UNIDAD TEMÁTICA 2 Conjuntos

INTRODUCCIÓN:

Grupos Sanguíneos

Lección 1: Noción de conjuntos, notación y relación de pertenencia. Especificación de un conjunto.

Lección 2: Conjuntos especiales, conjuntos en la Aritmética y Conjuntos Numéricos.

Lección 3: Relación entre conjuntos.

Lección 4: Operaciones con conjuntos y sus propiedades.

Lección 5: Diagramas de Venn – Euler.

Lección 6: La Aritmética en las operaciones de Conjuntos y experimentos aleatorios.

Lección 7: Cardinalidad de un conjunto y el Álgebra Booleana.

INTRODUCCIÓN

La **teoría de Conjuntos** es un sistema matemático que se traduce en un lenguaje específico para el manejo de diversos problemas en la vida real. Al igual que otros sistemas matemáticos consta de conceptos básicos, definiciones, operaciones y propiedades.

También podemos decir que la teoría de Conjuntos es un instrumento adecuado para la sistematización de nuestra manera de pensar y para el desarrollo de la capacidad de análisis. Facilita la comprensión de las interrelaciones que existen entre todas las partes de un problema.

Sus operaciones con conjuntos: Unión, intersección, diferencia simétrica y complementación, son operaciones de forma específicas que combinándolas podremos obtener otros conjuntos de gran utilidad e interpretándolos en Diagramas de Venn – Euler nos ayudaran a distinguir y entender las propiedades de los conjuntos como un instrumento matemático y, aplicarlas en la vida cotidiana.

GRUPOS SANGUÍNEOS

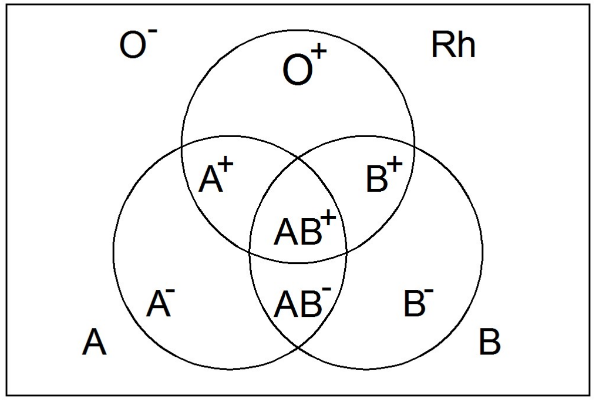
Karl Landsteiner, médico austríaco, nacionalizado norteamericano (Viena 1868, Nueva York 1943).

En 1901, Landsteiner descubrió que los glóbulos rojos de la sangre humana pueden tener dos tipos de antinógenos específicos, el A ó el B y que la combinación y/o ausencia de ellos determinan los grandes grupos sanguíneos: A, B, AB y O.

En el año 1941, Landsteiner y Wiener descubrieron el factor Rh con cuya presencia o ausencia se obtienen las siguientes combinaciones:

A^+ : Tiene el antinógeno A y el factor Rh.
A- : Tiene el antinógeno A pero no el factor Rh.
B^+ : Tiene el antinógeno B y el factor Rh.
B- : Tiene el antinógeno B pero no el factor Rh.
AB^+ : Tienen los antinógenos A y B, y el factor Rh.
AB^- : Tienen los antinógenos A y B, pero no el factor Rh.
O^+ : No tiene los antinógenos A y B, pero si el factor Rh.
O^- : No tiene ni los antinógenos A y B ni el factor Rh.

Usando el diagrama de Venn – Euler se puede observar los ochos tipos sanguíneos que se incluyen en cada grupo:



LECCIÓN 1

NOCIÓN DE CONJUNTO, NOTACIÓN Y RELACIÓN DE PERTENENCIA ESPECIFICACIÓN DE UN CONJUNTOS.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Usar correctamente la simbolización e identificación de elementos de un conjunto.
2. Diferenciar la relación de pertenencia entre un elemento y un conjunto dado.
3. Determinar y representar a un conjunto cualquiera dado.

1.1 NOCIÓN DE CONJUNTO

La idea de **Conjunto** es algo puramente intuitivo, algo no definido, pero entendido por cada persona, como resultado de su propia experiencia.

Conjunto es una colección de objetos o entes de cualquier índole. Estos objetos se llaman elementos y pueden ser materiales o inmateriales.

Para hablar de un conjunto son necesarios algunos requisitos. Éstos son:

i) La colección de elementos debe estar bien definida.
ii) Ningún elemento del conjunto se debe contar más de una vez.
iii) El orden en que se enumeran los elementos carece de importancia.

Ejemplos:

1. Los números enteros comprendidos entre 2 y 10.
2. El número de cromosomas del hombre.
3. Los ácidos nucleicos ADN y ARN.

4. La temperatura corporal del cuerpo humano.
5. Los alumnos que ingresaron a la Escuela de Enfermería de la UNS en el 2014.
6. El número de microorganismos en el medio ambiente.
7. La cantidad de microbios en una célula.
8. Las frutas que contienen proteínas.
9. El valor nutricional de los alimentos.
10. El consumo de reactivos en el laboratorio de Química.
11. Las frutas que contienen proteínas.

Obsérvese que en algunos casos, como en los ejemplos del (1) al (4), los elementos del conjunto son abstractos, es decir, existen sólo como ideas en la mente de cada persona. En otros, como en el ejemplo (5), el conjunto consiste en objetos físicos reales; mientras que en los ejemplos restantes no se puede precisar la idea de conjunto, por ejemplo en (9) no se puede determinar con exactitud cuáles de los alimentos son nutritivos y cuales no lo son, sin una adecuada selección del valor nutricional.

1.2 NOTACIÓN Y RELACIÓN DE PERTENENCIA

Notación: Usualmente los conjuntos se denotan por letras mayúsculas:

A, B, C,…, X, Y, Z.

y los elementos que lo determina se designan por letras minúsculas:

a, b, c,…, x, y, z.

Si un conjunto L está formado por los elementos 0, 1, 2, a, b se escribe:

L = {0, 1, 2, a, b}.

y se lee: “L es el conjunto de los elementos 0, 1, 2, a, b”.

Se observa que los elementos van separados por comas y encerrados entre llaves { }.

Relación de pertenencia: La relación de pertenencia se da entre un elemento y un conjunto al cual pertenece, se indica por la letra griega ∈ (épsilon) de modo que:

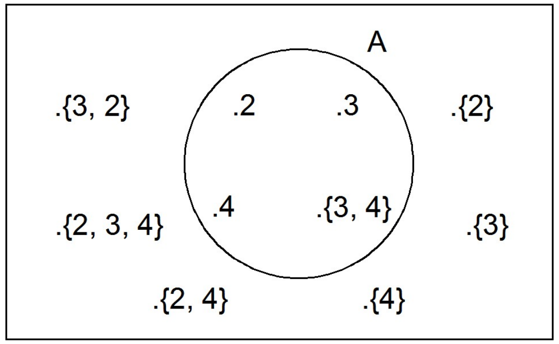
a ∈ L indica: “a pertenece al conjunto L”.
3 ∉ L indica: “3 no pertenece al conjunto L”.

Ejemplos: Si A = {2, 3, 4, {3, 4}}

1. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto A?
   El conjunto A tiene cuatro elementos.
2. Determina el valor de verdad de:

{4} ∈ A	……..	{2, 3, 4} ∈ A	……..
{3, 2} ∉ A	……..	{3} ∉ A	……..
{3, 4} ∈ A	……..	4 ∈ {3, 4}	……..
{2} ∈ A	……..	4 ∈ {2, 4}	……..
2 ∉ A	……..	{2, 3} ∈ A	……..
3 ∈ A	……..		

Usando diagrama de Venn – Euler:



1.2 ESPECIFICACIÓN DE UN CONJUNTO

Existen tres maneras distintas de especificar un conjunto:

a) Método de enumeración o "por extensión":

Consiste en elaborar una lista de todos sus elementos, separándolos mediante comas y encerrarlo entre llaves.

Ejemplo: Determina por extensión el siguiente conjunto:

$P = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$

Solución: Factorizando:

$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x2 - 3x + 2) = 0$
$= x(x - 1)(x - 2) = 0$

De donde: $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$

Por tanto: $P = \{0, 1, 2\}$

b) Descripción verbal:

Consiste en una descripción verbal que expresa necesaria y únicamente los requisitos que debe satisfacer un elemento para pertenecer al conjunto.

Ejemplo:

A = El conjunto de los divisores de 12.
B = El conjunto de los paralelogramos.
C = El conjunto de los países de América Latina.

c) Método descriptivo o "por comprensión":

Cuando los elementos del conjunto son caracterizados mediante una propiedad común.

Ejemplo: Determina por comprensión el siguiente conjunto:

$R = \{\frac{11}{3}, \frac{9}{2}, \frac{27}{5}, \frac{19}{3}, \frac{51}{7}\}$

Unidad 2 / Conjuntos

Solución: Descomponiendo la fracción en dos sumandos.

$$\frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3}$$

$$\frac{9}{2} = \frac{18}{4} = 4 + \frac{2}{4}$$

$$\frac{27}{5} = 5 + \frac{2}{5}$$

$$\frac{19}{3} = \frac{38}{6} = 6 + \frac{2}{6}$$

$$\frac{51}{7} = 7 + \frac{2}{7}$$

La ley o propiedad que cumple es: $n + 2/n$, $n \in \mathbb{Z}$, $3 \leq n \leq 7$.

Por tanto:

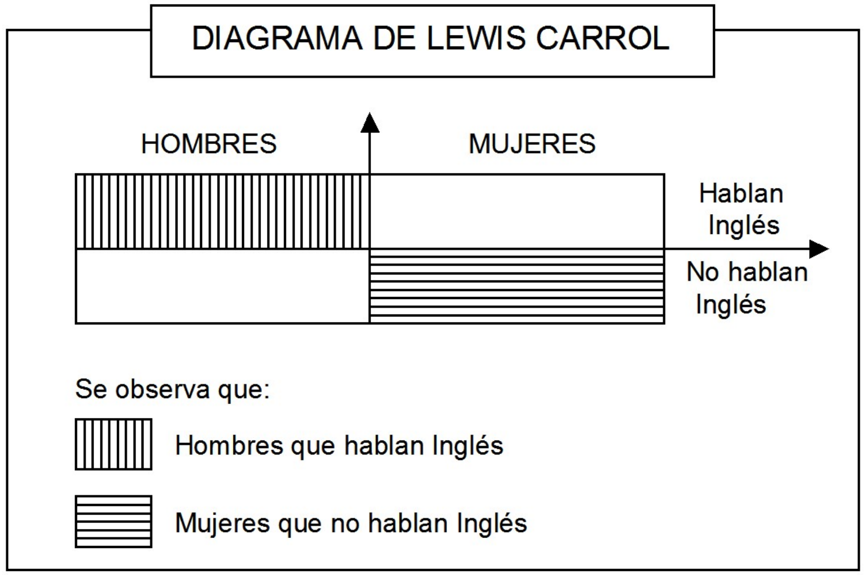
$R = \{n \in \mathbb{Z} \ / \ n + 2/n, \ 3 \leq n \leq 7\}$

NOTA:

No todo conjunto se puede determinar por extensión y comprensión a la vez.

OBSERVACIÓN:

Otro diagrama para representar gráficamente a los conjuntos es el **“Diagrama de LEWIS CARROL”.** Por ejemplo:



1.4 Ejercicios Resueltos.

A. ¿Cuál de las siguientes descripciones definen a un conjunto?

1. P = Los números con más suerte en la TINKA.
2. Q = Los pares mayores que 20.
3. R = Las mujeres bonitas de Nuevo Chimbote.
4. S = Los libros más interesantes de la Biblioteca Central de la UNS.
5. T = Los dígitos del número 2240 = {2, 2, 4, 0}.
6. V = {x / x + 4 = 9}.
7. W = Las enfermedades de transmisión sexual.
8. X = Los atletas más altos del Perú.
9. Y = Los mejores médicos del hospital Regional de Chimbote.
10. Z = Las plantas que producen O_2.

Unidad 2 / Conjuntos

Solución:

1. Este conjunto no está definido.
2. Este conjunto está bien definido en forma verbal.
3. El conjunto no está bien definido.
4. El conjunto no está bien definido.
5. El primer conjunto está bien definido en forma verbal, pero en forma enumerativa el elemento 2 está repetido, lo cual es incorrecto.
6. Este conjunto está bien definido en forma descriptiva o comprensiva.
7. Este conjunto está bien definido en forma verbal.
8. El conjunto no está bien definido.
9. Este conjunto no está bien definido.
10. Este conjunto está bien definido, ya que ellos contienen clorofila.

B. Establezca el valor de verdad de cada uno de las siguientes proposiciones:

1. $\frac{3}{4} \in \mathbb{N} \rightarrow \frac{2}{3} \in \mathbb{Z}$
2. $\sqrt{3} \in \mathbb{I} \wedge 2 \in \mathbb{R}$
3. $5 \notin \mathbb{N} \wedge 7 \in \mathbb{Z}$
4. $(3 + 2i) \in \mathbb{C} \rightarrow (4 - 7i) \in \mathbb{R}$
5. $\frac{3}{7} \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$
6. Todo número real es irracional.
7. Si $a \in \{x/x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$, $b \in \{x/x \in \mathbb{N}, x < 3\}$, $a + b = 10 \rightarrow ab = 50$.
8. Algunos irracionales no son enteros.
9. Todo decimal puede expresarse como cociente de dos enteros.
10. Si un número es entero, entonces es natural.

Solución:

1. $\frac{3}{4} \in \mathbb{N} \rightarrow \frac{2}{3} \in \mathbb{Z}$
   F V F
2. $\sqrt{3} \in \mathbb{I} \wedge 2 \in \mathbb{R}$
   V V V
3. $5 \notin \mathbb{N} \wedge 7 \in \mathbb{Z}$
   F V V
4. $(3 + 2i) \in \mathbb{C} \rightarrow (4 - 7i) \in \mathbb{R}$
   V F F
5. $\frac{3}{7} \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$
   V V V
6. Falso.
7. $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $b \in \{1, 2\}$, $a + b = 10 \rightarrow ab = 50$
   F V F
8. Verdadero
9. Falso
10. Falso

C. Determina por extensión los siguientes conjuntos:

1. $A = \{2x + 1 / x \in \mathbb{N}, 3 \leq x < 6\}$
2. B = Los números naturales pares.
3. $C = \{\frac{2}{x^2+1} / x \in \mathbb{Z}, -1 < x < 6\}$
4. $D = \{x^2 - 2 / x \in \mathbb{Z}, -1 < x \leq 3\}$
5. $E = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0\}$
6. $F = \{x / x^3 - 17x^2 + 71x - 55 = 0\}$

Solución:

1. $x = 3, 4, 5$; luego $x = 3 : 2(3) + 1 = 7$
   $x = 4 : 2(4) + 1 = 9$
   $x = 5 : 2(5) + 1 = 11$
   $\therefore A = \{7, 9, 11\}$
2. $B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$
3. $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; si $x = 0 : \frac{2}{0^2+1} = 2$
   $x = 1 : \frac{2}{1^2+1} = 1$
   $x = 2 : \frac{2}{2^2+1} = \frac{2}{5}$
   $x = 3 : \frac{2}{3^2+1} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
   $x = 4 : \frac{2}{4^2+1} = \frac{2}{17}$
   $x = 5 : \frac{2}{5^2+1} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$
   $\therefore C = \{2, 1, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{17}, \frac{1}{13}\}$
4. $x = 0, 1, 2, 3$; si $x = 0 : 0^2 - 2 = -2$
   $x = 1 : 1^2 - 2 = -1$
   $x = 2 : 2^2 - 2 = 2$
   $x = 3 : 3^2 - 2 = 7$
   $\therefore D = \{-2, -1, 2, 7\}$
5. $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0 \leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0$, $x \in \mathbb{Q}$
   $(2x - 1)(3x - 1) = 0$
   $x = ½ \vee x = 1/3$
   $\therefore E = \{½, 1/3\}$

6. Por Ruffini:

	1	-17	71	-55
$x_1 = 5$		5	-60	55
	1	-12	11	0
$x_2 = 1$		1	-11	
	1	-11	0	

Luego:

$x_3 - 11 = 0$

$x_3 = 11$

$\therefore$ F = {1, 5, 11}

D. Determinar por comprensión los siguientes conjuntos:

1. $P = \{\frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \frac{1}{21}\}$
2. Q = {-5, -2, 1, 4,…, 142}
3. $R = \{3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots\}$
4. S = {12, 68, 220, 516, 1004}
5. $T = \{2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}, \frac{37}{6}\}$
6. V = {-5, -4, -1, 4, 11, 20}

Solución:

1. El denominador es de la forma $x = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, $4 \leq n \leq 10$
   Por tanto:
   $P = \{\frac{1}{2n+1} / n \in \mathbb{N}, 4 \leq n \leq 10\}$

Unidad 2 / Conjuntos

2. Sea: $-5 = 3(-2) + 1$
   $-2 = 3(-1) + 1$
   $1 = 3(0) + 1$
   $4 = 3(1) + 1$
   ……………………
   $142 = 3(47) + 1$

   La ley o propiedad es: $3x + 1$, $x \in \mathbb{Z}$, $-2 \leq x \leq 47$

   Por consiguiente:

   $Q = \{3x + 1 / x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 47\}$

3. El conjunto se escribe como:

   $R = \{3^1, 3^0, 3^{-1}, 3^{-2}, \ldots\}$

   De donde:

   $R = \{3^x / x \in \mathbb{Z}, x \leq 1\}$

4. Sea:

   $12 = 4 + 8 \rightarrow 4 + 2^3$
   $68 = 4 + 64 \rightarrow 4 + 4^3$
   $220 = 4 + 216 \rightarrow 4 + 6^3$
   $516 = 4 + 512 \rightarrow 4 + 8^3$
   $1004 = 4 + 100 \rightarrow 4 + 10^3$

   La ley cumple: $4 + (2x)^3$, $x \in \mathbb{N}$, $x \leq 5$

   Por tanto:

   $S = \{4 + (2x)^3 / x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$

5. Sea:

   $2 = \frac{1^2+1}{1}$; $\frac{5}{2} = \frac{2^2+1}{2}$

   $\frac{10}{3} = \frac{3^2+1}{3}$; $\frac{17}{4} = \frac{4^2+1}{4}$

$$\frac{26}{5} = \frac{5^2+1}{5} \quad ; \quad \frac{37}{6} = \frac{6^2+1}{6}$$

La ley o propiedad cumple: $\frac{x^2+1}{x}$, $x \in \mathbb{N}$, $x \leq 6$

Por tanto:

$$T = \{\frac{x^2+1}{x} / x \in \mathbb{N}, x \leq 6\}$$

6. Considerando: $Tx = ax^3 + bx + c$, halla a, b y c:

$$V = \{ -4, -5, -4, -1, 4, 11, 20 \}$$
$$-1, +1, +3, +5, +7, +9$$
$$+2 \quad +2 \quad +2 \quad +2 \quad +2$$

Donde: a = 1, b = -2, c = -4

La ley es: $Tx = x^2 - 2x - 4$, $x \in \mathbb{N}$, $x \leq 6$

Por lo tanto:

$$V = \{x^2 - 2x - 4 / x \in \mathbb{N}, x \leq 6\}$$

1.5 Actividad de Aprendizaje.

A. ¿Cuál de las siguientes descripciones definen a un conjunto?

1. Los alimentos que contienen vitamina A.
2. Los glóbulos rojos que poseen núcleo.
3. El número de gases nobles en la tabla periódica.
4. Las vitaminas liposolubles A, D, E, K.
5. Los alimentos energéticos: carbohidratos, lípidos, proteínas.
6. Las condiciones ambientales y los recursos naturales.
7. El número de calorías de una proteína.
8. Los libros más importantes de Enfermería en la biblioteca de Ciencias.
9. Las micromoléculas a simple vista.
10. Los pacientes del hospital “La Caleta” que sufren de reumatismo.

B. Dado el conjunto $A = \{a, \{a\}, \emptyset\}$. Indica cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas:

1. $\{a\} \in A$
2. El conjunto $\emptyset \in A$
3. $\emptyset \in A$
4. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
5. $\{a, \{a\}\} \in A$
6. $6 \in A$

C. Determinar por extensión los siguientes conjuntos:

1. $M = \{\frac{3x-6}{2} \in \mathbb{N} / x \in \mathbb{N}, x < 8\}$
2. $N = \{\frac{1}{2x^2} \in \mathbb{Z} / x \in \mathbb{Z}, 0 < x \leq 4\}$
3. $L = \{x / x^4 + 2x^3 - 31x^2 - 32x + 60 = 0\}$
4. $R = \{\frac{1}{2x+5} / x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 8\}$
5. $S = \{\frac{x^2-1}{x} \in \mathbb{Q} / x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$
6. $T = \{\frac{n^2-1}{n+1} \notin \mathbb{Q} / n \in \mathbb{Z}, -1 < n \leq 5\}$
7. $V = \{\frac{1}{x} / x \in \mathbb{Z}, -1 \leq n < 6\}$
8. $W = \{x / x^3 - 19x^2 - 36x + 1440 = 0\}$
9. $X = \{x \in \mathbb{N} / x^2 + x - 6 = 0 \wedge -3 \leq x < 4\}$
10. $Y = \{x / 64x^3 + 24x^2 - 6x + 1 = 0\}$

D. Determina por comprensión los siguientes conjuntos:

1. A = {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …}
2. B = $\{2, 2^3, 2^5, 2^7\}$
3. C = {1, 2, 4, 8, 16, 32}
4. D = {36, 45, 54, 63, 72}
5. E = {0, 1, 2, 8, 32, 128, 512}
6. F = $\{2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}, \frac{37}{6}\}$
7. G = {-5, -4, -1, 4, 11, 20}
8. H = {0, 2, 6, 12, 20, 30}
9. I = $\{\frac{5}{3}, 2, 3, \frac{14}{5}, 7, 10\}$
10. J = $\{2^{31}, 2^{33}, 2^{35}, \ldots, 2^{111}\}$

E. Sea el conjunto L = {a, b, {a, b}, c}; y sean los conjuntos:

$M = \{x \in L \,/\, x \neq a \wedge x = \{a, b\}\}$

$N = \{x \in L \,/\, x = b \rightarrow x = c\}$

$P = \{x \in L \,/\, x \neq a \vee x = \{a, b\}\}$

$Q = \{x \in L \,/\, x = b \rightarrow x \neq \{a, b\}\}$

Determínalos por extensión:

F. Dado el conjunto M = {7, 10, 15, 22, 31, 42, 55, 70}; determina por comprensión un subconjunto de M, cuyos elementos sean los términos impares de M.

