Lógica de predicados de Primer Orden

LENGUAJE

- Sintaxis: Deben ser fórmulas bien formadas (FORM)
- Semántica: Tener Interpretación - valoración

SISTEMA FORMAL

- Lenguaje
- Axiomas
- Reglas de inferencia

Todo Cerdo es un Mamífero **y Piglets es un Cerdo**, **luego** Piglets es un Mamífero.

$$\forall x\ (Cerdo(x) \rightarrow Mamífero\ (x))$$

$$\forall x.\ C(x)\ /\ C(Piglets)$$

$$Cerdo\ (Piglets)\ ,\ Mamífero\ (Piglets)$$

La Lógica proposicional NO es suficientemente expresiva para captar esta relación

- Lógica proposicional : bajo poder expresivo, alto nivel matemático.
- Muchas expresiones usuales no son representables

En Lógica proposicional:

p (una prop. atómica)

Piglets es un cerdo

En predicados:

Sujeto: Piglets

Propiedad: Ser Cerdo

Cerdo (Piglets)

Tenemos…

Por ejemplo la oración

Piglets es un Cerdo

Podemos analizar:

Es (Piglets, Cerdo)

Es-cerdo (Piglets)

Es-Piglets (Cerdo)

Según la propiedad o relación que se identifique, y según los individuos del universo de quienes se hable.

NOTACION DE OBJETOS

- símbolos de constante (ejm. Rex, 2, π)
- símbolos de variable (ejm. x, y, z)
- símbolos de función (ejm. +, *, Padre) etc

símbolos de propiedades y de relaciones

conectivos

cuantificadores

Ejercicios 1

Si algunos perros son mamíferos, luego todos son mamíferos

$$(\exists x)\,(P(x) \wedge M(x)) \rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow M(x))$$

Todo número es par o impar

$$(\forall x)\,(N(x) \rightarrow P(x) \vee I(x))$$

$$(\forall x)\,(N(x) \rightarrow P(x) \vee \neg P(x))$$

Ningún número es a la vez par e impar

$$\neg(\exists x)\,(P(x) \wedge I(x))$$

Más ejercicios…2

Toda ave tiene alas y plumas

$(\forall\ x)\ (Av(x) \rightarrow Als(x) \wedge Pls(x)\ )$

Existen aves que no vuelan

$(\exists x)\ (Av(x) \wedge \neg\ Vu(x))$

Para todo número natural hay otro natural que es mayor que el.

$(\forall\ x)\ (\ N(x) \rightarrow (\exists\ y)\ (N(y) \wedge y>x\ )\ )$

¡la secuencia de cuantificadores !

$(\exists\ y)\ (\forall\ x\ )\ (\ N(x) \rightarrow (\ N(y) \wedge\ y>x\ )\ )$

Más ejercicios… 3

La suma de dos pares es par

$(\forall x)(\forall y)\ (Par(x) \wedge Par(y) \rightarrow Par(x+y))$

Existen mamíferos que ponen huevos.

Algunos programas están orientado a objetos.

No todos los cocodrilos lloran de pena.

Todos los reptiles ponen huevos.

En matemática usamos algunas convenciones informales para indicar dominios:

– naturales: n, m, k

– reales: x, y, z

– fórmulas lógicas: α, β, φ

– Conjuntos de fórmulas: Γ, Δ

En Lógica de predicados los objetos pertenecen todos a un mismo universo.

– No hay forma de diferenciar sintácticamente los distintos dominios

A esto denominamos universo de discurso

Cuando es necesario particionar el universo de discurso en clases de objetos, utilizamos símbolos de propiedad para referenciar los objetos de la subclase:

– Todo natural es par o impar:

$$(\forall x)\ (N(x) \rightarrow P(x) \lor I(x))$$

Si la naturaleza de los objetos de quienes hablamos está sobreentendida (ej. hablamos siempre de fórmulas, naturales, reales, etc.) podemos obviar el símbolo de propiedad respectivo

Por ejm. Si sólo hablamos de naturales

$$(\forall x)\ (P(x) \lor I(x))$$

Si algunos trenes se retasan entonces todos se retrasan.

$$(\exists x)\ (T(x) \land R(x)) \rightarrow (\forall x)\ (T(x) \rightarrow R(x)\ )$$

