cos bx+T_N(x)senbx\right]$, donde $S_N(x)$ y $T_N(x)$ son polinomios de grado $N=\max\{n,m\}$

Si las raíces de la función característica son números complejos, se considera $Y=x^re^{a_1x}\left[S_N(x)\cos bx+T_N(x)senbx\right]$, donde r es el grado de multiplicidad de la raíz compleja (para la ecuación de 2° orden r =1)

EJEMPLO

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $2y''-y'-y=4xe^{2x}$

2) $y'' - 2y + y = xe^{x}$

3) $y'' + y = xsenx$

6. SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES CONSTANTES

Un sistema de "n" ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en las funciones incógnitas.

$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), ..., x_n = \varphi_n(t),$ son funciones diferenciables con derivadas continuas en < a, b >

Forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ . \\ . \\ . \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}$$

MÉTODO: Reducción de un sistema a una E.D. de n-ésimo orden

Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + f(t) \\ \dfrac{dy}{dx} = cx + dy + g(t) \end{cases}$$

Donde a, b, c, d son constantes f(t) y g(t) son funciones conocidas: x(t) e y(t) son las funciones incógnitas.

Despejando y en la primera ecuación y luego remplazando en la segunda ecuación se tiene: $\frac{1}{b}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{adx}{dt}-\frac{d}{dt}(f(t))-cx-\frac{d}{b}\left(\frac{dx}{dt}-ax-f(t)\right)-g(t)=0$, simplificando resulta: $A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{dx}{dt}+Cx=R(t)$

donde A, B, C son constantes que es una ecuación diferencial de coeficientes constantes.

Ejemplo

Resolver:

1)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3-2y \\ \dfrac{dy}{dx}=2x-2t \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-2y \\ \dfrac{dy}{dx}=x+3y \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x-\dfrac{1}{2}y-3t^2+\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{dy}{dx}=2y-2t-1 \end{cases}$$

3. ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR .

Una ecuación diferencial de n-ésimo orden se puede escribir simbólicamente de la siguiente forma:

$$F(x, y, y'', \ldots, y^{(n)})$$

Si es posible resolverse respecto a la n-ésima derivada,
$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$,

TEOREMA: Si en la ecuación $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ la función $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ y sus derivadas parciales respecto a los argumentos $y, y', ..., y^{(n-1)}$ son continuas con un cierto dominio que contiene los valores $x = x_0, y = y_0, y' = y_0, ..., y^{(n-1)} = y_0{}^{(n-1)}$, existe solamente la solución única y = y(x) de la ecuación que satisface las condiciones

$$y_{x=x_0} y_0, y'_{x=x_0} = y'_0, ..., y^{(n-1)}_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

Estas condiciones se llaman iniciales.

Para una ecuación de segundo orden $y'' = f(x, y, y')$, las condiciones iniciales de la solución para $x = x_0$ serán: $y = y_0$, $y' = y_0'$, donde x_0, y_0, y_0' son números dados (conocidos).

DEFINICIÓN: Se llama solución general de una ecuación diferencial de n-ésimo orden a la función

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, ...c_n)$$

Qué depende de n constantes arbitrarias $c_1, c_2, ...c_n$ de tal modo que:

a) Satisface la ecuación culesquiera que sean los valores de los constantes
b) Para las condiciones iniciales dadas:

$$y_{x=x_0} = y_0$$
$$y'_{x=x_0} = y_0'$$
$$...$$
$$y^{(n-1)}_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

Se puede elegir las constantes $c_1, c_2, \ldots c_n$ así que la función $y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots c_n)$ satisfaga estas condiciones (suponiendo que los valores iniciales $x = x_0, y = y_0, y' = y_0, \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$) pertenezcan al dominio de existencia de la solución)

OBSERVACIÓN: Resolver una ecuación diferencial de n-esimo orden significa:

1) Hallar su solución general (si no se han dado las condiciones iniciales), a).
2) Hallar tal solución particular de la ecuación que satisfaga las condiciones iniciales dadas (si éstas existen).

4. ECUACIÓN DE LA FORMA $y^{(n)} = f(x)$

La ecuación de la forma $y^{(n)} = f(x)$ es la más simple de n-ésimo orden. Para resolver este tipo de ecuaciones se integra n veces.