1.6 Clave de Respuesta.

A. 2) No es un conjunto
4) Si es conjunto
6) Si son conjuntos. Los ecologistas lo llaman “Habit”
8) No es conjunto
10) No es conjunto, ya que el término “reumatismo” es usado en una manera ambigua, y que un diagnóstico es algunas veces dudoso aún para una enfermedad bien definida.

B. 2) Falso
4) Falso
6) Verdadero

C. 2) N = { }

4) R = $\{\frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \frac{1}{21}\}$

6) T = {-1, 0, 1, 2, 3, 4}

8) W = {-8, 12, 15}

10) Y = {-1/2, -1/8, 1/4}

D. 2) B = $\{2^{2x-1} \,/\, x \in \mathbb{N}\}$

4) D = $\{9(4 + x) \,/\, x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 4\}$

6) F = $\{\frac{x^2+1}{x} \,/\, x \in \mathbb{N}, x \leq 6\}$

8) H = $\{x(x - 1) \,/\, x \in \mathbb{N}, x \leq 6\}$

10) J = $\{2^{2k+1} \,/\, x \in \mathbb{N}, 15 \leq k \leq 55\}$

E. M = {{a, b}}
N = {a, {a, b}, c}
P = {b, {a, b}, c}
Q = {b, {a, b}}

F. $M = \{6 + 4x^2 / x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$

"Un compañero verdadero ama en todo tiempo, y es un hermano nacido para cuando hay angustia"

LECCIÓN 2

CONJUNTOS ESPECIALES, CONJUNTOS EN LA ARITMETICA Y CONJUNTOS NUMÉRICOS.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Señalar correctamente la clase de conjunto a la que pertenece un conjunto dado.
2. Determinar y representar a un conjunto aritmético dado.
3. Aplicar los conjuntos numéricos en los conjuntos aritméticos.

2.1 CONJUNTOS ESPECIALES

A. CONJUNTO UNIVERSAL

Para analizar una situación particular, se necesita un conjunto que denominamos Conjunto Universal, cuyo símbolo es U dicho conjunto llamado también conjunto Referencial, consta de todos los elementos que entran en un estudio determinado.

Cuando especifiquemos un conjunto basándonos en la descripción o comprensión, siempre se debe especificar el conjunto universal al cual pertenece la variable genérica.

Ejemplos:

1. Si se quiere abordar un estudio sobre la desnutrición en niños menores de 5 años en el distrito de Nuevo Chimbote, entonces el conjunto universal sería:

   U = {x / x es un niño menos de 5 años en el distrito de Nuevo Chimbote}

2. A = {x / x es par, $x \in \mathbb{N}$}

   En este caso la variable x será sustituida por un número natural ($\mathbb{N}$ representa el conjunto universal) que haga la proposición verdadera; es decir:

   A = {2, 4, 6, 8,…}

3. Cuando se quiere estudiar el rendimiento académico de los alumnos en la Universidad Nacional del Santa, el conjunto universal sería:

   U = {x / x es alumno de la Universidad Nacional del Santa}

B. CONJUNTO VACÍO

Resulta conveniente hablar acerca de un conjunto sin elementos. El conjunto que no posee elementos se denomina **conjunto nulo o vacío,** y se designa mediante el símbolo ∅ ó {}.

Ejemplos:

1. $M = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2 = 0\}$, es un conjunto vacío, pues la ecuación $x^2 + 2 = 0$, no posee raíces reales, es decir, M = ∅.
2. El conjunto de todos los países situados en un casquete polar es un conjunto vacío.
3. El conjunto de proteínas existentes en el limón es un conjunto vacío.

C. CONJUNTO UNITARIO

Es aquel que tiene uno, y sólo un elemento.

Ejemplos:

1. $A = \{2^0, 1\} = \{1\}$, es un elemento unitario.

Unidad 2 / Conjuntos

2. $B = \{x \in \mathbb{N} / 6x^3 - 31x^2 + 3x + 10 = 0\}$ es un conjunto unitario porque:

   $$6x^3 - 31x^2 + 3x + 10 = 0$$
   $$(x - 5)(3x - 2)(2x + 1) = 0$$

   De donde:

   $$x = 5 \in \mathbb{N}, \quad x = 2/3 \notin \mathbb{N}, \quad x = -1/2 \notin \mathbb{N}$$

   Por tanto:

   B = {5}

3. El conjunto de todos los países situados en el continente australiano consiste de un solo miembro, Australia.

D. CONJUNTO FINITO E INFINITO

Un conjunto es **finito**, cuando se pueden poner sus elementos en correspondencia uno a uno con subconjunto propio de los números naturales, si no decimos que es **infinito** (cantidad inconmensurable de elementos).

Ejemplos:

1. L = {a, b, c, d,…, z} es finito porque es equivalente al conjunto {1, 2, 3, 4,…, 26}.
2. El conocidísimo caso de los granos de arena en la tierra es finito pues se puede concebir una correspondencia entre los granos de arena y un subconjunto de los naturales.
3. El conjunto de todos los elementos químicos está bien definido. Es finito pero aún no bien conocido. Es igualmente claro lo que entendemos por el conjunto de todos los compuestos químicos aunque la mayoría de ellos están aún por descubrirse. Este conjunto es probablemente infinito.

2.2 CONJUNTOS EN LA ARITMÉTICA

Todos estamos familiarizados con el conjunto ordenado de los números naturales:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots, 99, 100, \ldots\}$$

De este conjunto, considerado como universo, podemos citar varios conjuntos aritméticos de fundamental importancia.

A. CONJUNTO DE DIVISORES Y MÚLTIPLOS

DIVISORES DE NÚMEROS: Si **a** y **b** son dos números naturales, decimos que **b** divide a **a** si existe un número natural que tal q tal que a = bq.

Ejemplos:

1. $P = \{x \,/\, x \text{ sea divisor de } 9\} = \{1, 3, 9\}$
2. $Q = \{x \,/\, x \text{ sea divisor de } 12\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
3. $R = \{x \,/\, x \text{ sea divisor de } 32\} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$

OBSERVACIÓN 1: El uno y el mismo número es divisor de cualquier número.

MÚLTIPLO DE UN NÚMERO: Para indicar que 8 es múltiplo de 4 se escribe: 4**n** = 8, y **n** puede ser sustituido por 2. Este proceso puede generalizarse a cualquier **n** $\in \mathbb{N}$.

Ejemplos:

1. $L = \{x \,/\, x \text{ sea múltiplo de } 4\} = \{x \,/\, x = 4n,\ n \in \mathbb{N}\}$
   $L = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \ldots\}$
2. $M = \{x \,/\, x \text{ sea múltiplo de } 2\} = \{x \,/\, x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$
   $M = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots\}$
3. $N = \{x \,/\, x \text{ sea impar}\} = \{x \,/\, x = 2n + 1,\ n \in \mathbb{N}\}$
   $N = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots\}$

OBSERVACIÓN 2: Hacemos la aclaración que el cero es múltiplo de cualquier número, que el número uno es impar y que el conjunto de los múltiplos de dos también se llama números pares. Así también, que el conjunto de los impares no se considera como conjunto de múltiplos, pero los citamos aquí por su vital importancia.

B. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS PRIMOS:

Se dice que un número natural distinto de uno es primo si sus únicos divisores son el mismo número y el uno.

Son números primos: $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$

Los números que no son primos se llaman **números compuestos.**

Son números compuestos: $C = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, \ldots\}$

OBSERVACIÓN 3: Cabe señalar que el dos es el único par primo y que el número uno no es primo ni compuesto.

C. CONJUNTO DE LOS FACTORES PRIMOS DE UN NÚMERO:

El teorema fundamental de la aritmética dice:

"Todo número compuesto tiene, excepto por el orden, un conjunto único (uno y sólo uno) de factores primo".

Un número natural está factorizado completamente, si se representa como producto de factores primos.

Ejemplos:

1. El conjunto de los factores primos de 8:
   $8 = 4(2) = 2(2)(2) = 2^3 \Rightarrow A = \{2\}$
2. El conjunto de los factores primos de 36:
   $36 = 18(2) = 9(2)(2) = 3(3)(2)(2) = 3^2(2^2) \Rightarrow B = \{2, 3\}$
3. El conjunto de los factores primos de 60:
   $60 = 10(6) = 5(2)(6) = 5(2)(3)(2) = 5(2^2)(3) \Rightarrow C = \{2, 3, 5\}$

2.3 CONJUNTOS NÚMERICOS

Debido al frecuente uso que haremos en lo que sigue, de los conjuntos de números, veamos en forma simplista los siguientes conjuntos numéricos:

a) **Conjunto de los números naturales:** Es el conjunto denotado por $\mathbb{N}$, y cuyos elementos son empleados para realizar la operación de contar y consideramos que:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5,\dots\}$$

b) **Conjunto de los números enteros:** Es el conjunto denotado por $\mathbb{Z}$, y está constituido por los enteros positivos $\mathbb{Z}^+ \equiv \mathbb{N}$, los enteros negativos $\mathbb{Z}^-$ y el {0}. Es decir:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+ = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2,\dots\}$$

c) **Conjunto de los números racionales:** Es el conjunto denotado por $\mathbb{Q}$ y consideramos que:

$$\mathbb{Q} = \{x / \ x = \frac{a}{b};\ \forall\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$$

d) **Conjunto de los números irracionales:** Es el conjunto denotado por $\mathbb{I}$ y está constituido por los números que no son racionales. Es decir:

$$\mathbb{I} = \{x / \ x \text{ tiene representación decimal infinita no periódica}\}$$

e) **Conjunto de los números reales:** Es el conjunto denotado por $\mathbb{R}$ y está constituido por la unión de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$. Es decir:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

f) **Conjunto de los números complejos:** Es el conjunto denotado por $\mathbb{C}$ y consideramos que:

$$\mathbb{C} = \{a + bi / \ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}\}$$

2.4 Ejercicios Resueltos.

A. Indica que clase de conjuntos son cada uno de los siguientes:

1. Los números pares.
2. Grupo de individuos de una población.
3. Los meses del año.
4. $A = \{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$
5. $B = \{x \in \mathbb{N} / x^2 = -4\}$
6. $C = \{x \in \mathbb{N} / x^2 + 7x + 12 = 0\}$
7. $D = \{x \in \mathbb{Q} / x - 2 = ½\}$
8. $E = \{x \in \mathbb{Z} / x = x^2\}$
9. $F = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 4 \ \wedge \ 2x = 3\}$
10. $G = \{x \in \mathbb{N} / x^2 + 3x - 18 = 0\}$

Solución:

1. Infinito
2. Finito
3. Finito
4. Infinito
5. Vacío (No hay $\mathbb{N}^2 = -4$)
6. Vacío
7. Unitario
8. Finito (Resolviendo E = {0, 1})
9. Vacío (no hay número x que satisfaga):
   Si $x = 2$; $\underset{V}{2^2 = 4} \quad \underset{\mathbf{F}}{\wedge} \quad \underset{F}{2(2) = 3}$
10. Unitario (Resolviendo G = {3} ya que $-6 \notin \mathbb{N}$)

B. Halla la validez o no de los siguientes conjuntos:

1. $L = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - 9x + 14 = 0\}$ es unitario.
2. $M = \{x \in \mathbb{N} / 7 < x < 8\}$ es vacío.
3. N = {x / x es múltiplo de 2} es finito.
4. P = {x / x es una recta} es infinito.

Solución:

1. $x^2 - 9x + 14 = 0 \quad \leftrightarrow \quad (x + 7)(x + 2) = 0$

   $x = -7 \quad \vee \quad x = -2 \quad , \quad x \notin \mathbb{N}$

   De donde:

   $L = \{-7, -2\}$ (falso)
2. $7 < x < 8$, no tiene ningún natural; luego $M = \emptyset$. (Verdadero)
3. Los múltiplos de 2 : $x = 2n$, $n \in \mathbb{N}$; es decir:

   $\mathbb{N} = \{2, 4, 6, 8, 10,\ldots\}$ (Falso)
4. (Verdadero)

C. Los siguientes conjuntos aritméticos están especificados por comprensión. Escríbelos en forma verbal y extensión, $\forall$ x, n $\in \mathbb{N}$.

1. $A = \{x / x = 6n\}$
2. $B = \{x / 8 < x < 15\}$
3. $C = \{x^3 / x^3 < 500\}$
4. $D = \{x^2 / 20 < x^2 < 200\}$
5. E = {x / x sea divisor de 56}

Solución:

1. A = Los múltiplos de 6 = {6, 12, 18, 24, 30,…}
2. B = Los mayores de 8 y menores de 15 = {9, 10, 11, 12, 13, 14}
3. C = Los cubos positivos menores que 500 = {1, 8, 27, 64, 125, 216, 343}
4. D = Los cuadrados mayores de 20 y menores o iguales a 200.

   D = {25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196}
5. E = Los divisores de 56 = {1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56}

D. Expresa los siguientes números: 72, 210 y 252 como producto de primos y nombra sus respectivos conjuntos:

Solución:

$72 = 9(8) = 3(3)(4)(2) = 3(3)(2)(2)(2) = 3^2.2^3 \Rightarrow A = \{2, 3\}$

$210 = 105(2) = 3(35)(2) = 3(7)(5)(2) \Rightarrow B = \{2, 3, 5, 7\}$

$252 = 126(2) = 63(2)(2) = 9(7)(2)(2) = 3(3)(7)(2)(2) = 3^2.7.2^2 \Rightarrow$

$C = \{2, 3, 7\}$

2.5 Actividad de Aprendizaje

A. Señala cuales de los siguientes conjuntos son: Unitarios, vacíos, finitos o infinitos:

1. $L = \{x / x \neq x\}$
2. $M = \{x \in \mathbb{Z} / x + 2 = -½\}$
3. Las diferentes clases sociales del Perú.
4. $N = \{x / x^2 - x + 1 = 0\}$
5. $P = \{(x - 2)/3 \in \mathbb{N} / x \in \mathbb{N}, x < 6\}$
6. $Q = \{x / x^3 - 6x^2 + 31x - 30 = 0\}$
7. Los animales y plantas de la selva peruana.
8. $R = \{x \in U / x \neq U\}$
9. Los pacientes del Hospital Regional “Eleazar Guzmán Barrón”
10. $S = \{2x - 1 / x \in \mathbb{Z}, 1 < x < 2\}$

B. Halla la validez o no de los siguientes conjuntos:

1. $H = \{x \in \mathbb{N} / 6x^3 - 31x^2 + 3x + 10 = 0\}$ es vacío.
2. $I = \{x \in \mathbb{N} / x^2 + x - 12 = 0\}$ es unitario.
3. $J = \{x \in \mathbb{R} / 9^{-3x} = (1/27)^{x+3}\}$ es unitario.
4. $K = \{x / x^3 = 27 \quad \wedge \quad 3x = 6\}$ es no vacío.
5. Los planetas del sistema solar son infinitos.
6. Los sentidos tradicionales son finitos.
7. $L = \{2x - 3 / x \in \mathbb{N}, x < 4\}$ es no unitario.
8. Los países situados en un casquete polar es vacío.

C. Describe a los siguientes conjuntos en forma enumerativa:

1. A = {x / x es un número entre 50 y 70 divisible por 3}
2. B = {x / x es un múltiplo de 8}
3. C = {x / x es un divisor de 67}
4. D = {x / x es un factor primo del número 42}
5. $E = \{x / 58 < x < 65\}$
6. F = {x / x es un número primo entre 50 y 70}

D. Escribe el conjunto de factores primos para cada número: 84; 99; 108; 112 y 256.

2.6 Clave de Respuesta

A. 2) Vacío
4) Vacío
6) Finito
8) Vacío
10) Vacío

B. 2) Verdadero
4) Falso
6) Verdadero
8) Verdadero

C. 2) B = {8, 16, 24, 32, 40, 48,…}
4) D = {2, 3, 7}
6) F = {53, 59, 61, 67}

D. $99 = 3^2(11) \Rightarrow M = \{3, 11\}$
$108 = 3^2.2^2 \Rightarrow P = \{2, 3\}$
$256 = 2^8 \Rightarrow R = \{2\}$

"Una buena regla para ir por la vida es mantener siempre el corazón un poco más blando que la cabeza"

LECCIÓN 3

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS. CONJUNTO POTENCIA O CONJUNTO DE PARTES.

<u>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</u>

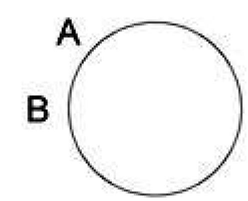
1. Diferenciar la relación de pertenencia y la relación de contenencia de un conjunto dado.
2. Representar gráficamente los conjuntos por medio de diagramas lineales y de Venn – Euler.
3. Establecer la relación entre conjuntos y demostrar las propiedades de inclusión e igualdad de conjuntos.
4. Hallar el conjunto potencia de un conjunto cualquiera y demostrar propiedades.

3.1 RELACIONES ENTRE CONJUNTO

A. IGUALDAD DE DOS CONJUNTOS: Se dice que dos conjuntos A y B son iguales y se escriben **A = B,** si y solamente si tienen los mismos elementos. Esto es:

$$\mathbf{A = B} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Si } x \in A \Rightarrow x \in B \\ \qquad \wedge \\ \text{Si } x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$$

Si un conjunto posee un elemento que no pertenece al otro, ambos son distintos, es decir, que A ≠ B.
Su diagrama de Venn – Euler es:



Propiedades:

Sean: A, B y C conjuntos diferentes del vacío, entonces:

E_1: $A = A \quad , \quad \forall A$ (Reflexiva)
E_2: $A = B \;\Rightarrow\; B = A$ (Simétrica)
E_3: $A = B \;\wedge\; B = C \Rightarrow A = C$ (Transitiva)

Ejemplos:

1. ¿$A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 2, 1, 2, 1\}$

   A y B son iguales, a pesar que la repetición de los elementos no altera el conjunto.

2. ¿$R = \{x \,/\, x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0\}$ y $S = \{2x - 3 \,/\, x \in \mathbb{N}, x < 4\}$ son iguales?

   En R: $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \leftrightarrow (x + 1)(x - 1)(x - 3) = 0$

   De donde: $R = \{-1, 1, 3\}$

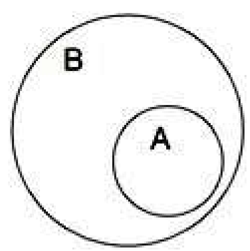
   En S: $x \in \mathbb{N}$, $x < 4$; tenemos que $S = \{-1, 1, 3\}$

   Por tanto, $R = S$.

B. SUBCONJUNTOS: Entre dos conjuntos cualesquiera A y B se dice que A es un subconjunto de B, y se simboliza por $\mathbf{A \subset B}$**,** si cada elemento de A es también un elemento de B. es decir que:

$$A \subset B \;\Leftrightarrow\; \forall\, x \in A \;\rightarrow\; x \in B$$

Su diagrama de Venn – Euler es:



$A \subset B$ se lee: "A está contenido en B"
ó
$B \supset A$ se lee: "B contiene al conjunto A"

Propiedades:

S_1: $A \subset A$ (Reflexiva)
S_2: Si $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$ (Antisimétrica)
S_3: Si $A \subset B \wedge B \subset D \Rightarrow A \subset D$ (Transitiva)
S_4: $\emptyset \subset A \quad , \quad \forall A$

Observación 1: Téngase en cuenta que la ilustración de relaciones entre conjuntos por medio de **diagramas de Venn – Euler** no constituye una demostración matemática, sino solamente una ayuda a nuestra intuición. Los **diagramas lineales** sirven también para ilustrar relaciones entre conjuntos. Por ejemplo:

Si $A \subset B$, se escribe B más arriba que A, y luego los conectamos con un segmento; se ilustra:

Observación 2:

i) La inclusión de A en A misma, para cualquier conjunto A, nos indica que, todos los elementos de A están también en A (y viceversa). Este hecho particular de inclusión se conoce como **inclusión impropia.** El conjunto A es un subconjunto impropio de lo que se simboliza $A \subseteq A$.

ii) Para el caso de la **inclusión propia,** es decir, cuando los elementos de A están dentro de B y existen en B elementos que no pertenecen a A, se dice que la relación de inclusión es propia y se simboliza con $A \subset B$. considerando $A \neq \emptyset \;\wedge\; A \neq B$.

iii) El conjunto vacío es subconjunto impropio de cualquier conjunto.

Ejemplos:

1. A = {x / x es un varón}

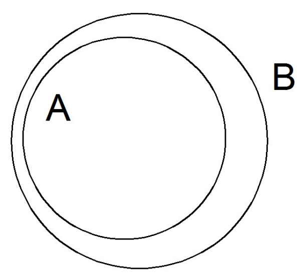
   B = {x / x es un ser humano}

   Se tiene que $A \subset B$.

2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ indica que $\mathbb{N}$ es subconjunto propio de $\mathbb{Z}$. Pero si afirmamos que cada entero es un elemento de $\mathbb{Z}$, es evidente afirmar que $\mathbb{Z}$ es un subconjunto de sí mismo, es decir, $\mathbb{Z}$ es subconjunto impropio de $\mathbb{Z}$. Se escribe $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$.
3. Los minerales constituye con certeza un subconjunto de los nutrientes.

C. CONJUNTOS COMPARABLES: Dos conjuntos A y B son comparables si alguno de ellos está contenido en el otro, es decir, $A \subset B \vee B \subset A$.

Su diagrama de Venn – Euler es:

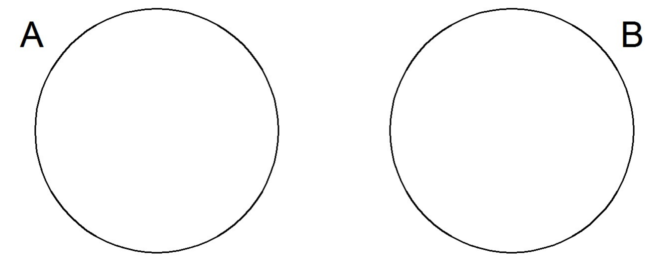


Ejemplo: Si A = {2, 4, 6, 8} y B = {2, 4, 6, 8, 10, 12}, A es comparable con B, porque $A \subset B$.