Por ejm. si sólo hablamos de trenes

$$(\exists x)\ R(x) \rightarrow (\forall x)\ R(x)$$

Símbolos de un lenguaje de primer orden

- Símbolos de relación: $P_1, P_2, \ldots, P_n, =$‘
- Símbolos de función: $f_1, f_2, \ldots, f_m$
- Símbolos de constantes: $\underline{c}_i$ $tal\ que\ i \in I\ y\ |I| = k$
- Variables: $x_1, x_2, x_3, \ldots$
- Conectivos : $\rightarrow \leftrightarrow \neg \wedge \vee$
- Cuantificadores: $\forall, \exists$
- Auxiliares : (,)

Términos:

El conjunto TERM de los *términos de un lenguaje de primer orden* se define inductivamente por:

ι) $x_i \in \mathrm{TERM}\ (i \in \mathbf{N})$

ιι) $\underline{c}_i \in \mathrm{TERM}\ (i \in \mathrm{I})$

ιιι) si $t_1 \in \mathrm{TERM}, \ldots\ t_{ai} \in \mathrm{TERM}$

entonces $f_i\,(t_1, .. t_{ai}) \in \mathrm{TERM}$

FBFs (FORM)

El conjunto FORM de las *fórmulas de un lenguaje de primer orden* se define inductivamente por:

ι) Si $t_1 \in$ **TERM**, ...$t_{ri} \in$ **TERM** entonces

$\mathbf{P_j(t_1, \ldots, t_{ri}) \in FORM}$

ιι) Si $\alpha \in$ FORM y $\beta \in$ FORM entonces

$(\alpha \square \beta) \in$ FORM donde $\square \in \{\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee\}$

ιιι) Si $\alpha \in$ FORM entonces $(\neg \alpha) \in$ FORM

ιν) Si $\alpha \in$ FORM entonces $((\forall x_i)\, \alpha) \in$ FORM

y $((\exists x_i)\, \alpha) \in$ FORM

Tenemos átomos:

MayorQue(7,2)

P

MenorQue(4,15)

Hermano(Atahualpa, Huascar)

Ejemplo de fbfs de predicados.

[MayorQue(7,2) $\wedge$ MenorQue(4,15)] $\vee$ $\neg$ Hermano(Atahualpa, Huascar) $\vee$ P

// es un ejemplo, no necesariamente significan algo.

Más Ejemplos

- $\text{Padre}(x, y) \rightarrow \text{Hijo}(y, x)$
- $\text{Padre}(x, y) \wedge \text{Padre}(y, z) \rightarrow \text{Abuelo}(x, z)$
- $\text{Mamífero}(x) \rightarrow \text{Mamas}(x)$
- $(\exists x)(\text{Mamífero}(x) \wedge \text{Huevos}(x))$

- P_1
- P_2
- ...
- P_n

- C

PREMISAS

CONCLUSION

Pi, Ci pertenecen a FORM

Justificación de la validez del razonamiento?

Una **sola** manera de justificar

– Dar una prueba matemática, que llegue a la conclusión a partir de las hipótesis, a través de pasos debidamente justificados.

(Justificación sintáctica $\Gamma \vdash \beta$)

(No existe justificación semántica - no siempre tienen sentido las tablas de verdad)

Ejercicio

Todos los Ovejeros Alemanes son perros y todos los perros son mamíferos. Luego, todos los Ovejeros Alemanes son mamíferos.

$(\forall x)\ (\ Oa(x) \rightarrow\ P(x))$

$(\forall x)\ (P(x) \rightarrow\ M(x))\ \ /\ \therefore\ (\forall x)\ Oa(x) \rightarrow\ M(x)$

Todos los perros caminan al menos que alguno esté lastimado. Algunos perros no caminan. Luego, hay algún perro lastimado.

Validar…

Ejercicio

CALCULO DE PREDICADOS	MUNDO
A	A
B	B
C	C
S	Suelo
Sobre	Sobre ={<B,A>, <A,C>, <C,Suelo>}
Libre	Libre ={<B>}

Sobre (A,B) es………………..

Libre (B) es ………………….

Sobre (C,S) es ………………..

Sobre (C,S) $\wedge \neg$ Sobre (A,B) es………………..