Ejemplo

Hallar la integral general de ecuación $y'' = sen(kx)$ y la solución particular que satifaga las condiciones iniciales: $y_{x=0};\ y'_{x=0} = 1$ equivalentemente $y(0) = 0;\ y'(0) = 1$

Solución

$$y' = \int_0^x senkx + c_1 \Rightarrow y' = \frac{-1}{x} \cos kx \,|_0^x + C_1 = -\frac{1}{k}(\cos kx - 1) + C_1$$

$$y = -\frac{1}{k}\int_0^x (\cos kx - 1)dx + C_1 \int_0^x dx + C_2 \quad \Rightarrow y = -\frac{1}{k}[(\frac{1}{k} senkx - x)] + C_1 x + C_2$$

$$y = -(\frac{senkx - x}{k^2}) + C_1 x + C_2 \ \ (Integral\, General)$$

$$\Rightarrow y(0) = 0,\ 0 = C_2 \ \ \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\Rightarrow y'(0) = -\frac{1}{k}(\cos k0 - 1) + C_1 \Rightarrow 1 = C_1 \Rightarrow C_1 = 1$$

La solución particular $y = -\dfrac{(senkx - x)}{k^2} + \dfrac{x}{k} \Rightarrow y = -\dfrac{senk}{k^2} + x(\dfrac{1}{k} + 1)$

5. ALGUNOS TIPOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN QUE SE REDUCEN A ECUACIONES DE PRIMER OREDEN.

5.1. ECUACIONES DE LA FORMA:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

No contiene explícitamente la función desconocida y.

Solución: Hacer $\frac{dy}{dx} = P \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dP}{dx} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$

Reemplazando (α) *en* (1)

$$\frac{dP}{dx} = f(x, P) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Donde P es la función desconocida de x. Integrando (2) $P = P(x, C_1)$ y luego

$$\frac{dy}{dx} = P \Rightarrow y = \int P(x, C_1)dx + C_2$$

EJEMPLO

Resolver $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$

SOLUCIÓN

$$\frac{dy}{dx} = P \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dP}{dx}$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{1+P^2} \Rightarrow \frac{dP}{\sqrt{1+P^2}} = \frac{dx}{a} \Rightarrow \ln(P + \sqrt{1+P^2}) = \frac{x}{a} + C_1$$

$$\Rightarrow P + \sqrt{1+P^2} = e^{\frac{x}{a}+C_1} \Rightarrow \sqrt{1+P^2} = e^{\frac{x}{a}+C_1} - P$$

$$1+P^2 = e^{2(\frac{x}{a}+C_1)} - 2Pe^{\frac{x}{a}+C_1} + P^2$$

$$2Pe^{\frac{x}{a}+C_1} = e^{2(\frac{x}{a}+C_1)} - 1$$

Como $P = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}+C_1}) - e^{-(\frac{x}{a}+C_1)}$

$$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}+C_1} - e^{-(\frac{x}{a}+C_1)}) + C_2$$

OBSERVACIÓN

De forma análoga se puede integrar la ecuación $y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$ poniendo $y^{(n-1)} = P$ $\frac{dP}{dx} = f(x,P)$

5.2. La ecuación de la forma: $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y, \frac{dy}{dx})$.............................(2) no contiene explícitamente la variable x.

Hacer $\frac{dy}{dx} = P \quad \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dy}P$........................$(\alpha)$

Reemplazando (α) en (2)

$\frac{dP}{dx} = f(y,P)$ integrando se tiene:

$$P = P(y, C_1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = P(y, C_1)$$

$$\frac{dy}{P(y,C_1)} = dx \Rightarrow \varphi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

EJEMPLO

Resolver $3y'' = y^{-\frac{5}{3}}$

Solución

$$\frac{dy}{dx}=P\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dP}{dy}\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dP}{dy}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2}=P\frac{dP}{dx}\Rightarrow 3P\frac{dP}{dy}=y^{\frac{-5}{3}}$$

$$3Pdp=y^{-\frac{5}{3}}dy\ 3\frac{P^2}{2}+C_1=-\frac{3}{2}y^{-\frac{2}{3}}\Rightarrow 3\frac{P^2}{2}=-\frac{3}{2}y^{-\frac{2}{3}}+C_1$$

$$\Rightarrow P^2=-y^{-\frac{2}{3}}+C_1$$

$$P=\pm\sqrt{C_1-y^{-\frac{2}{3}}}\text{como } P=\frac{dy}{dx}$$

6. ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS DEFINICIONES Y PROPIEDADES GENERALES.