D. CONJUNTOS DISJUNTOS: Los conjuntos A y B son disjuntos si no tienen ningún elemento en común. Esto equivale decir:

"A disjunto con B si, y sólo si $\nexists$ x / $x \in A \;\wedge\; x \in B$"

Su diagrama de Venn – Euler es:



Ejemplo: A = {x / x es profesor universitario} y B = {x / x es alumno de primaria} son dos conjuntos disjuntos.

E. CONJUNTOS EQUIPOTENTES O COORDINABLES: Dos conjuntos A y B son equipotentes o coordinables cuando los elementos del conjunto A se corresponden con los elementos del conjunto B, de modo que cada elemento de cada conjunto tenga uno, y sólo uno, asociado en el otro conjunto, decimos que hay una correspondencia uno a uno o biunívoca entre ambos conjuntos.

Simbólicamente: $A <> B \Leftrightarrow n(A) = n(B)$

Ejemplos:

1. Dados los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {a, b, c}

   Las diferentes correspondencias que se puedan establecer sus elementos son:

$1 \leftrightarrow a$	$1 \leftrightarrow b$	$1 \leftrightarrow c$
$2 \leftrightarrow b$	$2 \leftrightarrow c$	$2 \leftrightarrow a$
$3 \leftrightarrow c$	$3 \leftrightarrow a$	$3 \leftrightarrow b$

2. Un ejemplo real de correspondencia biunívoca se presenta cuando en un salón de clases cada asiento está asignado a un alumno, el cual está completo y no hay alumnos de pie. Entonces, a cada alumno le corresponde un asiento y viceversa.

F. CONJUNTOS EQUIVALENTES: Dos conjuntos que se pueden poner en correspondencia uno a uno entre sí, se dice que son equivalentes. Si P es equivalente a Q, se escribe **P ~ Q.**

Ejemplo:

P = {m, n, o} y Q = {4, 5, 6}

m ↔ 4
n ↔ 5
o ↔ 6 , entonces P ~ Q.

G. CONJUNTO DE CONJUNTOS: Es aquel conjunto, cuyos elementos son también conjuntos. También es llamado **Familia de Conjuntos.**

Si un conjunto tiene unos elementos que son conjuntos y otros que no lo son, este conjunto no es una familia de conjuntos.

Ejemplos:

1. M = {{2, 3}, {5, 2}, {7}, ∅} es una familia de conjuntos, porque todos sus elementos son conjuntos.
2. N = {{2, 3}, {5, 2}, 7, ∅} no es una familia de conjuntos, porque tiene un elemento que no es conjunto.

3.2 CONJUNTO POTENCIA O CONJUNTO DE PARTES

Definición: El conjunto potencia de un conjunto A, denotado por **P (A),** es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A.
Es decir, P (A) = {x / x ⊂ A}

Notas:

1. x ∈ P (A) ⇔ x ⊂ A
2. A ∈ P (A) porque A ⊂ A
   ∅ ∈ P(A) porque ∅ ⊂ A

Propiedades:

P_1: A ⊂ B ⇔ P (A) ⊂ P (B)
P_2: A = B ⇔ P (A) = P (B)
P_3: [P (A) U P (B)] ⊂ P (A U B)
P_4: P (A ∩ B) = P (A) ∩ P (B)

Ejemplo: Si A = {1, 2, 3}, entonces P (A) = {{1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, A, ∅}. Se observa que si:

A = ∅ ⇒ P (A) = P (∅) = { ∅ }
A = {1} ⇒ P (A) = {A, ∅}
A = {1, 2} ⇒ P (A) = {{1}, {2}, A, ∅}
A = {1, 2, 3} ⇒ P (A) = {{1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, A, ∅}

Esto nos sugiere:

n (A) = 0 ⇒ n [P(A)] = 1 = 2^0
n (A) = 1 ⇒ n [P(A)] = 2 = 2^1
n (A) = 2 ⇒ n [P(A)] = 4 = 2^2
n (A) = 3 ⇒ n [P(A)] = 8 = 2^3
n (A) = 4 ⇒ n [P(A)] = 1 = 2^0
....

$\boxed{n(A) = K \Rightarrow n[P(A)] = 2^K \text{ elementos}, K \in \mathbb{Z}_0^+}$

3.3 Ejercicios Resueltos.

A. ¿Cuáles de los conjuntos son iguales entre sí?
1. M = {x / x es impar} y N = {x / x^2 es impar}
2. P = {x / x^2 = 1} y Q = {x / |x| = 1}
3. R = {2x – 1 / x ∈ ℕ; x ≤ 3} y S = {x / x ∈ ℕ; x primo, x < 6}

Solución:
1. M = N porque si: x = 1 ⇒ x^2 = 1 (impar)
   x = 3 ⇒ x^2 = 9 (impar)
   x = 15 ⇒ x^2 = 225 (impar), etc.

2. P = Q porque si: $x \in P \;\Rightarrow\; x^2 = 1$

   En Q: $|x| = 1 \;\Rightarrow\; |x|^2 = 1^2$

   $|x^2| = 1$

   $\therefore\; |x| = 1$

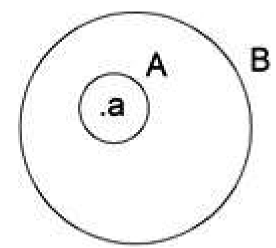
3. $R \neq S$ porque $R = \{1, 3, 5\}$ y $S = \{2, 3, 5\}$

B. ¿Cuáles de las siguientes implicaciones son ciertas?

1. $(A \subset B \wedge a \in A) \rightarrow a \in B$
2. $(A = B \wedge b \in B) \rightarrow b \in A$
3. $(A \subset B,\, B \subset M \wedge A = B) \rightarrow A = M$

Solución:

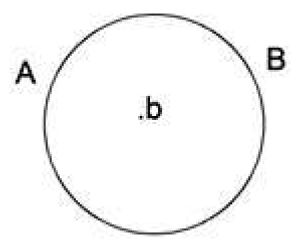
1. Usando los diagramas de Venn – Euler:



Deducimos que:

$$\underset{V}{(A \subset B} \underset{\mathbf{V}}{\wedge} \underset{V}{a \in A) \rightarrow a \in B}$$

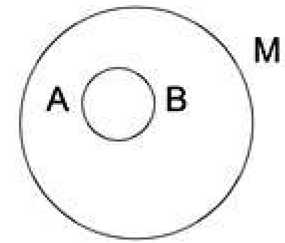
2. Usando los diagramas de Venn – Euler:



Deducimos que:

$$\underset{V}{(A = B} \underset{\mathbf{V}}{\wedge} \underset{V}{b \in B) \rightarrow b \in A}$$

3. Usando los diagramas de Venn – Euler:



Deducimos que:

$$\underset{V}{(A \subset B, B \subset M} \underset{\mathbf{F}}{\wedge} \underset{F}{A = B) \rightarrow A = M}$$

C. Sean los conjuntos:

$A = \{1, 2, 3\}$ $\quad$ $B = \{x \,/\, x^2 = 9,\, x \in \mathbb{Z}\}$

$C = \{x \,/\, x^2 - 7x + 12 = 0\}$ $\quad$ $D = \{2x \,/\, x \in \mathbb{N}\}$

$E = \{x - 1 \,/\, x \in \mathbb{N},\, x \leq 7\}$

Señala si las siguientes relaciones son verdaderas o falsas:

1. $A \not\supset B$
2. B y C no comparables
3. $C = D$
4. $C \subset D$
5. $D \not\supset E$
6. A y E son disjuntos
7. B y D son comparables
8. $A \subset E$

Solución:

Por extensión, tenemos:

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-3, 3\}$, $C = \{3, 4\}$

$D = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ y $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Por tanto:

1. V
2. V

3. F
4. F
5. V
6. F
7. F
8. V

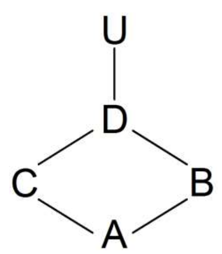
D. Representa en diagrama lineal y en diagrama de Venn – Euler para cada caso:

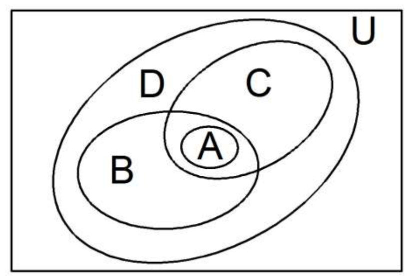
1. $A \subset B$, $A \subset C$, $B \subset D$, $C \subset D \wedge D \subset U$. Además, $B \not\subset C \wedge C \not\subset B$
2. $M \subset N$, $N \supset P$, $Q \subset U$, $U \supset N$. Además, $T \supset P$
3. $S \subset P$, $P \subset U$, $Q \subset U$. Además, $S \not\subset Q$ y $P \not\subset Q$

Solución:

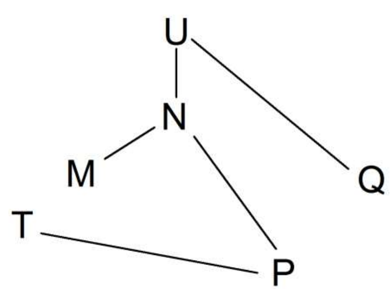
Diagrama Lineal — Diagrama de Venn – Euler

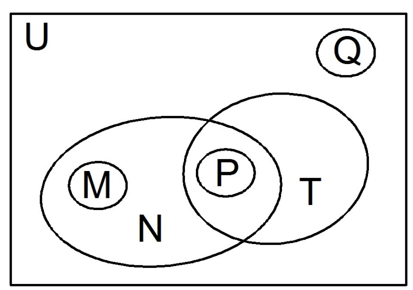
1.



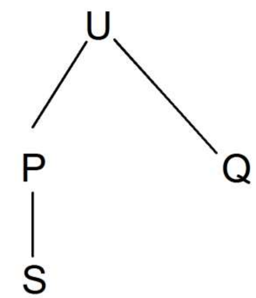


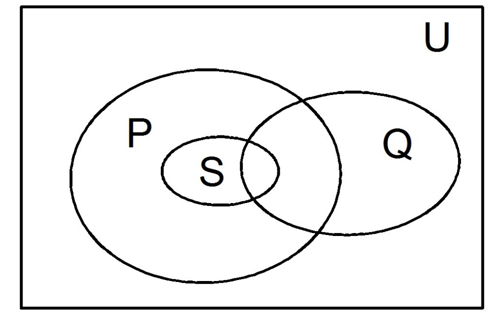
2.





3.





E. Demuestra la proposición:

$A \not\subset B$ equivale a demostrar que: "Existe al menos un $x \in A$ tal que $x \notin B$"

Prueba:

La proposición $A \not\subset B$ equivale decir: "No es cierto que A está contenido en B"; esto es:

$A \not\subset B \Leftrightarrow \sim (A \subset B)$

$\Leftrightarrow \sim (\forall\, x \in A \,/\, x \in A \Rightarrow x \in B)$ Def. inclusion

$\Leftrightarrow \exists\, x \in A \,/ \sim (x \in A \Rightarrow x \in B)$ Neg. de cuantificador

$\Leftrightarrow \exists\, x \in A \,/\, x \in A \wedge \sim (x \in B)$ Ley condicional

$\Leftrightarrow \exists\, x \in A \,/\, (x \in A \wedge x \notin B)$ Negación

$\therefore\; A \not\subset B \Leftrightarrow \exists\, x \in A \,/\, (x \in A \wedge x \notin B)$

F. Demuestra que: Si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$

Prueba:

$A \subset B \Leftrightarrow \forall\, x \in A \,/\, x \in A \Rightarrow x \in B$ Def. inclusión
$B \subset C \Leftrightarrow \forall\, x \in B \,/\, x \in B \Rightarrow x \in C$ Def. inclusión

Por principio del silogismo hipotético:

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

En consecuencia:

$\forall\, x \in A \,/\, x \in A \Rightarrow x \in C$ pues $A \subset C$.

G. Cuántos elementos tiene el conjunto M que tiene:

1. 15 subconjuntos no vacíos.
2. 14 subconjuntos propios no vacíos.
3. 127 subconjuntos no vacíos.
4. 510 subconjuntos propios no vacíos.

Solución:

1. $15 + \emptyset = 16$ subconjuntos $= 2^4$. Luego M tiene 4 elementos.
2. $14 + M + \emptyset = 16$ subconjuntos $= 2^4$. Luego M tiene 4 elementos.
3. $127 + \emptyset = 128$ subconjuntos $= 2^7$. Luego M tiene 7 elementos.
4. $510 + M + \emptyset = 512$ subconjuntos $= 2^9$. Luego M tiene 9 elementos.

H. Determina cuáles de las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

1. $\{\emptyset, \emptyset\} \subset \{ \emptyset \}$
2. $\emptyset \in \{\{ \emptyset \}\}$
3. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subset P(\emptyset)$
4. $\{ \emptyset \} \subset P(\emptyset)$
5. $P(\emptyset, \{\emptyset\}) \neq \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$
6. $P(\emptyset) = \{ \emptyset \}$

Solución:

1. V
2. F
3. F
4. V
5. V ; $P(\emptyset, \{\emptyset\})$ tiene 4 subconjuntos y no 2
6. V

I. Demuestra que: $A \subset B \Leftrightarrow P(A) \subset P(B)$

Prueba:

$\Rightarrow$) Si $A \subset B \Rightarrow P(A) \subset P(B)$

En efecto, sea $x \in P(A) \Rightarrow x \subset A$ Def. de P (A)

$\Rightarrow x \subset B$ Prop. S_3

$\Rightarrow x \in P(B)$ Def. de P (B)

Luego, $x \in P(A) \Rightarrow x \in P(B)$

$\therefore P(A) \subset P(B)$

$\Leftarrow$) $P(A) \subset P(B) \Rightarrow A \subset B$

Sea $y \in A \Rightarrow \{y\} \subset A$ Subconjunto de A

$\Rightarrow \{y\} \in P(A)$ Def. P (A)

$\Rightarrow \{y\} \in P(B)$ $P(A) \subset P(B)$

$\Rightarrow \{y\} \subset B$ Def. P (B)

$\Rightarrow y \in B$ Subconjunto de B

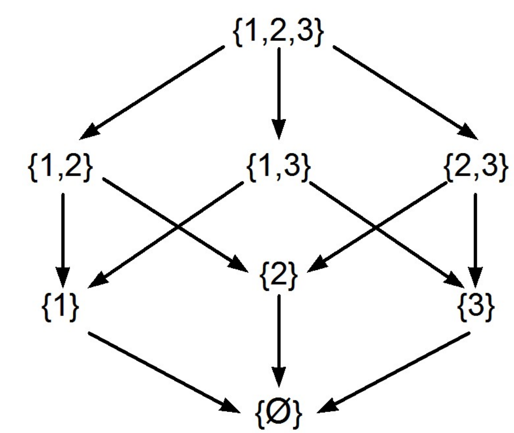
$\therefore A \subset B$ por definición de inclusión.

J. Según el **diagrama de Latiz** o de Red, $\{1, 2, 3\} \supset \{1, 3\}$ se anota como $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 3\}$. Si $M = \{1, 2, 3\}$, traza un diagrama de Latiz para la relación de inclusión entre los subconjuntos de M.

Solución:

Si $M = \{1, 2, 3\}$, entonces $P(M) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, M, \emptyset\}$

Su diagrama de Latiz es:



3.4 Actividad de Aprendizaje

A. Sean A = {x ∈ ℕ / 2 x 9} ; B = {2x / x ∈ ℕ, x 5};
C = {2x – 1 / x ∈ ℕ, 2 ≤ x < 5} ; D = {2, 4} y E = {1, 3}

Determina en cada caso, cuál de estos conjuntos puede ser el conjunto X tal que:

1. X y B son disjuntos
2. X ⊄ B y X ⊄ E
3. X ⊂ A y X ⊂ B
4. X ⊄ A y X ⊂ E
5. X ⊂ A y X ⊄ C
6. X ⊄ C y X ⊂ D
7. X ⊂ A y X ⊂ E

Sugerencia: Apóyese con un diagrama de Venn – Euler

B. ¿Cuáles de las siguientes implicaciones son ciertas?

1. (A ⊂ B ∧ a ∈ A) → a ∈ B
2. x ∈ A → {x} ⊂ A
3. x ∈ A → {x} ∈ A
4. (A ⊂ B ∧ B ⊂ A) → A = B

C. Discute todas las posibilidades de inclusión entre los siguientes conjuntos::

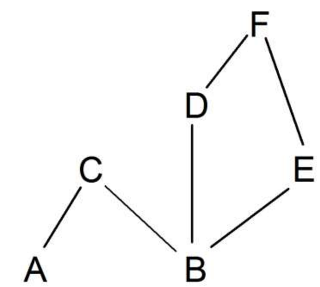
Ø ; { Ø } ; {O} ; {Ø, O}

D. Representa en diagrama lineal y en diagrama de Venn – Euler para cada caso:

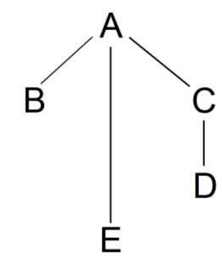
1. A ⊂ B, C ⊂ D, B ⊂ E, D ⊂ E; además B y D son disjuntos.
2. Q ⊃ P, P ⊂ R, R ⊃ Q; además T ⊃ P.
3. A ⊃ C, C ⊂ D, A ⊂ D, A ⊂ E; además E y D son no comparables.
4. A ⊃ D, D ⊂ B, C ⊂ D; además A, B y C son comparables.
5. P ⊂ Q, R ⊃ Q, S ⊃ Q, V ⊂ R, R ⊂ T, T ⊃ S.
6. A ⊂ B, B ⊂ C, A ⊂ C, B ⊂ D, C ⊂ D, D ⊂ U.

E. Exprese en diagramas de Venn – Euler:

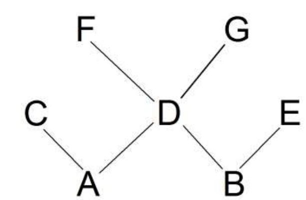
1.



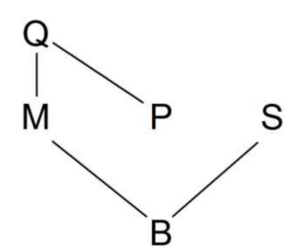
2.



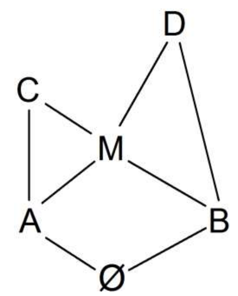
3.



4.



5.



F. Demuestra que el conjunto de los números naturales impares es igual al conjunto de los números naturales cuyo cuadrado es impar.

G. Demuestra que si $A = B \Rightarrow P(A) = P(B)$.

H. Dado el siguiente conjunto:

$$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$$

Determina el valor de verdad de cada relación:

1. $\emptyset \in A$
2. $\emptyset \subset A$
3. $\{\{\emptyset\}\} \in A$
4. $\{\{\emptyset\}\} \subset A$
5. $\{\{\emptyset\}\} \in P(A)$
6. $\{\{\{\emptyset\}\}\} \subset P(A)$
7. $\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\} \in P(A)$

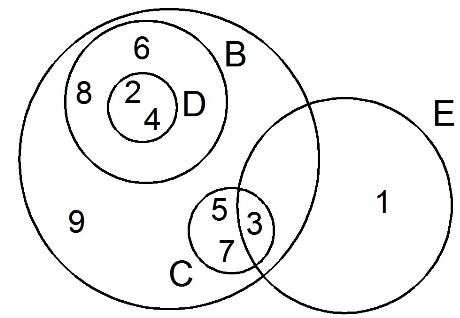
I. Responde a las siguientes preguntas:

1. Si un conjunto tiene 128 subconjuntos, ¿de cuántos elementos consta?
2. ¿Es el ∅ subconjunto de ∅?
3. ¿Es el conjunto A subconjunto de A?
4. ¿Cuáles son los divisores propios del número 429?
5. ¿Cuántos divisores tiene el número 13566?
6. ¿Qué cardinalidades tienen aquellos conjuntos que no tienen subconjuntos propios?

3.5 Clave de Respuesta

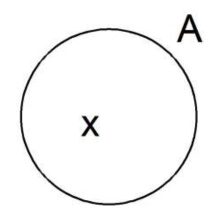
A. 2) Sólo C
4) Sólo B
6) D

Gráficamente:



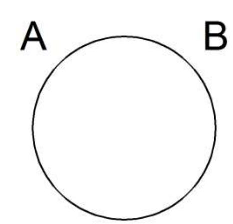
B. 2) Falso

Gráficamente:



4) Verdadero

Gráficamente:



C. Posibilidad 1:

$\emptyset \subset \{ \emptyset \}$
$\emptyset \subset \{O\}$
$\emptyset \subset \{\emptyset, O\}$

Posibilidad 2:

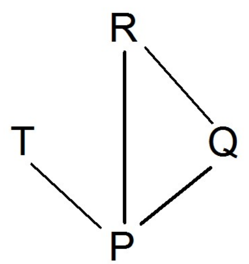
$\{ \emptyset \} \not\subset \emptyset$
$\{ \emptyset \} \not\subset \{O\}$
$\{ \emptyset \} \subset \{\emptyset, O\}$

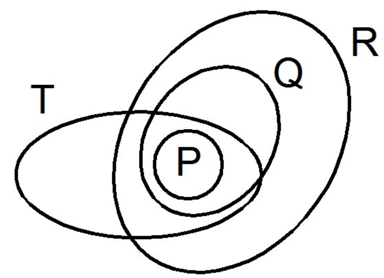
Posibilidad 3:

$\{\emptyset, O\}$, no está incluido en ninguno de los anteriores.

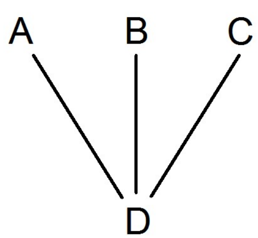
D. Diagrama lineal — Diagrama de Venn – Euler

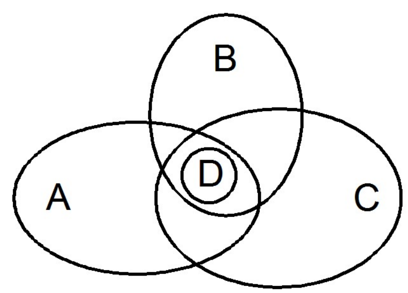
2)



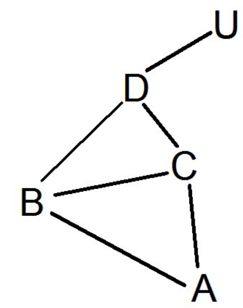


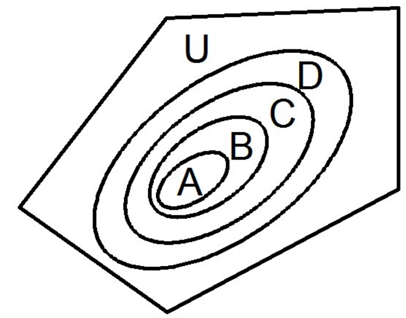
4)



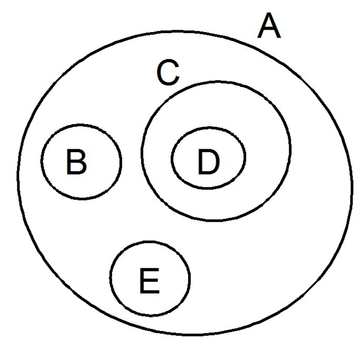


6)

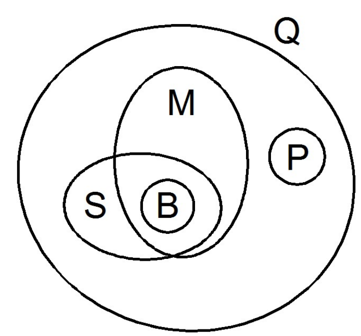




E. 2)



4)



H. 2) Verdadero
4) Verdadero
6) Verdadero

I. 2) Verdadero
4) 3, 11, 13, 33, 39, 143.
6) Tienen cardinalidad 0 y 1 y ya que los conjuntos son ∅ y {a}, y tienen sólo como subconjunto al mismo conjunto vacío que son impropios.

> *"La grandeza del hombre no se mide por su posición en los asuntos de la vida, ella es producto de su grandeza de espíritu y su gran necesidad de logro"*

Unidad 2 / Conjuntos

LECCIÓN 4

OPERACIONES CON CONJUNTOS Y SUS PROPIEDADES.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Realizar operaciones entre conjuntos.
2. Demostrar las propiedades de las operaciones entre conjuntos, utilizando cualquier método.
3. Efectuar operaciones entre conjuntos en la recta numérica.

4.1 UNIÓN DE CONJUNTOS

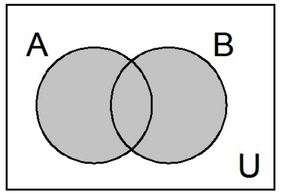
Dado dos conjuntos cualesquiera A y B, llamamos **Unión** de **A** y **B** al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A, a B o a ambos.

Se denota por **"A ∪ B"** y se lee "A unión B".

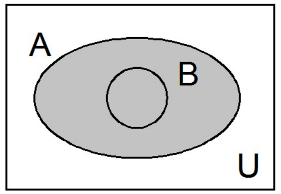
En forma simbólica:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

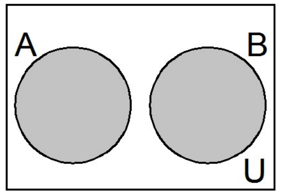
Para representar gráficamente A U B, se tendrá presente las relaciones entre conjuntos dados en cada caso particular. El diagrama de Venn – Euler correspondiente a la unión de A y B es:



A y B no disjuntos



B ⊂ A, A ∪ B = A



A y B disjuntos

Ejemplo: Sean los conjuntos:

$A = \{2x + 1 \ / \ 1 \leq x \leq 4 \quad , \quad x \in \mathbb{N}\}$
$B = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x \text{ es múltiplo de 3 menor que } 13\}$
$C = \{6, 12\}$

Halla: $A \cup B$, $B \cup C$ y $A \cup C$. Representa gráficamente cada caso.

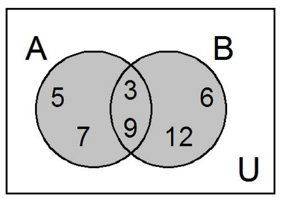
Solución:

Por extensión: $A = \{3, 5, 7, 9\}$
$B = \{3, 6, 9, 12\}$
$C = \{6, 12\}$

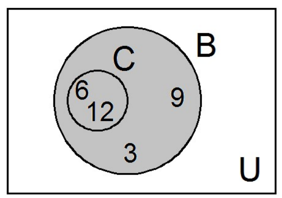
Luego, tenemos:

$A \cup B = \{3, 5, 6, 7, 9, 12\}$
$B \cup C = \{3, 6, 9, 12\}$
$A \cup C = \{3, 5, 6, 7, 9, 12\}$

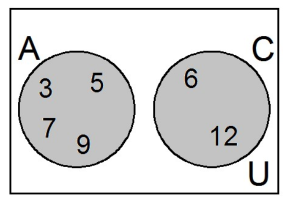
Gráficamente:



$A \cup B$



$B \cup C = B$



$A \cup C$

Propiedades:

U_1: $A \cup A = A$ (Idempotencia)

U_2: $A \cup B = B \cup A$ (Conmutativa)

U_3: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Asociativa)

U_4: $A \cup \emptyset = A$ (Prop. de identidad)

$A \cup U = U$, U: Conjunto Universal

Unidad 2 / Conjuntos

$$\left.\begin{array}{l} U_5: A \subset (A \cup B) \\ \quad\ B \subset (A \cup B) \end{array}\right\} \forall\ A, B.$$

U_6: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$ (Distributiva)

U_7: Si $A \cup B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$

U_8: Si $A \subset B \Rightarrow (A \cup C) \subset (B \cup C)$, $\forall\ C$ (Monótona)

U_9: Si $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

U_{10}: $(A \subset C \wedge B \subset C) \Leftrightarrow [(A \cup B) \subset C]$

4.2 INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

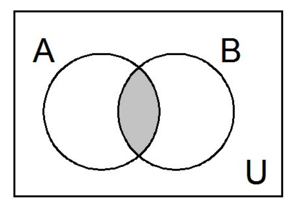
Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, llamamos **Intersección** de **A** y **B** al conjunto formado por todos los elementos comunes a ambos conjuntos.

Se denota por **"A ∩ B"** y se lee "A intersección B".

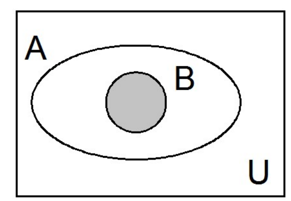
En forma simbólica:

$$A \cap B = \{x \ / \ x \in A \wedge x \in B\}$$

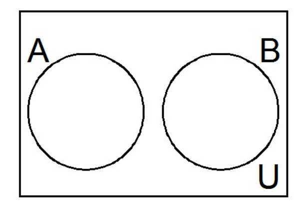
La parte sombreada de los siguientes diagramas de Venn – Euler es la representación gráfica de la intersección:



A y B no disjuntos



$B \subset A$, $A \cap B = B$



A y B disjuntos, $A \cap B = \emptyset$

Ejemplo: Sean los conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x \text{ es primo}, \ x < 6\}$
$B = \{x^2 - 1 \ / \ 0 \leq x \leq 3 \quad , \quad x \in \mathbb{Z}\}$
$C = \{-1, 0\}$

Halla: $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$ y $A \cap B \cap C$. Representa gráficamente cada caso.

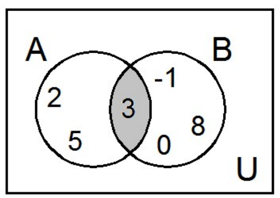
Solución:

Por extensión: $A = \{2, 3, 5\}$
$B = \{-1, 0, 3, 8\}$
$C = \{-1, 0\}$

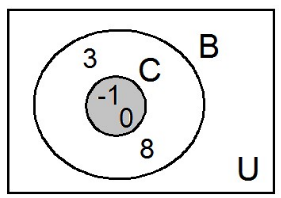
Luego, tenemos:

$A \cap B = \{3\}$
$B \cap C = \{-1, 0\}$
$A \cap C = \emptyset$
$A \cap B \cap C = \emptyset$

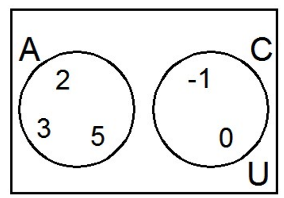
Gráficamente:



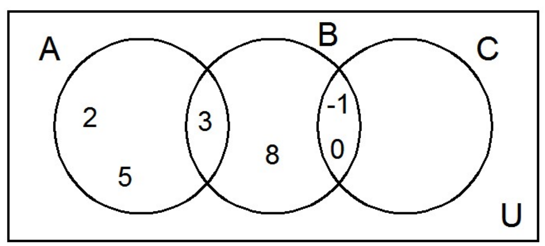
$A \cap B$



$B \cap C = C$



$A \cap C = \emptyset$



$A \cap B \cap C = \emptyset$

Propiedades:

I_1: $A \cap A = A$ (Idempotencia)

I_2: $A \cap B = B \cap A$ (Conmutativa)

I_3: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Asociativa)

I_4: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$ (Distributiva de la unión respecto a la intersección)

I_4: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$ (Distributiva de la intersección respecto a la unión)

$$\left.\begin{array}{l} I_5: A \cap (A \cup B) = A \\ \quad A \cup (A \cap B) = A \end{array}\right\} \text{(Absorción)}$$

I_6: $A \cap \emptyset = \emptyset$ (Prop. de identidad)

$A \cap U = A$

I_7: $A \subset B \iff A \cap B = A$

I_8: $(A \cap B) \subset A$ y $(A \cap B) \subset B$, $\forall$ A, B.

I_9: Si $A \subset B \Rightarrow (A \cap B) \subset (B \cap C)$, $\forall$ C

I_{10}: Si $(A \subset C \wedge B \subset D) \Rightarrow (A \cap B) \subset (C \cap D)$

4.3 DIFERENCIA DE CONJUNTOS

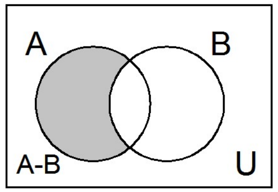
Dados los conjuntos A y B, llamados **Diferencia** de **A** y **B**, en ese orden al conjunto formado por todos los elementos de A que no pertenecen a B.

Se denota por **"A – B"** y se lee "A menos B".

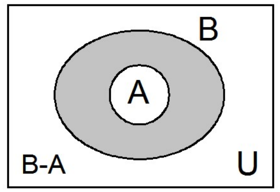
En forma simbólica:

$A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$

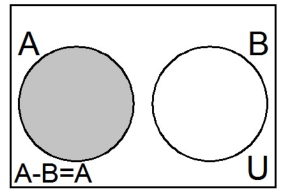
La parte sombreada de los siguientes diagramas de Venn – Euler es una representación gráfica de la diferencia:



A y B no disjuntos



$A \subset B$, $A-B = \emptyset$



A y B disjuntos, A-B = A

Ejemplo: Dados los conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{Z}^+ \,/\, x \text{ es divisor de } 12\}$
$B = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ es un número cuadrado o cubo}, 1 \leq x \leq 20\}$
$C = \{x \in \mathbb{Z}^+ \,/\, \sim (x \geq 1 \rightarrow x^2 \neq 4x - 3)\}$
$D = \{x \in \mathbb{Z}^+ \,/\, x > 4 \rightarrow x = 6\}$

Halla: A – B, A – C, B – C, C – D y D – C. Representa gráficamente cada caso.

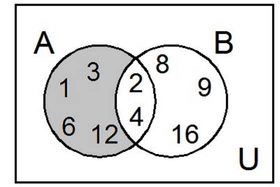
Solución:

Por extensión: $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$B = \{2, 4, 8, 9, 16\}$
$C = \{x \in \mathbb{Z}^+ \,/\, x \geq 1 \wedge x^2 = 4x - 3\} = \{1, 3\}$
$D = \{x \in \mathbb{Z}^+ \,/\, x \leq 4 \vee x = 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

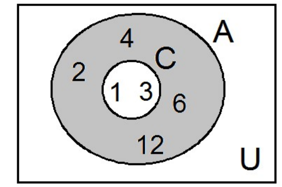
Luego, tenemos:

$A - B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} - \{2, 4, 8, 9, 16\} = \{1, 3, 6, 12\}$
$A - C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} - \{1, 3\} = \{2, 4, 6, 12\}$
$B - C = \{2, 4, 8, 9, 16\} - \{1, 3\} = \{2, 4, 8, 9, 16\} = B$
$C - D = \{1, 3\} - \{1, 2, 3, 4, 6\} = \emptyset$
$D - C = \{1, 2, 3, 4, 6\} - \{1, 3\} = \{2, 4, 6\}$

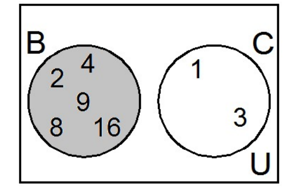
Gráficamente:



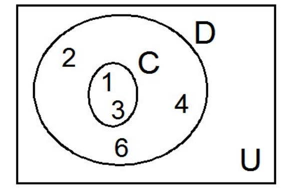
A - B



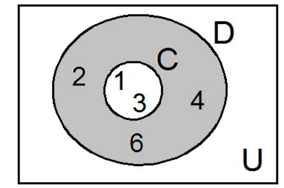
A - C



B - C = B



$C \subset D$, $C-D = \emptyset$



$C \subset D$, $D-C = \{2,4,6\}$

Propiedades:

D_1: $A - \emptyset = A$

D_2: $A - A = \emptyset$

D_3: $\emptyset - A = \emptyset$

D_4: $A - B \neq B - A$

D_5: $A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$

D_6: $B \cap (A - B) = \emptyset$

D_7: $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

D_8: Si $A \subset B \Rightarrow (A - C) \subset (B - C) \quad , \quad \forall C$

D_9: $A \subset B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

D_{10}: $A \subset B \Rightarrow A \cup (B - A) = B$

D_{11}: $B \cap (A - B) = \emptyset$

D_{12}: $(A - B) \subset A$

4.4 DIFERENCIA SIMÉTRICA

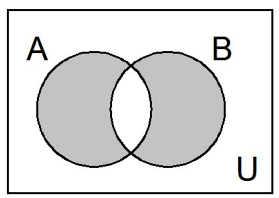
Dados los conjuntos A y B, llamados **Diferencia Simétrica** de **A** y **B** al conjunto formado por todos los elementos solamente a A ó solamente a B.

Se denota por **"A Δ B"** y se lee "A diferencia simétrica B".

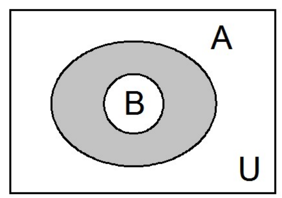
En forma simbólica:

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$$
$$= (A \cup B) - (A \cap B)$$

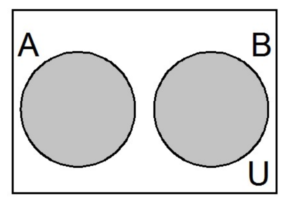
La parte sombreada de los siguientes diagramas de Venn – Euler es una representación gráfica de la diferencia simétrica:



A y B no disjuntos, AΔB



B⊂A, AΔB = C_AB



A y B disjuntos, AΔB = A∪B

Ejemplo: Dados los conjuntos:

A = {2, 3, 4, 5, 6, 7}
B = {1, 4, 6, 7, 9}
C = {1, 9}

Halla: A Δ B, B Δ C y A Δ C. Representa gráficamente cada caso.

Solución:

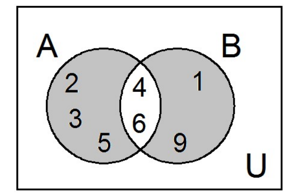
i) A Δ B = (A – B) ∪ (B – A), donde:

A – B = {2, 3, 5} , B – A = {1, 9}
Entonces: A Δ B = {2, 3, 5, 1, 9}

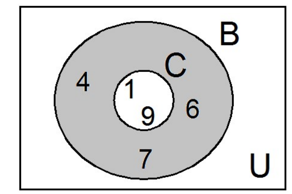
ii) C ⊂ B, B Δ C = (B – C) ∪ ∅ = B – C
B – C = {4, 6, 7} = B Δ C

iii) A y C son disjuntos, entonces:
A Δ C = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 9}

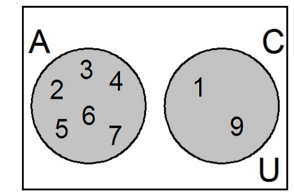
Gráficamente:



A Δ B



C⊂B, BΔC = B-C



A Δ C

Propiedades:

P_1: $A \,\Delta\, A = \emptyset$

P_2: $A \,\Delta\, \emptyset = A$

P_3: $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$

P_4: $(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$

P_5: $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$

P_6: $(A \,\Delta\, B) \cup (B \,\Delta\, C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

4.5 COMPLEMENTACIÓN DE CONJUNTOS

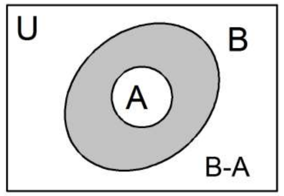
i) Si A ⊂ B, definimos el **complemento de A con respecto a B** a la diferencia B – A.

Se denota por **"C_BA".**

En forma simbólica:

$$C_BA = B - A = \{x \,/\, x \in B \wedge x \notin A\}$$

La parte sombreada de los siguientes diagramas de Venn – Euler es una representación gráfica de C_BA:



$A \subset B$, $C_BA = B-A$

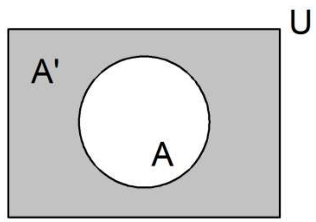
ii) Si $A \subset U$, definimos el **complemento de A con respecto al conjunto universal U** al conjunto formado por todos los elementos de U que no pertenecen al conjunto A.

Se denota por **"A′** (también como **A^C ó $\overline{A}$)".**

En forma simbólica:

$$A' = U - A = \{x \,/\, x \in U \wedge x \notin A\}$$

La parte sombreada de los siguientes diagramas de Venn – Euler es una representación gráfica de A′:



$A \subset U$, $A' = U-A$

Ejemplo: Supongamos que $U = \{x \in \mathbb{Z}^+ \,/\, x \leq 10\}$ y sean los conjuntos:

$A = \{2x \,/\, x \in U\}$
$B = \{x \in U \,/\, (x^2 - 4)(x^2 - 7x + 12) = 0\}$
$C = \{x \in U \,/\, 9^{x^2-3} = 9\}$

Halla: A', B', C', $(A \cup B)'$, $(A \cap B)'$, $(B - C)'$, $(A \,\Delta\, B)'$, C_BA y $C_A(A \cap B)$. Representa gráficamente cada caso.

Solución:

Por extensión:

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
$B = \{2, 3, 4\}$
$C = \{2\}$

Luego, tenemos:

$A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B' = \{1, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$C' = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow (A \cup B)' = \{1, 5, 7, 9\}$

$A \cap B = \{2, 4\} \Rightarrow (A \cap B)' = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

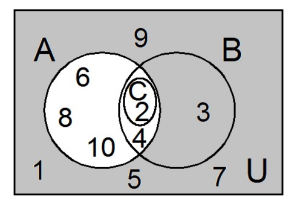
$B - C = \{3, 4\} \Rightarrow (B - C)' = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A \,\Delta\, B = \{3, 6, 8, 10\} \Rightarrow (A \,\Delta\, B)' = \{1, 2, 4, 5, 7, 9\}$

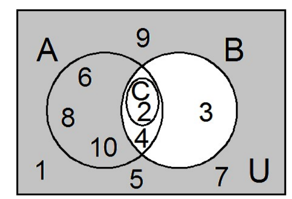
$C_BA = B - A = \{2, 3, 4\} - \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{3\}$

$C_A(A \cap B) = A - (A \cap B) = \{2, 3, 4, 6, 8, 10\} - \{2, 4\} = \{6, 8, 10\}$

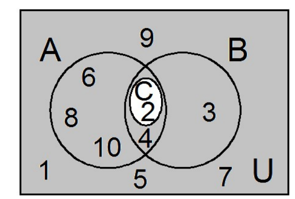
Gráficamente:



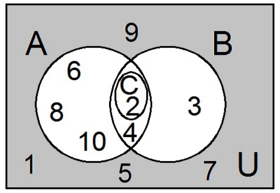
A'



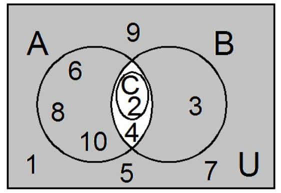
B'



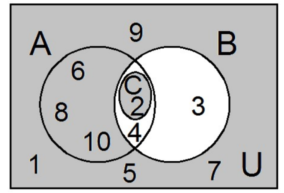
C'



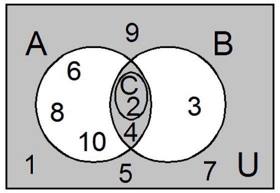
$(A \cup B)'$



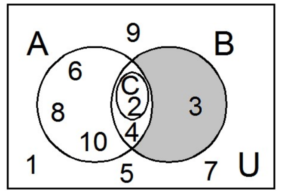
$(A \cap B)'$



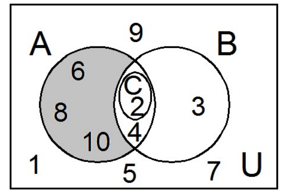
$(B - C)'$



$(A \Delta B)'$



$C_B A$



$C_A(A \cap B)$

Propiedades:

C_1: $(A')' = A$

C_2: $C_B\,(C_B A) = A$

C_3: $U' = \emptyset$

C_4: $C_A A = \emptyset$

C_5: $\emptyset' = U$

C_6: $C_A \emptyset = A$

C_7: $A \cup A' = U$

C_8: $A \cup C_B A = B$

C_9: $A \cap A' = \emptyset$

C_{10}: $A \cap C_B A = \emptyset$

C_{11}: $C_B A \subset B$ y $C_A B \subset A$

C_{12}: $A - B = A \cap C_A B$

C_{13}: $A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$

$$\left.\begin{aligned} C_{14}&: (A \cup B)' = A' \cap B' \\ &\quad (A \cap B)' = A' \cup B' \end{aligned}\right\} \text{Leyes de D' MORGAN}$$

4.6 RESUMEN DE LAS PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Es interesante resumir las propiedades más importantes de las operaciones entre conjuntos. Todas ellas se derivan de las definiciones de conjunto universal, conjunto vacío, complementación, intersección, unión y de las relaciones entre conjuntos. También se les denomina **Leyes Básicas del Álgebra de Conjuntos.**

Sean A, B, C conjuntos no vacíos. Entonces, independientemente de cuáles sean las especificaciones de A, B, C se verifican las siguientes propiedades.