Ecuaciones diferenciales lineales n-ésimo orden es de la forma
$a_n y^n + a_{n-1}y^{n-1}+...+a_2 y''+a_1 y'+a_0 y = f(x)$....................(1)

Si f(x) = 0 la ecuación (1) toma el nombre de E. D. Lineal Homogénea.

Si f(x) $\neq$ 0 la ecuación (1) toma el nombre de E. D. Lineal no Homogénea.

Donde $a_0, a_1, a_2, ...a_n\ y\ f(x)$ son funciones dados en x o constantes y $a_n \neq 0$ para todos los valores de x, en el dominio de definición de (1).

TEOREMA: Si y_1 e y_2 son dos soluciones particulares de la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$y''+a_1 y'+a_2 y=0.........................(2)$$

Entonces, $y_1 + y_2$ es también la solución de esta ecuación.

TEOREMA: Si y_1 es una solución de la ecuación de (2), y C es una constante, el producto C y_1 es, también, una solución de esta ecuación (2).

DEFINICIÓN: Dos soluciones y_1 e y_2 de la ecuación (2) se llaman linealmente independiente en el segmento $[a,b]$ si $\frac{y_1}{y_2} \neq$ constante.

De lo contrario, las soluciones se llaman linealmente independiente.

EJEMPLO

Dada la ecuación y'' – y = 0

$\Rightarrow$ tiene como soluciones las funciones $e^x, e^{-x}, 3e^x, 5e^{-x}$

$\Rightarrow \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$ no permanece constante cuando varía x.

$\frac{3e^x}{e^x} = 3 = cte \quad \therefore \; 3e^x$ y e^x son L.D.

DEFINICIÓN: Si y_1 e y_2 son las funciones de x, entonces el determinante

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

Se llama determinante de Wronski o, simplemente, Wronskiano de las funciones dadas.

TEOREMA: Si las funciones y_1 e y_2 son L.D. en el segmento $[a,b]$, el Wronskiano es ese segmento es idénticamente igual a cero.

TEOREMA: Si el Wronskiano W(y_1, y_2), de las soluciones y_1 e y_2 de la ecuación lineal homogénea (2) no se anula en un punto $x = x_0$ del segmento $[a,b]$, donde los coeficientes de la ecuación son continuas, entonces no se anulan para cualquier valor x en $[a,b]$.

OBSERVACIÓN:

Si el Wrosnkiano es nulo para cierto valor de $x = x_0$, este determinante también es igual a cero para cualquier valor de x en el segmento considerado.

TEOREMA: Si las soluciones y_1 e y_2 de la ecuación (2) son L.I. en el segmento $[a,b]$, el Wrosnkiano W formado para estas soluciones no se reducen a cero en ningún punto del segmento indicado.

TEOREMA: Si y_1 e y_2 son dos soluciones L.I. de la ecuación (2), entonces:

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Esta es la solución general de la ecuación (2).

TEOREMA: Si se conoce una solución particular de una ecuación lineal homogénea de segundo orden, la búsqueda de la solución general se reduce a la integración de funciones. Esto es dada una solución particular conocida y_1 de la ecuación (2), entonces la solución general de la ecuación (2) tiene la forma:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx$$

Ejemplo:Hallar la solución general de la ecuación $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ si se sabe que tiene una solución particular $y_1 = x$

7. ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Forma: $y'' + py' + qy = 0$, donde p y q son números constantes reales.
Tomando como soluciones particulares lineal mente independientes $y = e^{kx}$, donde k = constante; entonces, $y' = ke^{kx}$; $y'' = k^2 e^{kx}$.

Introduciendo las expresiones obtenidas de las derivadas en la ecuación (2) hallamos: $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$. Siendo $e^{kx} \neq 0$, resulta que

$$k^2 + pk + q = 0 \quad \text{.......................(3)}$$

La ecuación (3) se llama *ecuación característica* respecto a la ecuación (2).