1. Idempotencia:

   1a) $A \cup A = A$
   1b) $A \cap A = A$

2. Identidad:

   2a) $A \cup \emptyset = A$
   2b) $A \cap \emptyset = \emptyset$
   2c) $A \cup U = U$
   2d) $A \cap U = A$

3. Complementación:

   3a) $A \cup A' = U$

   3b) $A \cap A' = \emptyset$

   3c) $(A')' = A$

   3d) $U' = \emptyset$, $\emptyset' = U$

4. Conmutatividad

   4a) $A \cup B = B \cup A$
   4b) $A \cap B = B \cap A$

5. Asociatividad:

   5a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   5b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

6. Distributividad:

   6a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   6b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

7. Leyes de D' MORGAN:

   7a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

   7b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

8. Leyes de Absorción:

   8a) $A \cup (A \cap B) = A$
   8b) $A \cap (A \cup B) = A$

9. Contención $A \subset B$:

   9a) $A \cup B = B$
   9b) $A - B = \emptyset$

Ejemplo 1: Demuestra (5a): $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Prueba: (5a) equivale demostrar:

I) $[A \cup (B \cap C)] \subset [(A \cup B) \cap (A \cup C)]$
II) $[(A \cup B) \cap (A \cup C)] \subset [A \cup (B \cap C)]$

En efecto:

I) $[A \cup (B \cap C)] \subset [(A \cup B) \cap (A \cup C)]$

Aplicando definición de contención de conjuntos:

$$\begin{aligned}
\forall x \in [A \cup (B \cap C)] &\Rightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C) && \text{(Def. 4.1)}\\
&\Rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) && \text{(Def. 4.2)}\\
&\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) && (I_4)\\
&\Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) && \text{(Def. 4.1)}\\
&\Rightarrow x \in [(A \cup B) \cap (A \cup C)] && \text{(Def. 4.2)}
\end{aligned}$$

Por tanto: $\forall x \in [A \cup (B \cap C)] \Rightarrow x \in [(A \cup B) \cap (A \cup C)]$,
equivale a: $[A \cup (B \cap C)] \subset [(A \cup B) \cap (A \cup C)]$

Análogamente se demuestra (II). En efecto:

$$\begin{aligned}
\forall x \in [(A \cup B) \cap (A \cup C)] &\Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) && \text{(Def. 4.2)}\\
&\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) && \text{(Def. 4.1)}\\
&\Rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) && (I_4)\\
&\Rightarrow x \in [A \cup (B \cap C)] && \text{(Def. 4.1)}
\end{aligned}$$

Por tanto: $\forall x \in [(A \cup B) \cap (A \cup C)] \Rightarrow x \in [A \cup (B \cap C)]$,
equivale a: $[(A \cup B) \cap (A \cup C)] \subset [A \cup (B \cap C)]$

De (I) y (II) se concluye que:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Ejemplo 2: Demuestra (7a): $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Prueba: (7a) debe demostrarse:

I) $(A \cup B)' \subset (A' \cap B')$

II) $(A' \cap B') \subset (A \cup B)'$

Para (I):

$$
\begin{array}{lll}
\forall\, x \in (A \cup B)' & \Rightarrow x \notin (A \cup B) & \text{(Def. 4.5)} \\
 & \Rightarrow \sim [x \in (A \cup B)] & \text{(Neg. de Pert.)} \\
 & \Rightarrow \sim [(x \in A) \vee (x \in B)] & \text{(Def. 4.1)} \\
 & \Rightarrow \sim (x \in A) \wedge \sim (x \in B) & \text{(Ley M. 8a)} \\
 & \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B & \text{(Neg. de Pert.)} \\
 & \Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' & \text{(Def. 4.5)} \\
 & \Rightarrow x \in (A' \cap B') & \text{(Def. 4.2)}
\end{array}
$$

Luego, $\forall\, x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \in (A' \cap B')$, lo cual demuestra que:

$(A \cup B)' \subset (A' \cap B')$

Para (II):

$$
\begin{array}{lll}
\forall\, x \in (A' \cap B') & \Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' & \text{(Def. 4.2)} \\
 & \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B & \text{(Def. 4.5)} \\
 & \Rightarrow \sim (x \in A) \wedge \sim (x \in B) & \text{(Neg. De Pert.)} \\
 & \Rightarrow \sim [(x \in A) \vee (x \in B)] & \text{(Ley M. 8a)} \\
 & \Rightarrow \sim [x \in (A \cup B)] & \text{(Def. 4.1)} \\
 & \Rightarrow x \notin (A \cup B) & \text{(Neg. de Pert.)} \\
 & \Rightarrow x \in (A \cup B)' & \text{(Def. 4.5)}
\end{array}
$$

Luego, $\forall\, x \in (A' \cap B') \Rightarrow x \in (A \cup B)'$, lo cual demuestra que:

$(A' \cap B') \subset (A \cup B)'$

De (I) y (II), se concluye que:

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

4.7 GRÁFICA DE CONJUNTOS EN LA RECTA NUMÉRICA

Supóngase que **a** y **b** son puntos que se encuentran sobre la recta real. Si esto es así, se pueden presentar sólo tres situaciones:

a > b , a = b ó a < b. Ya se vio que la proposición a = b se llama **igualdad.** A las otras se les llama **desigualdades.**

Las desigualdades establecen ciertos intervalos sobre la recta numérica. Por ejemplo, necesitamos localizar todos los números menores que 5. Sabemos que este conjunto lo podemos representar como $\{x \,/\, x < 5,\ x \in \mathbb{R}\}$. Necesitamos establecer cierta notación específica sobre estos intervalos en la recta numérica. Así tendremos las siguientes definiciones.

Definición 1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Los siguientes conjuntos se denominan intervalos acotados.

i) Cerrado $\{x \,/\, a \le x \le b\} = [a, b]$

ii) Abierto $\{x \,/\, a < x < b\} = \langle a, b \rangle$

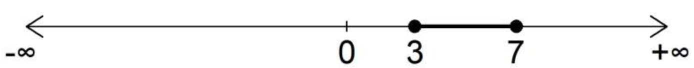
Ejemplos:

1. Señala en la recta numérica el intervalo [3, 7].

El intervalo en la recta numérica es el conjunto

$\{x \,/\, 3 \le x \le 7\}$

Gráficamente, tenemos:



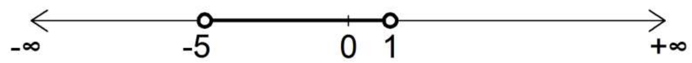
El conjunto comienza con todos los números del 3 hasta el 7, incluyendo el 3 y el 7.

2. Señala en la recta numérica el intervalo $<-5, 1>$.

   El intervalo en la recta numérica es el conjunto

   $\{x \,/\, -5 < x < 1\}$

   Gráficamente, tenemos:



   El conjunto comienza con el número que está a la derecha de -5, y termina con el número que esté a la izquierda de 1. No incluye a -5 y 1, por eso lo llamamos intervalo abierto en los extremos.

Definición 2. Sean a, b $\in \mathbb{R}$. Los siguientes conjuntos se llaman intervalos ilimitados.

i) $\{x \,/\, x \geq b\} = [b, +\infty >$
   $\{x \,/\, x \leq a\} = <-\infty, -a]$

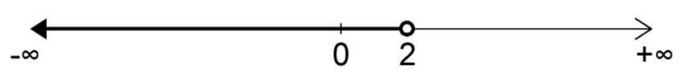
ii) $\{x \,/\, x > b\} = <b, +\infty >$
   $\{x \,/\, x < a\} = <-\infty, a>$

Donde el signo $+\infty$, se lee "infinito positivo" y $-\infty$, se lee "infinito negativo".

Ejemplos:

1. Señala en la recta numérica el intervalo $<-\infty, 2>$.

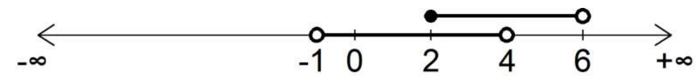
   El intervalo representa el conjunto $\{x \,/\, x < 2\}$. En la recta numérica, representa:



   El conjunto contiene todos los números que están a la izquierda del número 2, sin incluir el 2.

2. Encuentra el intervalo solución de $[-1, 4> \cap [2, 6>$.

   Representando en la recta numérica.



   La solución es $[2, 4>$.

4.8 Ejercicios Resueltos.

A. Dados los conjuntos:

$U = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, 0 \leq x < 20\}$

$P = \{2x^2 \,/\, x \text{ es primo impar}, 1 < x < 5\}$

$Q = \{n - 1 \,/\, n \in \mathbb{Z}, 3 \leq n < 5\}$

Halla:

1. $P \cup Q$
2. $P \cap Q$
3. $P' \cap Q'$
4. $P \,\Delta\, Q$

Además, representa gráficamente cada caso:

Solución:

Por extensión:

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 18, 19\}$

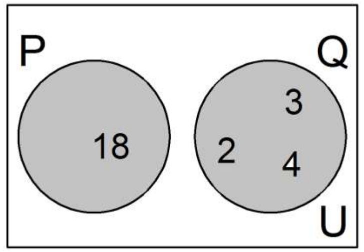
$P = \{18\}$

$Q = \{2, 3, 4\}$

1. $P \cup Q$:

   $P \cup Q = \{18\} \cup \{2, 3, 4\} = \{2, 3, 4, 18\}$

   Gráficamente:



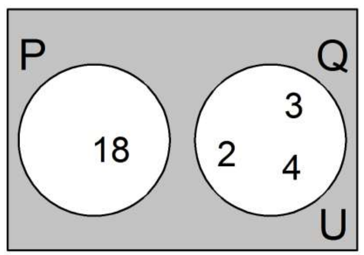
2. $P \cap Q$:

   $P \cap Q = \{18\} \cap \{2, 3, 4\} = \emptyset$ (ya que P y Q son disjuntos)

3. $P' \cap Q'$:

   $P' \cap Q' = \{0, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19\}$

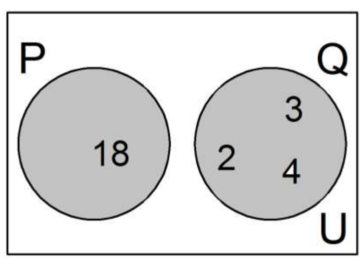
   Gráficamente:



4. $P \Delta Q$:

   $P \Delta Q = (P - Q) \cup (Q - P) = \{18\} \cup \{2, 3, 4\} = \{2, 3, 4, 18\}$

   Gráficamente:



B. Dados los conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ -1 \leq x \leq 5\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 9^{-3x} = (\frac{1}{27})^{x+3}\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^{x^2-7x+1} = 1\}$

$D = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x^3 - x - 3x^2 + 3 = 0\}$

$E = \{x \in \mathbb{N} \ / \ 4 < x < 7 \vee x^2 + 3x - 10 = 0\}$

Halla:

1. $(A - B) \cup C$
2. $(A \cup B) \cap C$
3. $E - (D \cap C)$
4. $(A - B) \cup (C \cap D)$
5. $[E - (B \cup C)] \cap D$

Solución:

Extendiendo los conjuntos:

Con A: $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Con B: $(3^2)^{-3x} = (3^{-3})^{x+3}$

$$3^{-6x} = 3^{-3x-9} \Rightarrow -6x = -3x - 9$$

$$3x - 9 = 0$$

$$x = 3$$

$\therefore$ $B = \{3\}$

Con C: $x^{x^2-7x+12} = x^0 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$

$$\Rightarrow (x - 4)(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \vee x = 4$$

$\therefore$ $C = \{3, 4\}$

Con D: Por Ruffini:

	1	-3	-1	3
$x_1 = 1$		1	-2	-3
	1	-2	-3	0
$x_2 = -1$		-1	3	
	1	-3	0	
$x_3 = 3$		3		
	1	0		

$\therefore \quad D = \{1, -1, 3\}$

Con E: $4 < x < 7 \quad \Rightarrow \quad \{5, 6\}$

$x^2 + 3x - 10 = 0$

$(x - 2)(x + 5) = 0$

$x = 2 \quad \vee \quad x = -5 \notin \mathbb{N}$

$\therefore \quad E = \{2, 5, 6\}$

Luego:

1. $(A - B) \cup C = \{-1, 0, 1, 2, 4, 5\} \cup \{3, 4\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} = A$
2. $(A \cup B) \cap C = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{3, 4\} = \{3, 4\} = C$
3. $E - (D \cap C) = \{2, 5, 6\} - \{3\} = \{2, 5, 6\} = E$
4. $(A - B) \cup (C \cap D) = \{-1, 0, 1, 2, 4, 5\} \cup \{3\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} = A$
5. $[E - (B \cup C)] \cap D = [\{2, 5, 6\} - \{3, 4\}] \cap \{1, -1, 3\} =$
   $\{2, 5, 6\} \cap \{1, -1, 3\} = \emptyset$

C. De las siguientes propiedades para conjuntos, señale cuáles son verdaderos y cuáles son falsas.

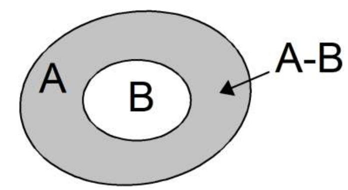
1. $A \cup B = A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad A = B$
2. $(A - B) \cup B = A \quad \Leftrightarrow \quad B \subset A$
3. $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) \quad , \quad \forall\, A, B.$

Unidad 2 / Conjuntos

Solución:

1. Verdadera: porque $A \cup A = A \cap A$
2. Verdadera; como $B \subset A \Rightarrow (A - B) \cup B = A$

   Gráficamente se observa que $(A - B) \cup B = A$



3. Verdadera: porque cumple las condiciones:

   i) Si $A = U \quad \wedge \quad B = U$

   $U \cup (U \cap U) = U \cap (U \cup U)$

   $U = U$

   ii) Si $A = \emptyset \quad \wedge \quad B = U$

   $\emptyset \cup (\emptyset \cap U) = \emptyset \cap (\emptyset \cup U)$

   $\emptyset = \emptyset$

   iii) Si $A = U \quad \wedge \quad B = \emptyset$

   $U \cup (U \cap \emptyset) = U \cap (U \cup \emptyset)$

   $U \cup \emptyset = U \cap U$

   $U = U$

   iv) Si $A = B$: $\quad B \cup (B \cap B) = B \cap (B \cup B)$

   $B \cup B = B \cap B$

   $B = B$

D. Dados los conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{Z}^+ / x > 4 \rightarrow x = 6\}$
$B = \{x \in \mathbb{Z} / \sim (x \geq 1 \rightarrow x^2 \neq 4x - 3)\}$
$C = \{x \in \mathbb{Z} / \sim (x \leq -2 \vee x > 3)\}$

Halla:

1. $A \cap B$
2. $B \cup C$
3. $(B' \cup C) \cap [A \,\Delta\, (B' - C')]$
4. $C_{B \cap C}(A \cap B) \cup C_{A \cap B}(B \cap C)$

Solución:

Extendiendo los conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
$B = \{1, 3\}$
$C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

1. $A \cap B = \{1, 3\} = B$
2. $B \cup C = \{-1, 0, 1, 2, 3\} = C$
3. $B' - C' = B' \cap C = C \cap B' = C - B = \{-1, 0, 2\}$

   $A \,\Delta\, (B' - C') = \{1, 2, 3, 4, 6\} \,\Delta\, \{-1, 0, 2\} = \{-1, 0, 1, 3, 4, 6\}$

   $B' \cup C = \{\ldots,-1, 0, 2, 4, 5,\ldots\} \cup \{-1, 0, 1, 2, 3\} = \mathbb{Z}$

   $\therefore (B' \cup C) \cap [A\Delta(B'-C')] = \mathbb{Z} \cap \{-1, 0, 1, 3, 4, 6\} = \{-1, 0, 1, 3, 4, 6\}$

4. $C_{B \cap C}(A \cap B) \cup C_{A \cap B}(B \cap C) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

E. Dado: $U = \{x \in \mathbb{Z}^+ / x < 6\}$, si $A \cap B = \emptyset$, $C \cap B' = \{1\}$, $(A \cap C)' = \{2, 3, 4, 5\}$ y $(A \cup B') - C = \{2, 3\}$. Halla A, B y C si además $A \cup B \cup C = U$

Solución:

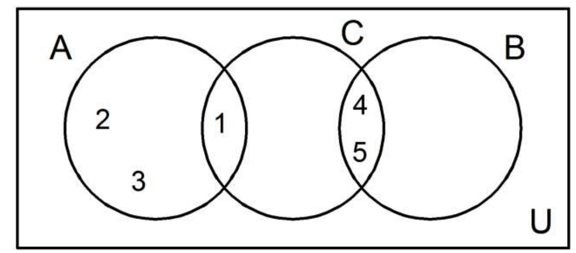
Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y si $A \cap B = \emptyset$, hallamos:

$(A \cap C)' = \{2, 3, 4, 5\} \Rightarrow A \cap C = \{1\} = S_{AC}$

$C \cap B' = C - B = \{1\} = S_C$

$(A \cup B') - C = (A - C) \cup (B' - C) = \{2, 3\} \cup \emptyset = \{2, 3\}$

Ayudándonos con el diagrama de Venn – Euler, observamos:



De donde:

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{4, 5\}$

$C = \{1, 4, 5\}$

F. Demuestra: (3c): $(A')' = A$

Prueba:

Debe demostrarse que:

I) $(A')' \subset A$

II) $A \subset (A')'$

En efecto:

I) $(A')' \subset A$:

Aplicando definición de contención de conjuntos:

$\forall x \in (A')'$	$\Rightarrow x \notin A'$	(Def. 4.5)
	$\Rightarrow \sim [x \in A']$	(Neg. de Pert.)
	$\Rightarrow \sim [x \notin A]$	(Def. 4.5)
	$\Rightarrow \sim [\sim (x \in A)]$	(Neg. De Pert.)
	$\Rightarrow x \in A$	(Ley doble neg.)

$\therefore \; (A')' \subset A$

II) $A \subset (A')'$:

$\forall x \in A / x \in A$	$\Rightarrow \sim [\sim (x \in A)]$	(Ley doble neg.)
	$\Rightarrow \sim [x \notin A]$	(Neg. De Pert.)
	$\Rightarrow \sim [(x \in A')]$	(Def. 4.5)
	$\Rightarrow x \notin A'$	(Neg. de Pert.)
	$\Rightarrow x \in (A')'$	(Def. 4.5)

$\therefore \; A \subset (A')'$

De (I) y (II) se obtiene: $(A')' = A$

Unidad 2 / Conjuntos

G. Demuestra que: $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

Prueba:

Demostraremos que:

I) $(A')' \subset A$

II) $A \subset (A')'$

En efecto:

I) $(A \cup B) \subset B$:

$\forall x \in (A \cup B) / x \in (A \cup B)$	$\Rightarrow x \in A \;\vee\; x \in B$	(Def. 4.1)
Por hipótesis: $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A$	$\Rightarrow x \in B$	(Def. $A \subset B$)
Además: Si $x \in B$	$\Rightarrow x \in B$	(Prin. $p \to p$)
Como $x \in (A \cup B)$	$\Rightarrow x \in B$	(Def. $A \subset B$)

$\therefore \; (A \cup B) \subset B$

II) $B \subset (A \cup B)$:

$\forall x \in B / x \in B$	$\Rightarrow x \in (B \cup A)$	(Def. $A \subset B$)
	$\Rightarrow x \in B \;\vee\; x \in A$	(Def. 4.1)
Como $x \in (B \cup A)$	$\Rightarrow x \in (A \cup B)$	(Def. $A \subset B$ y U_2)
Además, si $x \in B$	$\Rightarrow x \in (A \cup B)$	(Def. $A \subset B$)

$\therefore \; B \subset (A \cup B)$

De (I) y (II) se consigue $A \cup B = B$

H. Simplifica: $\{[(A' - B)' - (B - A')']' - A'\}'$

Solución:

$$\begin{aligned}
\{[(A'-B)'-(B-A')']'-A'\}' &\equiv \{[(A' \cap B')' - (B \cap A)']' - A'\}' && (C_1, C_2)\\
&\equiv \{[(A \cup B) - (B' \cup A')]' - A'\}' && (C_{14})\\
&\equiv \{[(A \cup B) - (B \cap A)']' - A'\}' && (C_{14})\\
&\equiv \{\{[A \cap (B \cap A)] \cup [B \cap (B \cap A)]\}' - A'\}' && (I_4)\\
&\equiv \{[(A \cap B) \cup (A \cap B)]' - A'\}' && (I_1)\\
&\equiv [(A \cap B)' - A']' && (U_1)\\
&\equiv [(A \cap B)' \cap A]' && (C_{12})\\
&\equiv [(A' \cup B') \cap A]' && (C_{14})\\
&\equiv [A \cap (A' \cup B')]' && (I_2)\\
&\equiv [(A \cap A') \cup (A \cap B')]' && (I_4)\\
&\equiv [\emptyset \cup (A \cap B')]' && (C_9)\\
&\equiv (A \cap B')' && (U_4)\\
&\equiv A' \cup B && (C_{14})
\end{aligned}$$

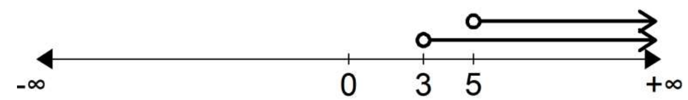
I. Efectúa las operaciones indicadas, da el intervalo solución.

1. $x > 3$ ó $x > 5$
2. $x \leq 7$ y $x > 12$
3. $[2, 7] \cap < 4, 9 >$
4. $< -\infty, 1] \cup < -3, 5]$

Solución: De acuerdo con las operaciones de lógica y conjuntos, la solución es:

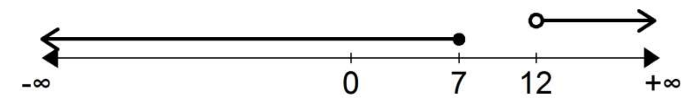
1. $x > 3 \;\vee\; x > 5 \equiv < 3, +\infty > \cup < 5, +\infty > = < 3, +\infty >$

   Gráficamente:



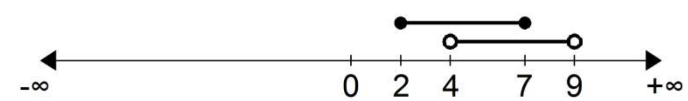
2. $x \leq 7 \;\wedge\; x > 12 \equiv < -\infty, 7] \cap < 12, +\infty > = \emptyset$

   Gráficamente:

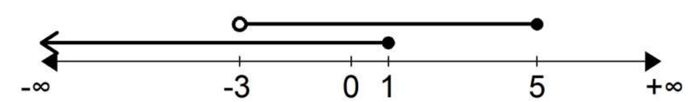


3. $[2, 7] \cap < 4, 9 > = < 4, 7 >$

   Gráficamente:



4. $< -\infty, 1] \cup < -3, 5] = < -\infty, 5]$



4.9 Actividad de Aprendizaje

A. Indica las proposiciones falsas:

1. $(A \cup B) \cap (A \cup C) = (B \cap C) \cup A$
2. $A \cap \emptyset = A$
3. $A - B = B - A$
4. $A' \cap B' = (A \cup B)'$
5. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

B. Si: $U = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \leq x < 7\}$; $A = \{x \in \mathbb{Z} / 0 \leq x < 5\}$, $B = \{1, 3, 4\}$ y $C = \{x / x^2 - 1 = 0\}$. Halla:

1. $(A \cup B) \cap C$
2. $A - (B \cup C)$
3. $B - (A \cup C)$
4. $A' - C'$
5. $A - (B \cap C')'$
6. $A \Delta B$
7. $A' \Delta B'$
8. $[A' \cap (B \cap C)'] \Delta (B \cup C)$
9. $(A' - B) - (B' - A)$
10. $(B' \cup C) \cap [A \Delta (B' - C')]$

C. Si A, B y C son conjuntos tales que: $A \cap B \cap C = \{1, 2\}$, $A - B = \{3, 6\}$, $A - C = \{3, 0\}$, $[(B \cup C) - A] = \{5, 7, 8, 9\}$, $B \cap C = \{1, 2, 8\}$ y $[C - (A \cup B)] = \{5\}$. Halla:

$$[(A \cap C) \cup (A - B)] \Delta [(A \cup C) - B]$$

D. Utiliza convenientemente las definiciones de la operaciones con conjuntos para resolver el siguiente problema:

¿Cuál es la expresión equivalente a: $x \in [A \cap (B - C)]$?

1. $x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)$
2. $x \in (A \cap B) \vee x \notin (A \cup B)$
3. $x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$
4. $x \in (A \cap B) \wedge (x \in C')$

E. Dados los conjuntos A, B y C, efectúa las operaciones indicadas y representa gráficamente los resultados, siendo $U = \mathbb{Q}$

$A = \{x / x = \frac{2n - 1}{3}, n \in \mathbb{Z}\}$
$B = \{x / x^2 - 7x = 0\}$
$C = \{x / (x - 2)(x^2 - 9)(x - 4) = 0\}$

1. $(B - A) \cup C$
2. $(B \cup C) - A$
3. $(B \Delta C) \cap A'$
4. $A' \cap C$

F. Con los conjuntos A y B se define una nueva operación $\bowtie$, tal que $A \bowtie B = (A - B) \cap B'$. Si $A = \{2, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Halla:

1. $A \bowtie B$
2. $B \bowtie A$
3. $(B \bowtie A) \bowtie B$

G. Dados los conjuntos $A \subset E$, $B \subset E$, $C \subset E$. E conjunto universal, $E = \{x \in \mathbb{Z}^+ / x < 10\}$. Si $A' = \{x \in E / x < 7\}$, $A \cup B = \{x \in E / x \leq 9 \wedge x > 2\}$, $B \cup C = \{x \in E / x \leq 7\}$, $B \cap C = \{3\}$ y $A \cap C = A' \cap B' \cap C' = \emptyset$. Determinar A, B y C.

H. Dados los conjuntos:
$A = \{x \in \mathbb{Z}^+ / x > 4 \rightarrow x = 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} / \sim (x \geq 1 \rightarrow x^2 \neq 4x - 3)\}$ y $C = \{x \in \mathbb{Z} / \sim (x \leq -2 \vee x > 3\}$.

Halla:

1. $(B' \cup C) \cap [A \Delta (B' - C')]$
2. $C_{B \cap C}(A \cap B) \cup C_{A \cap B}(B \cap C)$

I. En función de la definición 4.4, demuestra:

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$$

J. Demuestra que:

1. $A' \Delta B = A \Rightarrow A \subset B$
2. $A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$
3. $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$
4. $A \subset B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$
5. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

K. Simplifica:

$\{[(A \cup B') \cap (A \cap B)] \cup (A \cap B')\} \cup (C - A)$

L. Dados: $A: -5 < x < 0 \;\vee\; 2 < x \leq 6$
$B: \;x < 1 \;\vee\; 4 < x \leq 9$
$U = \mathbb{R}$

Halla:

1. $A - B$
2. $A \cup B$
3. A'
4. $(A \cup B)'$

M. Dados los conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 10 \;\vee\; x \leq 5\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -5 \;\vee\; x \geq -2\}$
$C = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0{,}62 \;\vee\; x < -1{,}62\}$

Halla:

$$(A \cap B) \Delta [(B \cup C) - (A \cup C)]$$

4.10 Clave de Respuesta

A. 2) Falso
4) Falso

B. 2) $\{0, 2\}$
4) $\{-1\}$
6) $\{0, 2\}$
8) $\{-3, -2, 1, 3, 4, 5, 6\}$
10) $\{-1, 0, 1, 2\}$

C. Queda para el estudiante.

D. 2) $x \in [A \cap (B - C)] \;\not\equiv\; x \in (A \cap B) \;\vee\; x \notin (A \cup B)$
4) $x \in [A \cap (B - C)] \;\equiv\; x \in (A \cap B) \;\vee\; x \in C'$

E. 2) $\{0, 2, -3, 4\}$
4) $\{2, -3, 4\}$

F. 2) $\{1, 3, 5\}$

G. Queda para el estudiante.

H. 2) $\emptyset$

I, J, K. 2) Queda para el estudiante.

L. 2) $< -\infty, 1 > \cup < 2, 9 >$
4) $[1, 2] \cup [9, +\infty >$

M. $x \leq 5 \;\vee\; -2 \leq x \leq 5 \;\vee\; x \geq 10.$

"Aprende con prudencia, fuerza e inteligencia y encontrarás largos días llenos de luz y paz en tu camino"

LECCIÓN 5

DIAGRAMAS DE VENN – EULER.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Distinguir y comprender la representación gráfica de las operaciones de los conjuntos usando diagramas de Venn – Euler.
2. Aplicar los diagramas de Venn – Euler e interpretar las propiedades de los conjuntos como sistema matemático.
3. Demostrar las propiedades de los conjuntos usando diagramas de Venn – Euler.

5.1 DIAGRAMA DE VENN – EULER

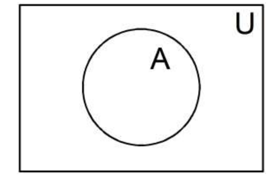
Al trabajar con conjuntos, es útil disponer de un sistema de representación gráfica que permita observar la relación entre los mismos. El procedimiento usual consiste en dibujar rectángulos, círculos u otras figuras geométricas, según un procedimiento que se conoce como “Diagramas de Venn o diagramas de Venn – Euler”, en honor a su inventor.

En un diagrama de Venn – Euler, el conjunto universal se representa como un conjunto de puntos interiores de un rectángulo, los subconjuntos se representan por puntos interiores de círculos (u otras regiones cerradas) trazadas dentro del rectángulo.

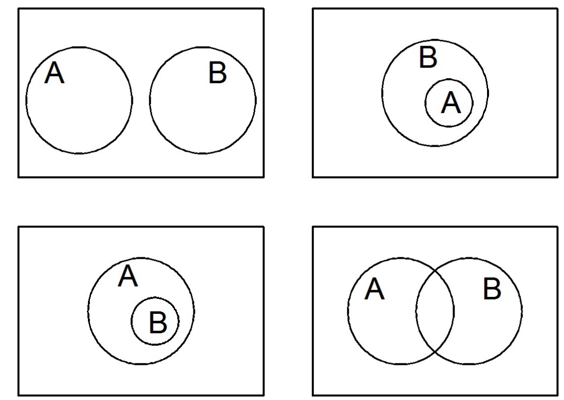
5.2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE CONJUNTOS

Ilustraremos la utilidad de los diagramas de Venn – Euler:

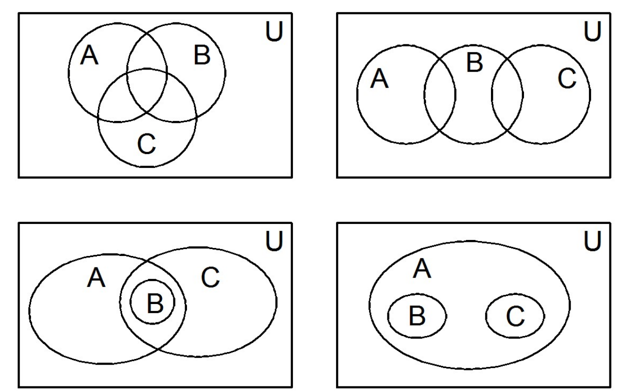
a) Para el conjunto A del universo U:



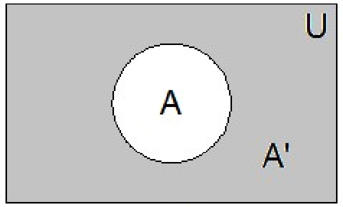
b) Para dos conjuntos A y B existen las siguientes posibilidades:



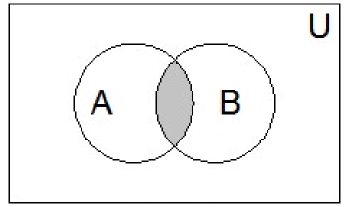
c) Para tres conjuntos A, B y C existen diversas posibilidades, entre ellos:



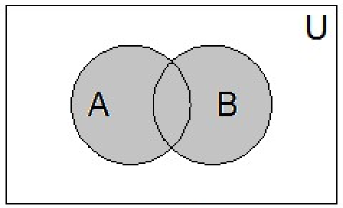
d) Para representar las operaciones entre conjuntos:



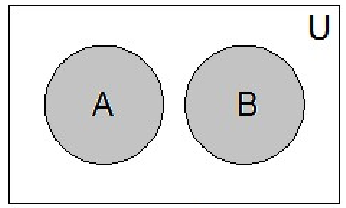
A'



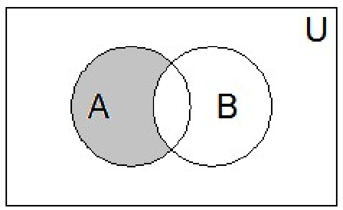
A ∩ B



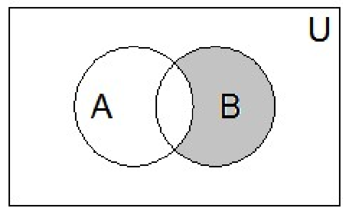
A ∪ B



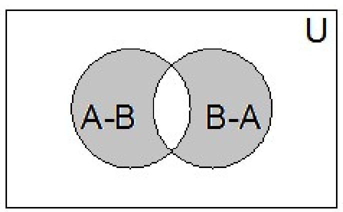
A ∪ B



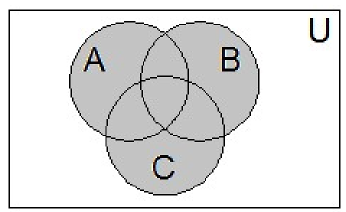
A - B



B - A



A Δ B



A ∪ B ∪ C

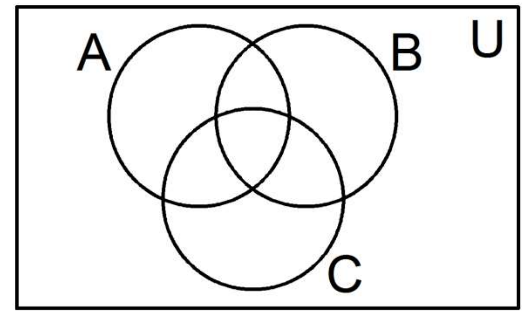
5.3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE OPERACIONES

Las representaciones gráficas de conjuntos son especialmente útiles al hablar de las operaciones de los conjuntos de una manera general.

a) Método gráfico:

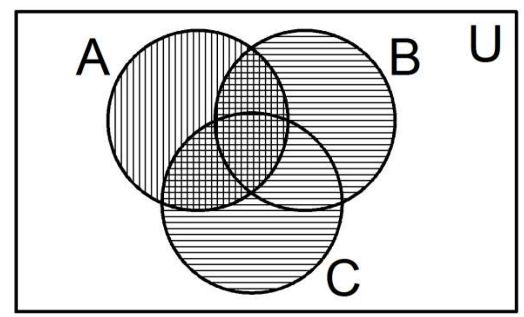
El método gráfico consiste en sombrear a base de colores o líneas encontradas el resultado de la sucesión de operaciones:

Ejemplo: Sombrear en el siguiente diagrama de Venn – Euler, el resultado de la siguiente operación: A ∩ (B ∪ C)



Solución: Primero realizaremos la operación B ∪ C sombreándola horizontalmente y posteriormente la intersección con A sombreándola el resultado verticalmente .

Así el resultado es .

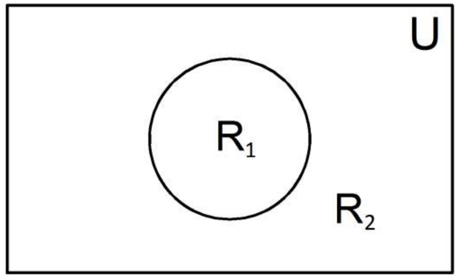


b) Regiones en los diagramas:

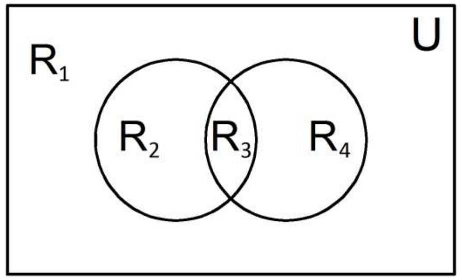
Una manera diferente de obtener el resultado gráfico consiste en regionalizar el diagrama de conjuntos.

En todo diagrama de Venn – Euler se pueden identificar varias regiones, que son útiles para reconocer relaciones de pertenencia y combinaciones de las operaciones.

- En el diagrama siguiente, correspondiente al caso de un conjunto del universo U, se parecían dos regiones R_1 y R_2 que corresponden precisamente a los conjuntos A y A′.



- Si consideramos el caso de dos conjuntos se obtienen cuatro regiones R_1, R_2, R_3 y R_4.

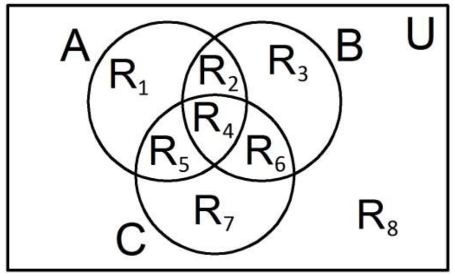


Unidad 2 / Conjuntos

Ejemplo: Usando regiones, encuentra $A \cap (B \cup C)$

Solución:

Identificando las regiones para tres conjuntos:

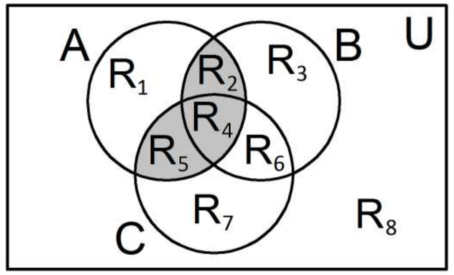


Ahora encontramos $B \cup C$:

$B \cup C$: consta de las regiones: $\{R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7\}$;

Luego, A consta de las regiones: $\{R_1, R_2, R_4, R_5\}$.

Po lo tanto, el resultado $A \cap (B \cup C)$ consta de las regiones $\{R_2, R_4, R_5\}$.



Como se puede apreciar se obtiene el mismo resultado del ejemplo anterior:

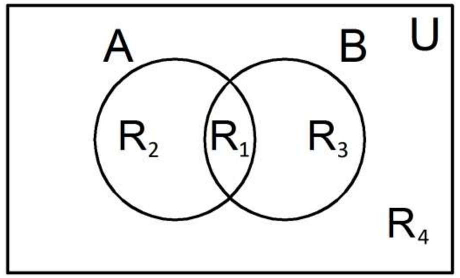
5.4 DEMOSTRACIÓN DE PROPIEDADES MEDIANTE DIAGRAMAS

Es conveniente en algunos casos valerse de los diagramas de Venn – Euler para demostrar las propiedades de las operaciones entre conjuntos de una manera sencilla.

Ejemplo: Demuestra la propiedad (7b):

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$ñ

Prueba: Recurrimos al diagrama de Venn – Euler para dos conjuntos:



Trabajamos por separado sobre cada miembro de la expresión y comparamos los resultados:

1. $(A \cap B)'$:

Conjunto	:	A	B	$A \cap B$	$(A \cap B)'$
Región	:	$\{R_1, R_2\}$	$\{R_1, R_3\}$	$\{R_1\}$	$\{R_2, R_3, R_4\}$

2. $A' \cup B'$:

Conjunto	:	A	A'	B	B'	$A' \cup B'$
Región	:	$\{R_1, R_2\}$	$\{R_3, R_4\}$	$\{R_1, R_3\}$	$\{R_2, R_4\}$	$\{R_2, R_3, R_4\}$

La propiedad queda demostrada ya que la región resultante es R_2, R_3, R_4 para ambos miembros.

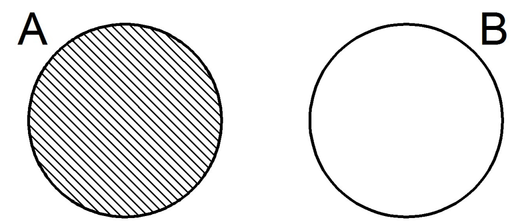
5.5 Ejercicios Resueltos

A. Sombrea en un diagrama de Venn – Euler las regiones que se solicita en cada caso:

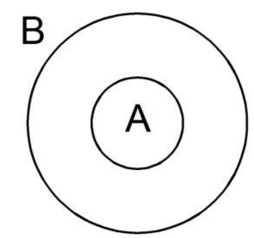
1. $A - B$ si $A \cap B = \emptyset$
2. $A - B$ si $A \subset B$
3. $A \cap B$ si $A \subset B$
4. $A \cup B$ si $A \subset B$
5. $A \cup (B \cap C)$
6. $(A \cap B) - C$
7. $(A \Delta B) \cap B'$
8. $[(A \cap C) - B] \cup (B - C)$

Solución:

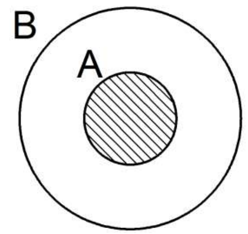
1. Como $A \cap B = \emptyset$, los conjuntos son disjuntos y por lo tanto el resultado es A.



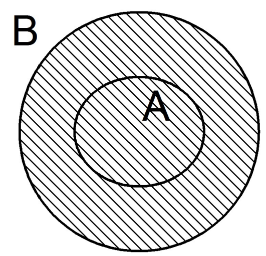
2. Ya que $A \subset B$, la diferencia es el $\emptyset$, porque A queda sin elementos.



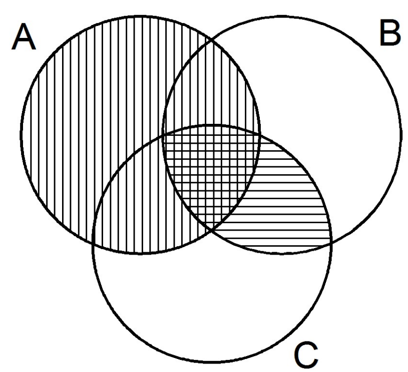
3. Los elementos que están en A y en B a la vez, están en A, como se puede observar en el diagrama:



4. El resultado es B. Basta con observar el diagrama y luego unimos los elementos de A con B.

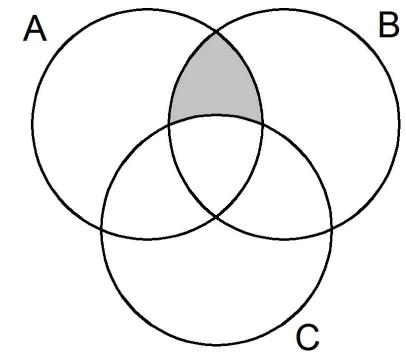


5. Sombreando B ∩ C en forma horizontal y posteriormente la unión con A en forma vertical. El resultado es: .

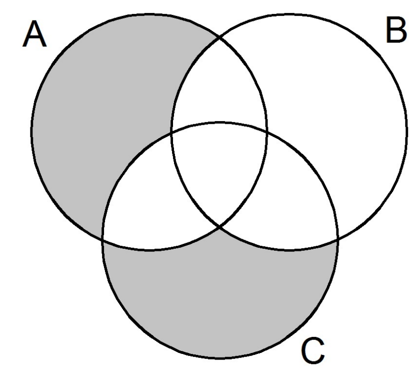


Unidad 2 / Conjuntos

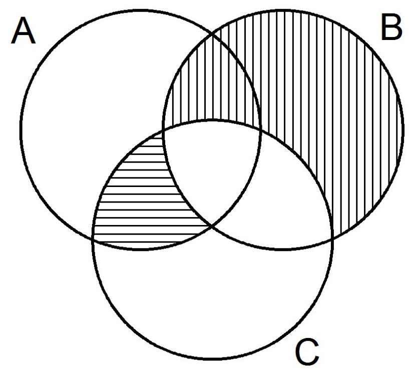
6. La operación A ∩ B se sombrea horizontalmente y la diferencia con C se sombrea verticalmente, quedando el resultado así:



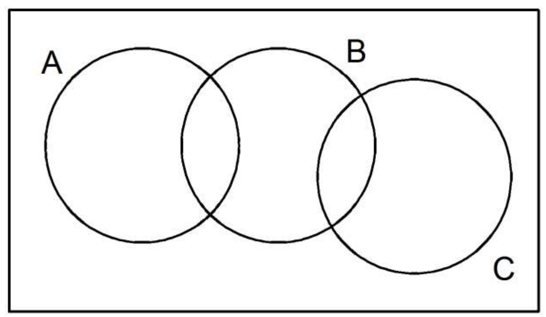
7. Se sombrea horizontalmente, A Δ C = (A – C) ∪ (C – A) y posteriormente la intersección con B′ se sombrea verticalmente. El resultado viene a ser:



8. La operación $(A \cap C) - B$ se sombrea horizontalmente y posteriormente la unión con $(B - C)$ se sombrea verticalmente, obteniendo el resultado:



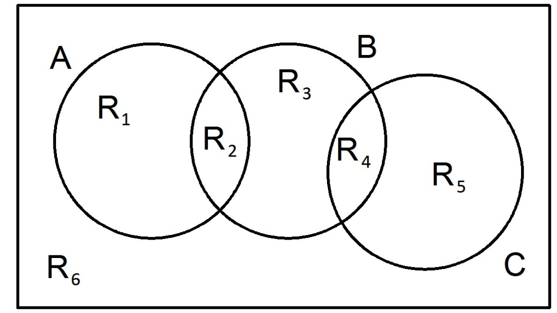
B. Mediante el uso de regiones numeradas, identifica cada uno de los siguientes resultados en la gráfica dada.