En general para una ecuación de la forma:

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + a_{n-2} y^{n-2} + ... + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \text{..........(4)}$$

Se tiene $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \dots + a_2 r^2 + a_1 r^1 + a_0 = 0$

(Ecuación característica o auxiliar que es una ecuación algebraica de grado n)

Al resolver da $r_1, r_2, \dots, r_n$ raíces

Casos:

a) Las raíces son reales y diferentes la solución es:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}$$

b) Las raíces son reales y múltiples:

$r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_m = r$, las m raíces iguales n – m raíces diferentes

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_m x^{m-1}) e^{rx} + C_{m+1} e^{r_{m+1} x} + \dots C_n e^{r_m x}$$

c) Si las raíces son imaginarias

$r_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $r_1 = \alpha_1 - i\beta_1$

$$y = e^{\alpha_1 x} [A \cos \beta_1 x + B sen \beta_1 x] + e^{\alpha_2 x} [A \cos \beta_2 x + B sen \beta_2 x] + \dots$$

d) Las raíces son imaginarias y múltiples

$r_1 = r_3 = \alpha_1 + i\beta_1 = q_1 \quad r_2 = r_4 = \alpha_1 - i\beta_1 = q_2$

$$y = e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots C_k x^{k-1}) sen \beta x + (C_{k+1} + C^{k+2} x + C_{k+3} x^2 + \dots C_{2k} x^{k-1}) \cos \beta x]$$

8. ECUACION DIFERENCIAL LINEAL NO HOMOGENEAS CON COEFICIENTE CONSTANTE.

Forma:

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + a_{n-2} y^{n-2} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$ ..... (1)

Donde: $a_n \neq 0$

La solución de esta EDLNHCCC, está dado por:

$$y(x) = y_p + y_h$$

Donde y_h es la solución de la ecuación lineal siguiente

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + a_{n-2} y^{n-2} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

y y_p es llamada solución particular de (1) . g(x) es llamado término perturbador que tiene la siguiente forma:

$$g(x) = (b_m x^m + \ldots b_1 x + b_0)\ e^{qx}, b_m \neq 0$$

$a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0;\ b_m, \ldots b_1, b_0$ no necesariamente reales.

Para determinar una solución particular y_p se procede de la siguiente manera.

CASO I. *Consideremos para la solución particular* y_p *la forma*:

$$yp(x) = (\beta_m x^m + \ldots \beta_1 x + \beta_0)\ e^{qx} x^l$$ ……………………….(2)

Que nos lleva siempre a una solución.

a) Para determinar *l* hay que considerar la ecuación característica $a_n\lambda^n + ... + a_1\lambda + a_0 = P_n(\lambda) = 0$ de la ecuación homogénea

$$a_n y^n + a_{n-1}y^{n-1} + a_{n-2}y^{n-2} + ... + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

b) Si *q* no es una solución de $P_n(\lambda) = 0$ se hace *l* = 0 .

c) Si *q* es una solución de $P_n(\lambda) = 0$, entonces *l* es igual al número de veces que ser repite *q* como solución.

d) Para determinar $\beta_m, ..., \beta_1, \beta_0$

NOTA:

Los coeficientes $\beta_m, ..., \beta_1, \beta_0$ deben escribirse, aunque alguno de los $b_m, ..., b_1, b_0$ fuesen cero.

EJEMPLO

Resolver $y'' - 2y' + 2y = 2x^2 e^x$ …………………..*

Solución

Del segundo miembro de ecuación (*) se tiene que *q* = 1, luego analizando la ecuación característica $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ se tiene que $\lambda_1 = 1 + i,\ \lambda_2 = 1 - i$. Es obvio que λ_1, λ_2 son diferentes a *q*, por lo tanto *l* = 0.

$$y_p(x) = (\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0)e^x$$

$$y_p'(x) = (2\beta_2 x + \beta_1)e^x + (\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0)e^x$$

$$y_p''(x) = 2\beta_2 x e^x + (2\beta_2 x + \beta_1)e^x + (\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0)e^x + e^x(\beta_1 + 2\beta_2 x)$$

Reemplazando $y_p(x),\ y'_p(x),\ y''_p(x)$ en la ecuación (*) y ordenado se tiene:

$$(\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0 + 2\beta_2)e^x = 2x^2 e^x$$

$$\Rightarrow \beta_2 = 2,\ \beta_1 = 0,\ \beta_0 + 2\beta_2 = 0,\ \beta_0 = -4$$