1. $(A \cup B') \cap C$
2. $A - (B \cup C)$
3. $(A \cap C) - B$

Unidad 2 / Conjuntos

Solución: Numeramos las regiones de la siguiente manera,



y efectuamos las operaciones ordenadamente, obtenemos:

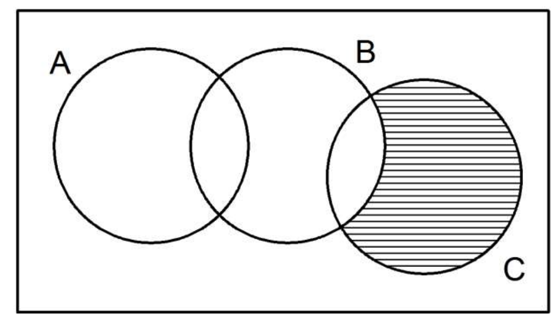
1. $B' = \{R_1, R_5, R_6\}$

   $A \cup B' = \{R_1, R_2, R_5, R_6\}$

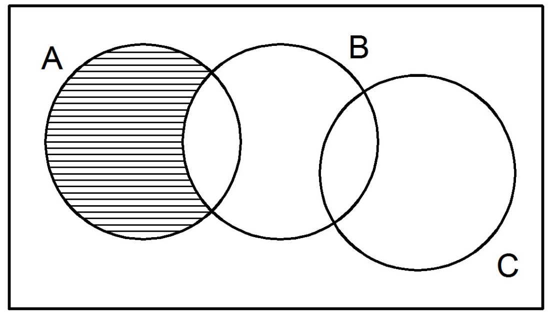
   $C = \{R_4, R_5\}$

   Por tanto, $(A \cup B') \cap C = \{R_1, R_2, R_5, R_6\} \cap \{R_4, R_5\} = \{5\}$

   Gráficamente:



2. $A = \{R_1, R_2\}$
   $B \cup C = \{R_2, R_3, R_4, R_5\}$
   Luego: $A - (B \cup C) = \{R_1, R_2\}\ \{R_2, R_3, R_4, R_5\} = \{R_1\}$



3. Según la gráfica considerada. $A \cap C = \emptyset$, de donde:

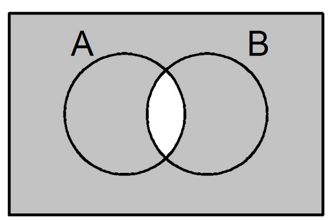
   $(A \cap B) - B = \emptyset$

C. Verifica las siguientes propiedades de conjuntos mediante una ilustración de diagrama de Venn – Euler:

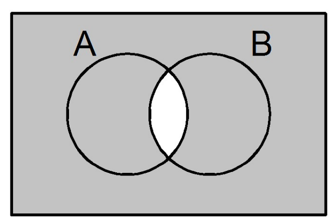
1. Ley de Morgan (7b): $(A \cap B)' = A' \cup B'$
2. Ley distributiva (6a): $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3. Ley asociativa (5a): $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Solución:

1. Primero sombreamos en dos diagramas similares la región que corresponde a cada miembro de la igualdad:



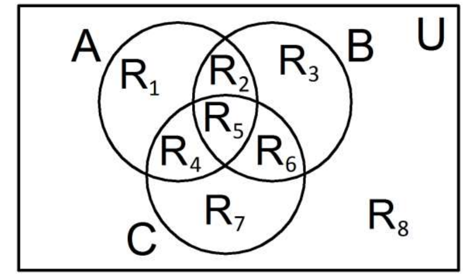
$(A \cap B)'$



$A' \cup B'$

Luego, comparamos las regiones sombreadas y comprobamos que son iguales.

2. Como no se dan restricciones sobre los conjuntos A, B y C; los representamos en la forma más sencilla; luego procedemos a encontrar ambos resultados de la igualdad en forma separada. Finalmente comparamos si son iguales.



De donde:

i) $A \cup (B \cap C)$:

$$B \cap C = \{R_5, R_6\}$$
$$A = \{R_1, R_2, R_4, R_5\}$$
$$A \cup (B \cap C) = \{R_1, R_2, R_4, R_5, R_6\}$$

ii) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$:

$$A \cup B = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6\}$$
$$A \cup C = \{R_1, R_2, R_4, R_5, R_6, R_7\}$$
$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{R_1, R_2, R_4, R_5, R_6\}$$

Por tanto, la igualdad se cumple, ya que ambas regiones resultantes (i) y (ii) son iguales.

3. A continuación procedemos en forma análoga sobre las regiones del ejemplo (2) y comparamos ambos miembros de la igualdad:

i) $A \cup (B \cup C)$:

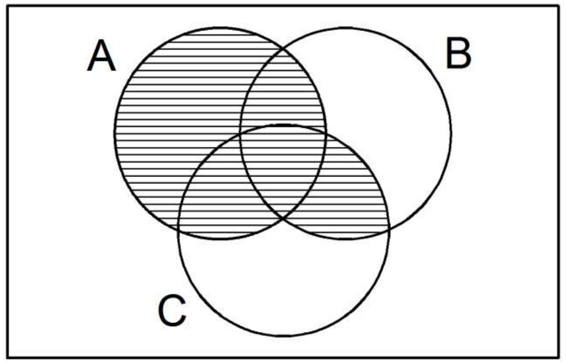
$$B \cup C = \{R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7\}$$
$$A = \{R_1, R_2, R_4, R_5\}$$
$$A \cup (B \cup C) = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7\}$$

ii) $(A \cup B) \cup C$:

$$A \cup B = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6\}$$
$$C = \{R_4, R_5, R_6, R_7\}$$
$$(A \cup B) \cup C = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7\}$$

Por tanto, (i) y (ii) son iguales.

D. Halla la expresión que representa la siguiente región sombreada.



Solución: Considerando las regiones del ejemplo (C – 2), tenemos:

$$A = \{R_1, R_2, R_4, R_5\}$$
$$B \cap C = \{R_5, R_6\}$$

Finalmente, la parte sombreada representa a:

$$A \cup (B \cap C) = \{R_1, R_2, R_4, R_5, R_6\}$$

5.6 Actividad de Aprendizaje

A. Representa los siguientes conjuntos por medio de diagramas de Venn – Euler, bajo las condiciones indicadas.

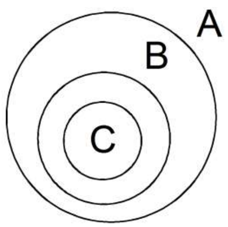
1. A, B y C con $A, C \subset B$ y $A \cap C \neq \emptyset$
2. A, B y C con $A \subset C \subset B$
3. A, B y C con $A \subset C$ y $C \cap B = \emptyset$
4. Sabiendo que $A \subset B$; $C \cap A = \emptyset$, halla:

   $[A \cup (B - C)] \cap [B \cup (C - A)]$, cuando:

   a) B y C son no comparables
   b) B y C son disjuntos

5. $B \subset (C' \cap D')$; $E \subset (C \cap D)$; $A \cap (D - C)' = \emptyset$
6. $A \cap (C \cup B')$ con $A \cap B \cap C \neq \emptyset$

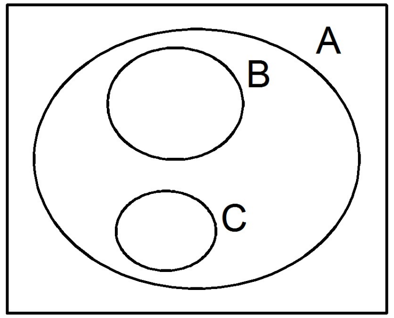
B. Mediante el uso de regiones numerales en la figura, identifica cada uno de los siguientes conjuntos (haz un diagrama para cada operación).



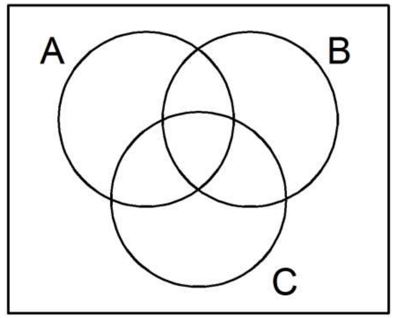
1. $C \cap B$
2. $C - B$
3. $A - B'$
4. $A - (C' \cap B')$
5. $A \cap (B \,\Delta\, C)'$
6. $(C' \cup A) \cup B$

C. En cada diagrama sombree la operación indicada:

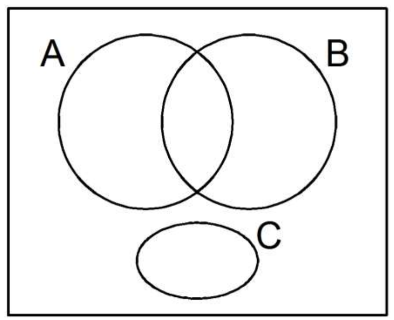
1. $(A - B) \cap (A - C)$



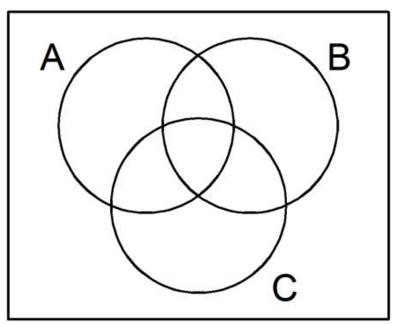
2. $A' \cap B \cap C$



3. $(A \cup B)' \cap C'$

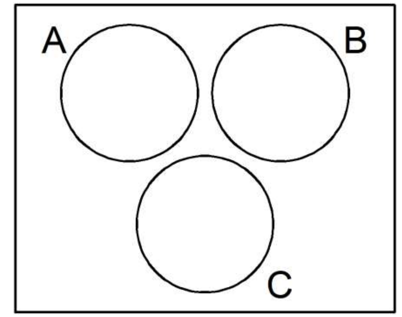


4. $[C - (A \cup B)] \cup [(A \cap B) - C]$

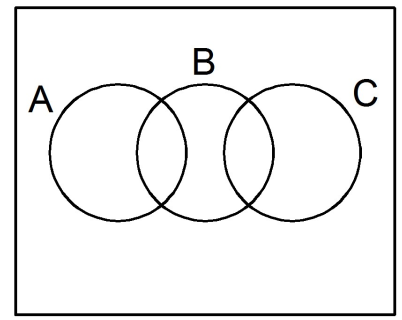


Unidad 2 / Conjuntos

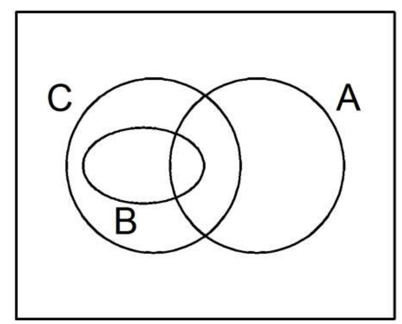
5. $A' \cap B' \cap C'$



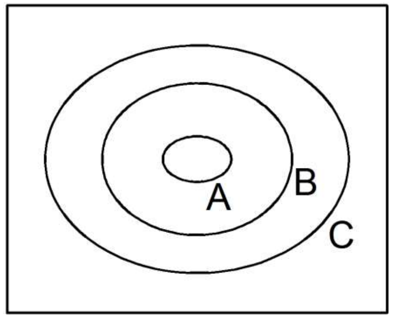
6. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$



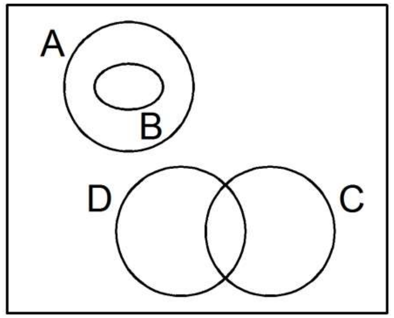
7. $(C \cap A)'$



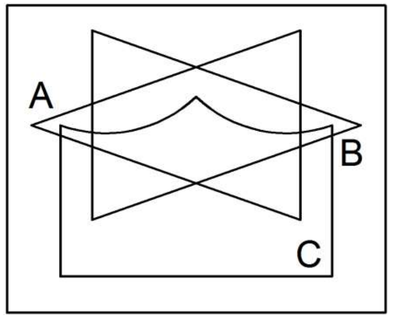
8. $C' \cup (A - B)$



9. $(A \cap C) \cup (B \cap D)$



10. $(A \cap B) - [(A \cap B) - C]$



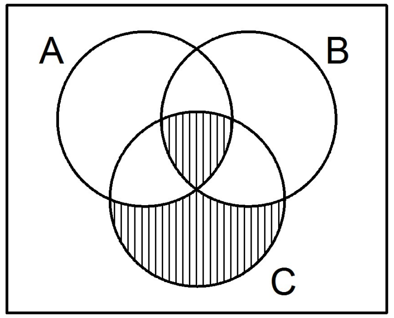
Unidad 2 / Conjuntos

D. Verifica las siguientes propiedades de conjuntos mediante una ilustración de diagramas de Venn – Euler:

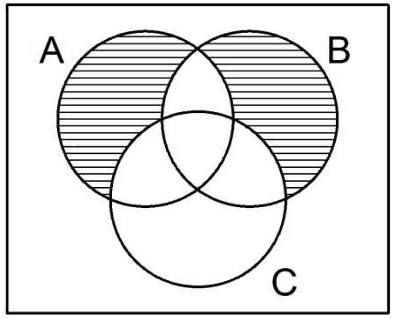
1. $(A \cup B) \cap B = B$
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$
4. $A \subset B$; $A - B = A \cap B'$
5. $(A' \cap B) \cap (A' \cup B')' = \emptyset$
6. $A \subset B$; $B' \subset A'$

E. En cada diagrama halla la expresión que representa la región sombreada.

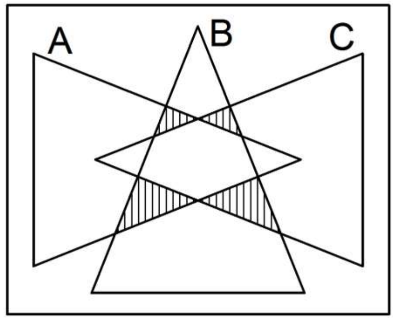
1.



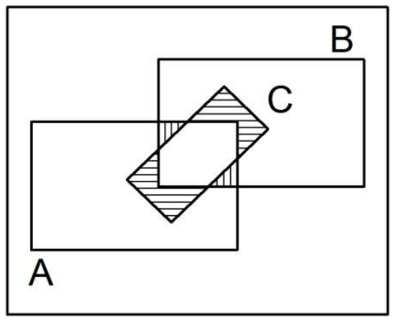
2.



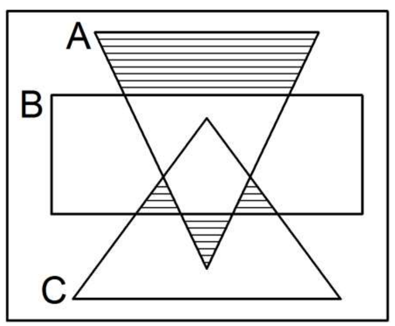
3.



4.

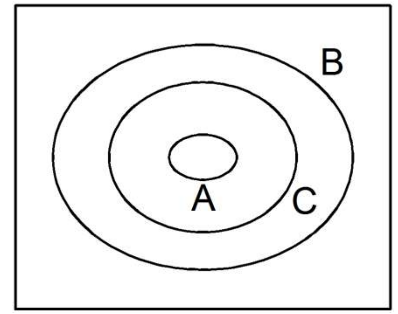


5.

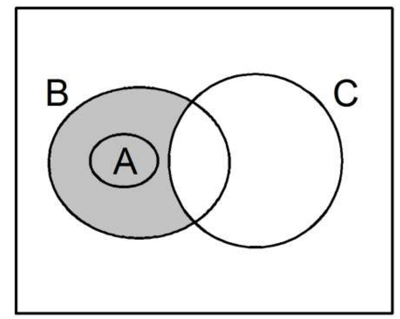


5.7 Clave de Respuesta

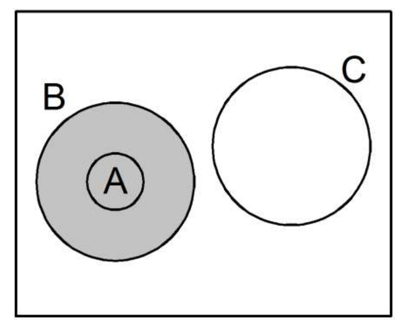
A. 2)



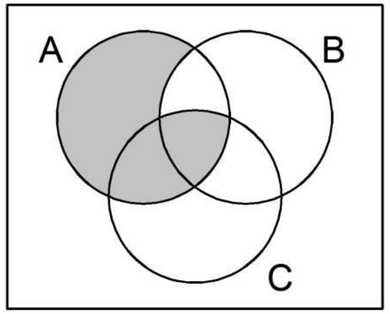
4) (a)



4) (b)

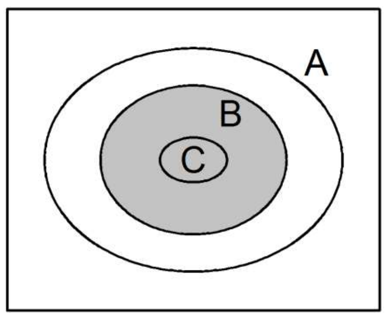


6)



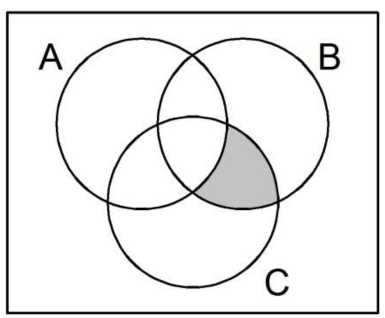
B. 2) ∅

4)

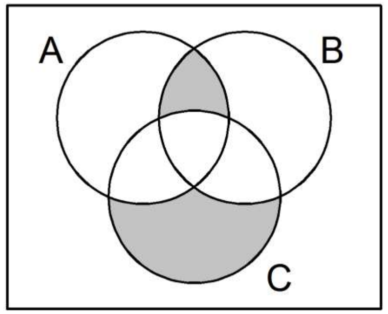


6) U

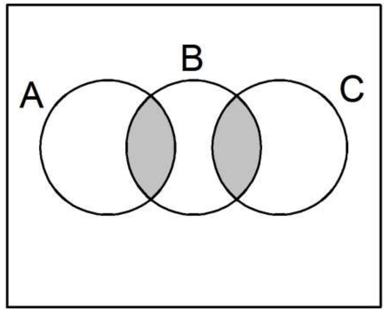
C. 2)



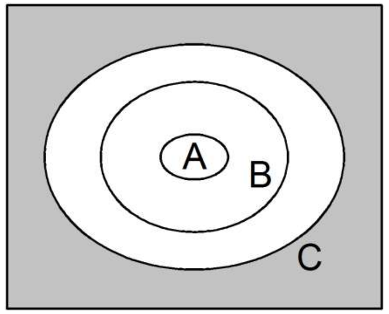
4)



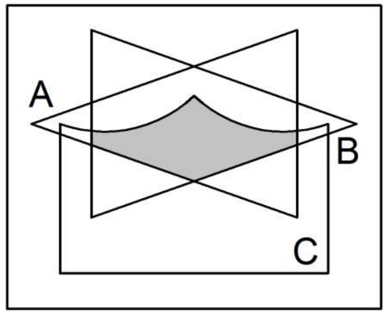
6)



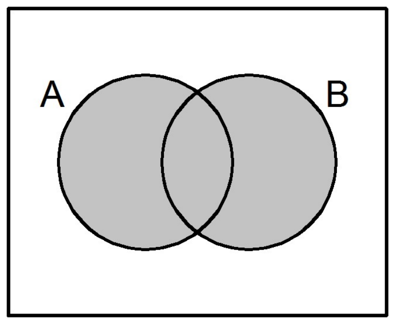
8)



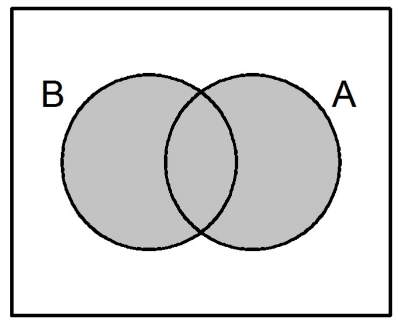
10)



D. 2)

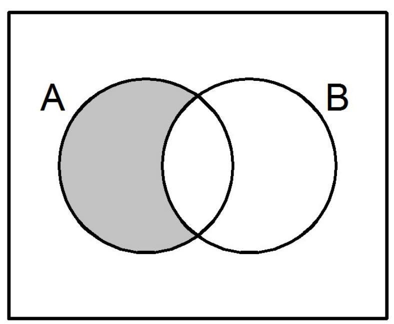


=

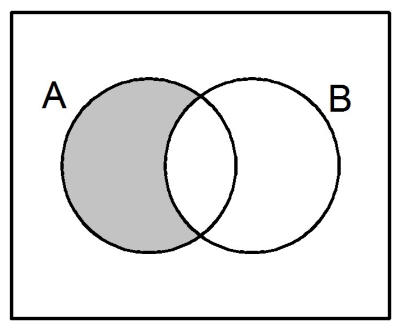


$A \cup B$ $\qquad$ $B \cup A$

4)



=

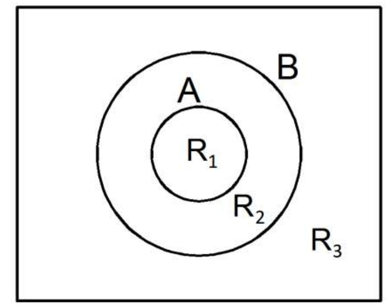


$A - B$ $\qquad$ $A \cap B'$

6) $A' = \{R_2, R_3\}$

$B' = \{R_3\}$

$\therefore B' \subset A'$



E. 2) $(A \Delta B) - C$

4) $(A \cap B) \Delta C$

"El amor, la dedicación y el esfuerzo al trabajo, son partes que embellecen la vida del hombre"

LECCIÓN 6

LA ARITMÉTICA EN LAS OPERACIONES DE CONJUNTOS Y EXPERIMENTOS ALEATORIOS.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Determinar el m.c.d. y el m.c.m. aplicando la intersección de conjuntos y el método abreviado.
2. Hallar los sucesos existentes en experimentos aleatorios.