Por lo tanto una solución particular de la EDNHCCC es $y_p = (-4 + 2x^2)e^x$

Solución general:

$$y(x) = (-4x + 2x^2)e^x + C_1 e^{(1+i)x} + C_2 e^{(1-i)x}$$

EJEMPLO

Resolver $3y''' - 12y' = 18x^2 + 16x$

Solución

Del segundo miembro, se tiene que q = 0, y resolviendo la ecuación característica resulta $\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 2;\ \lambda_3 = -2$, en consecuencia una de las raíces características es igual a q, por lo tanto, l = 1

La solución particular de la ecuación tiene la forma:

$$y_p(x) = (\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0)x = \beta_2 x^3 + \beta_1 x^2 + \beta_0 x$$
$$y_p^{'}(x) = \beta_0 + 2\beta_1 x + 3\beta_2 x^2$$
$$y_p^{''}(x) = 2\beta_1 + 6\beta_2 x$$
$$y_p^{'''}(x) = 6\beta_2$$

Reemplazando en (*)

$$-36\beta_2 x^2 - 24\beta_1 x - 12\beta_0 - 18\beta_2 = 18x^2 + 16x$$

$$\Rightarrow -36\beta_2 = 18 \quad \Rightarrow \beta_2 = \frac{-1}{2}$$
$$-24\beta_1 = 16 \quad \Rightarrow \beta_1 = \frac{-2}{3}$$
$$18\beta_2 - 12\beta_0 = 0 \quad \Rightarrow \beta_0 = \frac{-3}{4}$$

Solución general

$$y(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$$

CASO II Veamos ahora cuado *g(x)* tiene las formas:

$$g(x) = (b_m x^m + ...b_1 x + b_0)\, e^{\alpha x} \cos \beta x$$ ....(1')

$$g(x) = (b_m x^m + ...b_1 x + b_0)\, e^{\alpha x} sen \beta x$$ ....(2')

Donde $b_m \neq 0;\ \alpha,\ \ \beta \in \mathbb{R},\ \ b_0,...b_m \in \mathbb{R},\ \ a_0,...,a_n \in \mathbb{R}$

Entonces la solución particular de la EDLNHCCC es:

Para (1') $\quad y_p = \mathrm{Re}(\widetilde{y_p}(x));\ \ \mathrm{Re}:$ parte real.

Para (2') $\quad y_p = \mathrm{Im}(\widetilde{y_p}(x));\ \ \mathrm{Im}:$ parte imaginaria.

Donde $\widetilde{y_p}(x)$ es solución particular de:

$$a_n \widetilde{y}^{\,n}(x) + ... + a_1 \widetilde{y}'(x) + a_0 \widetilde{y}(x) = (b_m x^m + ...b_1 x + b_0) e^{qx}$$

Donde $q = \alpha + \beta i$

EJEMPLO

Resolver $y'' + 4y' + 8y = 20 sen 2x$

Solución

Del segundo miembro de la ecuación se tiene que *q*= 2*i* , $b_0 = 20,\ \alpha = 0,\ \beta = 2$

Luego resolviendo la ecuación característica

Se tiene $\lambda_1 = -2 + 2i,\ \lambda_2 = -2 - 2i$ que son diferentes a *q*.

$\widetilde{y_p}(x) = \beta_0 e^{2ix}$ para determinar β_0, calcular $\widetilde{y_p}'(x)\ y\ \widetilde{y_p}''(x)$ y remplazarlo en la ecuación, en forma ordenada y despejando, se tiene:

$$-4\beta_0 + 8\beta_0 i + 8\beta_0 = 20 \Rightarrow \beta_0 = \frac{5}{1+2i}\left(\frac{1-2i}{1-2i}\right) = 1 - 2i$$

$$\widetilde{y_p}(x) = (1-2i)e^{2ix} = (1-2i)(\cos 2x + i\, sen 2x)$$

$$\widetilde{y_p}(x) = (\cos 2x + 2 sen 2x) + i(-2\cos 2x + sen 2x)$$

$$\therefore\ \widetilde{y_p}(x) = \operatorname{Im}(\widetilde{y_p}(x)) = -2\cos 2x + sen2x$$

$$\therefore\ y(x) = -2\cos 2x + sen2x + C_1 e^{(-2+2i)x} + C_2 e^{(-2-i)x}$$