6.1 MÁXIMO COMÚN DIVISOR (m.c.d.)

El máximo común divisor de dos o más números es el mayor número que divide a todos exactamente. Se designa con las iniciales **m.c.d.**

Ejemplo: ¿Cuál es el máximo común divisor de 18 y 24?

Solución: Consideramos que, el conjunto de los divisores de 18 es:

A = {1, 2, 3, 6, 9, 18}

y el conjunto de los divisores de 24 es:

B = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

Los divisores comunes son los elementos que se encuentran en la intersección de ambos conjuntos:

A ∩ B = {1, 2, 3, 6}

Por tanto, el m.c.d. es 6.

Unidad 2 / Conjuntos

El **m.c.d.** de varios números se puede encontrar en la práctica por descomposición en factores primos. El método consiste en dividir al mismo tiempo todos los números dados por un divisor común, dividir nuevamente los cocientes por un divisor común y así sucesivamente hasta que los cocientes sean primos entre sí.

Ejemplo: ¿Cuál es el máximo común divisor de 8, 16 y 20?

Solución:

i) Aplicando el método anterior, tenemos:

El m.c.d. es:

{x/x es divisor de 8} {x/x es divisor de 16} ∩ {x/x es divisor de 20}

{1, 2, 4, 8} ∩ {1, 2, 4, 8, 16} ∩ {1, 2, 4, 5, 10, 20} = {1, 2, 4}

De donde, el m.c.d. es 4.

ii) Aplicando el método práctico.

8	16	20	2
4	8	10	2
2	4	5	

Por tanto, el m.c.d. = 2 x 2 = 4.

6.2 MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.)

El mínimo común múltiplo (**m.c.m.**) de dos o más números es el menor número que es exactamente divisible entre cada uno de dichos números.

Ejemplo: ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de 6 y 9?

Solución:

El conjunto de los múltiplos de 6 es:

A = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60,…}

El conjunto de los múltiplos de 9 es:

B = {9, 18, 27, 36, 45, 54, 63,…}

El conjunto de los múltiplos comunes de 6 y 9 es:

A ∩ B = {18, 36, 54, 72,…}

El **m.c.m.** de varios números se puede determinar mediante descomposición en factores. Se divide cada uno de los números dados por su menor divisor; se dividen nuevamente los cocientes por su menor divisor hasta que los cocientes sean 1. El m.c.m. es el producto de todos los divisores primos.

Ejemplo: ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de 32, 48 y 108?

Solución: Utilizando el método abreviado que consiste en dividir cada número por su menor divisor; luego hacemos lo propio con cada cociente hasta obtener que todos los cocientes sean 1:

32	48	108	2
16	24	54	2
8	12	27	2
4	6	27	2
2	3	27	2
1	3	27	3
	1	9	3
		3	3
		1	

Por tanto, el m.c.m. es : 25 x 33 = 864

6.3 EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Experimento Aleatorio: Un experimento es aleatorio cuando al repetirlo un determinado número de veces, en condiciones análogas, el resultado no puede predecirse, está sujeto al azar.

Espacio Muestral: Es el conjunto de todos los resultados que pueden obtenerse al realizar un experimento aleatorio; lo denotaremos por la letra E.

En el espacio muestral puede distinguirse diversos sucesos:

- **Suceso Elemental:** Es cada uno de los resultados simples que se obtienen al realizar el experimento. Es equivalente al elemento de un conjunto.
- **Suceso Compuesto:** Se obtiene por la agrupación de varios sucesos elementales. Equivale a un subconjunto.
- **Suceso Seguro:** Es el que se verifica siempre. El suceso seguro es E. Es equivalente al conjunto universal U.
- **Suceso Imposible:** Es el que nunca se verifica. Es equivalente al conjunto vacío, se representa igual a ∅.
- **Suceso Contrario de A:** Es el que se cumple cuando no se cumple A. Se denota por A^C o por A′. Equivale al conjunto complementario.
- **Partes de E:** Es el conjunto de todos los sucesos de E.
  Se denota por P (E).

Ejemplo: Consideremos el experimento que consiste en lanzar un dado tetraédrico, es decir, con 4 caras triangulares, numeradas del 1 al 4 y anotar el resultado de la cara inferior.

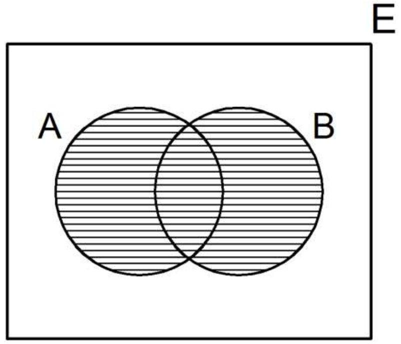
Solución: Sean:

- El espacio muestral es E = {1, 2, 3, 4}.
- Un suceso elemental será obtener un dos.
- Un suceso compuesto es obtener número par: A = {2, 4}.
- Un suceso seguro es E = {1, 2, 3, 4}.
- Un suceso imposible sería obtener 5.
- Suceso contrario de A: A^C = {1, 3}.
- Partes de E:

P (E) = {∅, {1}, {2}, {3}, {4}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4}}.

6.4 OPERACIONES CON SUCESOS

1. Unión de sucesos: Dados dos sucesos A y B, se define el suceso A ∪ B, como aquel que se cumple cuando se verifica A ó B. La representación del suceso se puede visualizar usando los diagramas de Venn – Euler:



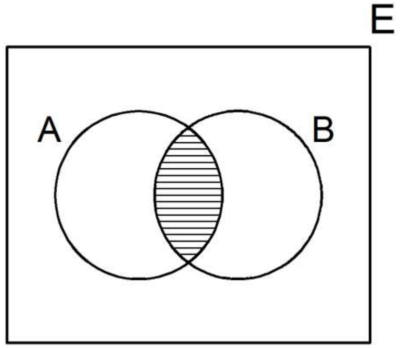
- Tienen las mismas propiedades que la unión de conjuntos:

$$A \cup E = E \quad , \quad A \cup \emptyset = A \quad , \quad A \cup A^C = E$$

- Un suceso B está contenido en A si A ∪ B = A
- Para "n" sucesos existentes: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \ldots \cup A_n$.

  Se interpreta: "Por lo menos ocurre uno de los sucesos".

2. Intersección de sucesos: Se define la intersección de los sucesos A y B como el suceso que se cumple si tiene lugar A y B a la vez. El diagrama representa que los dos sucesos A y B ocurren simultáneamente.



- Cumple las mismas propiedades que la intersección de conjuntos:

$$A \cap E = A \quad , \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad , \quad A \cap A^C = \emptyset$$

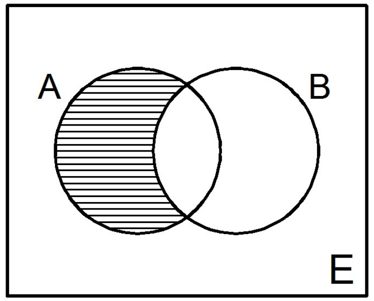
- Un B está contenido en A, entonces A ∩ B = B
- Dos sucesos cuya intersección es el suceso imposible, se llaman incompatibles. Por tanto, dos sucesos son compatibles cuando pueden darse a la vez.
- Para "n" sucesos existentes: $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \ldots \cap A_n$.

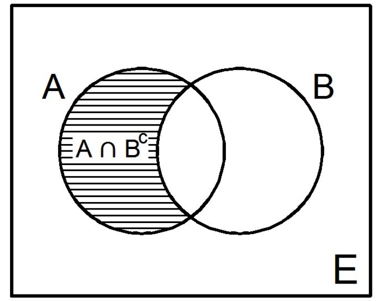
  Se lee: "Todos ocurren a la vez".

Nota 1: Todas las demás propiedades de la unión e intersección de conjuntos se verifican para la unión e intersección de sucesos.

3. Diferencia de sucesos: Dados dos sucesos A y B, se define el suceso A – B como aquel que se cumple cuando se cumple A, pero no B.

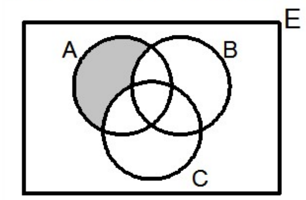
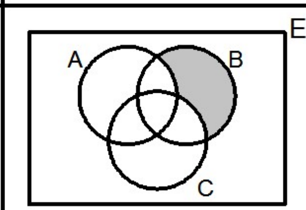
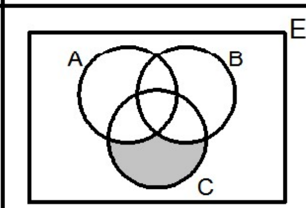
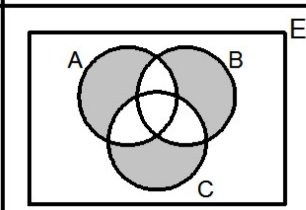
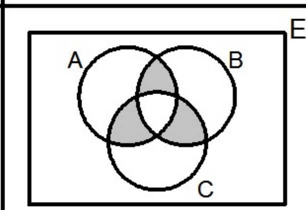
Gráficamente:

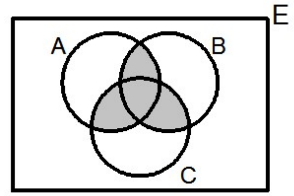
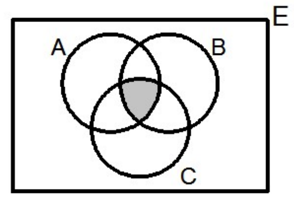
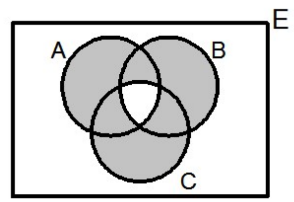
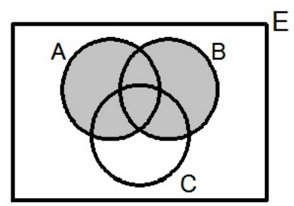




- Fácilmente se ve que $A - B = A \cap B^C$

Nota 2: La representación conjuntista para tres sucesos existentes en un espacio muestral E se pueden interpretar usando los diagramas de Venn – Euler, a saber:

Tres sucesos existentes	Representación conjuntista	Diagrama de Venn-Euler
"Solo ocurre A" ó "ocurre A, y no ocurre B y C"	$A \cap B' \cap C'$ ó $A B^c C^c$	
"Solo ocurre B" ó "ocurre B, y no ocurre A ni C"	$A' \cap B \cap C'$ ó $A^c B\, C^c$	
"Solo ocurre C" ó "ocurre C, y no ocurre A ni B"	$A' \cap B' \cap C$ ó $A^c B^c C$	
"Solo uno de los sucesos ocurre"	$AB'C' + BA'C' + CA'B'$	
"Solo dos sucesos ocurren"	$(AB \cup AC \cup BC) - ABC$ ó $ABC' + ACB' + BCA'$	

Tres sucesos existentes	Representación conjuntista	Diagrama de Venn-Euler
"Por lo menos, dos sucesos ocurren"	$(AB \cup AC \cup BC)$ ó $ABC' + ACB' + BCA' + ABC$	
"A, B y C ocurren a la vez"	$A \cap B \cap C$ ó $A\ B\ C$	
"A lo más, ocurren dos sucesos"	$(A\cup B\cup C) - (A\cap B\cap C)$ ó $\underbrace{\underbrace{AB'C' + BA'C' + CA'B'}_{\text{Sólo 1}} + \underbrace{ABC' + ACB' + BCA'}_{\text{Sólo 2}}}_{\text{A lo más 2}}$	
"El suceso está en A o en B" "Ocurre que es imposible sólo para C"	$(A\cup B\cup C) - (CA'B')$	

6.5 Ejercicios Resueltos

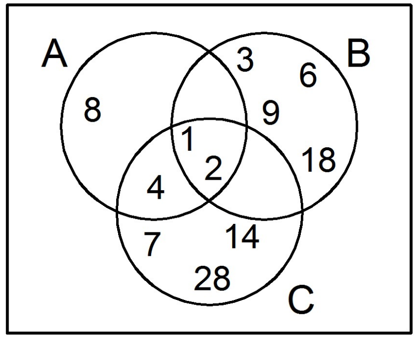
A. ¿Cuál es el máximo común divisor de los siguientes números?

1. 8, 18, 28
2. 12, 18, 54
3. 36, 48, 60

Solución:

1. A = {x / x es divisor de 8} = {1, 2, 4, 8}
2. B = {x / x es divisor 18} = {1, 2, 3, 6, 9, 18}
3. C = {x / x es divisor de 28} = {1, 2, 4, 7, 14, 28}

Utilizando diagramas de Venn – Euler:



Por tanto, el m.c.d. es 2.

2. El conjunto de los divisores de 12:

A = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

El conjunto de los divisores de 18:

B = {1, 2, 3, 6, 9, 18}

El conjunto de los divisores de 54:

C = {1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54}

Los divisores comunes: (A ∩ B) ∩ C = {1, 2, 3, 6}

Por tanto, el m.c.d. es 6

3. Por el método práctico:

36	48	60	2
18	24	30	2
9	12	15	3
3	4	5	

Por tanto, el m.c.d. es 2.

B. ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de los siguientes números?

1. 12, 15
2. 2, 3, 5

Solución:

1. Los múltiplos de 12 son: A = {12, 24, 36, 48, 60, 72,…}

   Los múltiplos de 15 son: B = {15, 30, 45, 60, 75,…}

   Los múltiplos de ambos AB = {60, 120, 180, 240,…}

   Por tanto, el m.c.m. es 60

2. Consideremos:

   $A = \{x \,/\, x = 5n,\ n \in \mathbb{N}\}$

   $B = \{x \,/\, x = 3n,\ n \in \mathbb{N}\}$

   $C = \{x \,/\, x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$

   Donde: $A \cap B \cap C = \{30, 60, 90\}$

   Por tanto, el m.c.m. es 30.

C. Se considera el experimento aleatorio: “Lanzar una moneda y un dado a la vez”. Indica el espacio muestral.

Solución: Si llamamos C al suceso cara y X al suceso cruz en la moneda, el espacio muestral será:

E = {1C, 1X, 2C, 2X, 3C, 3X, 4C, 4X, 5C, 5X, 6C, 6X}

D. Consideremos el experimento que consiste en lanzar un dado icosaédrico y anotar el resultado de la cara superior. Se pide:

1. Espacio muestral.
2. Suceso “Ser número par”
3. Suceso “Ser número impar”
4. Suceso “Obtener múltiplo de 3”

Solución:

1. Como sabemos, el icosaedro tiene 20 caras, luego el dado puede numerarse del 1 al 20. El espacio muestral estará formado por los números del 1 al 20.
2. Suceso par = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}
3. Suceso impar = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 ,17, 19}
4. Suceso múltiplo de 3 = {3, 6, 9, 12, 15, 18}

6.6 Actividad de Aprendizaje

A. ¿Cuál es el m.c.d. de los siguientes números?

1. 72 180 252
2. 54 108 135
3. 450 630 720
4. 288 312 360
5. 378 756 1134

B. Indica el m.c.m. de los siguientes números:

1. 45 63 90
2. 18 27 54
3. 16 24 12
4. 27 36 54
5. 32 100 360 900

C. Responde a la siguiente pregunta: ¿Se podrá dividir tres varillas de 20 cm, 24 cm y 30 cm en pedazos de 4 cm de longitud exactamente?

D. Consideremos el experimento consistente en lanzar tres dados normales y calcula la suma de sus caras superiores. Además, halla:

1. Espacio muestral
2. Suceso A: “Obtener suma 12”
3. Suceso B: “Obtener suma 8”
4. Suceso C: “Obtener suma menor o igual a 5”

E. Consideremos el experimento que consiste en sacar 4 bombillas de una caja en la que hay bombillas en buen estado y bombillas fundidas. Halla:

1. El espacio muestral
2. El suceso A: “Primera fundida”
3. El suceso B: “Una sola bombilla buena”
4. Halla e interpreta A ∩ B
5. Halla e interpreta A ∪ B

6.7 Clave de Respuesta

A. 2) 27
4) 24

B. 2) 54
4) 108

C. No, porque 4 no es común divisor de 20, 24 y 30.

D. 2) A = {(1, 5, 6), (1, 6, 5), (2, 4, 6), (2, 5, 5), (2, 6, 4), (3, 3, 6), (3, 4, 5), (3, 5, 4), (3, 6, 3), (4, 2, 6), (4, 3, 5), (4, 4, 4), (4, 5, 3), (4, 6, 2), (5, 1, 6), (5, 2, 5), (5, 3, 4), (5, 4, 3), (5, 5, 2), (5, 6, 1), (6, 1, 5), (6, 2, 4), (6, 3, 3), (6, 4, 2), (6, 5, 1)}
4) C = {(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1)}

E. 2) A = {(FBBB), (FBBF), (FBFB), (FFBB), (FBFF), (FFBF), (FFFB), (FFFF)}
4) A ∩ B = {(FBFF), (FFBF), (FFFB)}

> ***“Mira el trabajo como una ley suprema de la vida y ejercítalas como fuente inagotable, primera y última de tu riqueza”***

LECCIÓN 7

CARDINALIDAD DE UN CONJUNTO Y EL ÁLGEBRA BOOLEANA.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Resolver problemas diversos relativos al número cardinal de conjuntos.
2. Aplicar las operaciones de dos o más conjuntos al Álgebra Booleana.
3. Verificar que las leyes conmutativa, asociativa y distributiva de la teoría de conjuntos también son propiedades del Álgebra Booleana.

7.1 CARDINALIDAD DE UN CONJUNTO

Definición: Si A es un conjunto finito cualesquiera, se denomina **cardinal de A** al número de elementos de A, y se denota por:

$$\text{Card}(A) = n(A)$$

Se lee: "El cardinal del conjunto A" ó "El número de elementos del conjunto A".

Ejemplo: Si A = {x / x es una vocal}, entonces n (A) = 5
Si $B = \{x / x \in \mathbb{Z}, 0 < x < 10, x \text{ es impar}\}$, entonces n (B) = 5
Si $C = \emptyset$, entonces n (C) = 0

Propiedades:

L_1. Si A y B son conjuntos finitos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$), tenemos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

L_2. Si A y B son conjuntos finitos arbitrarios, no necesariamente disjuntos ($A \cap B \neq \emptyset$), expresamos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

L_3. Si A y B son conjuntos finitos arbitrarios, no necesariamente disjuntos, tenemos:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

L_4. Si A, B y C son conjuntos finitos tales que $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, entonces:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Esta propiedad se generaliza de tal manera que:

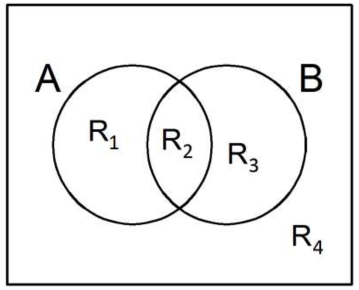
"Si se tiene k conjuntos finitos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_K$" tal que $\bigcap_{i=1}^{k} A_i \neq \emptyset$, entonces:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} n(A_i) - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} n(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k \\ i \neq j \neq k}} n(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^k n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$$

Ejemplo 1: Dados los conjuntos A y B, tales que n (A) = 7k, n (B) = 4k, $n(A \cap B) = 2k + 3$. Halla el número de elementos de:

1. $(A \cap B) \cap (B - A)$
2. $A \cup B$
3. $B - A$

Solución: Usando el diagrama de Venn – Euler y el método de regiones, hacemos: $R_1 = n(A - B)$, $R_2 = n(A \cap B)$ y $R_3 = n(B - A)$.



Por L_3, tenemos:

$$R_1 = n(A) - n(A \cap B)$$
$$= 7k - (2k + 3)$$
$$R_1 = 5k - 3$$

Luego,

$$R_3 = n(B) - n(A \cap B)$$
$$= 4k - (2k + 3)$$
$$R_3 = 2k - 3$$

Además, $R_2 = 2k + 3$

Respondiendo, tenemos que:

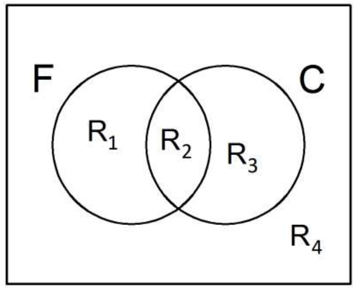
1. $(A \cap B) \cap (B - A) = \emptyset \Rightarrow n[(A \cap B) \cap (B - A)] = 0$
2. $n(A \cup B) = R_1 + R_2 + R_3 = (5k - 3) + (2k + 3) + (2k - 3)$

   $n(A \cup B) = 9k - 3$
3. $n(B - A) = R_3 = 2k - 3$

Ejemplo 2: Una encuesta de 1000 personas mayores de 40 años, reveló que 312 fumaban, 80 tenían cáncer y 660 ni fumaban ni tenían cáncer. Dibuja un diagrama de Venn – Euler para responder a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas personas de las encuestadas fumaban y tenían cáncer?
2. ¿Qué porcentaje de fumadores tenían cáncer?
3. ¿Puede una encuesta indicar que fumar produce cáncer?

Solución: Según el diagrama de Venn – Euler:



Consideremos a:

$R_1 = 312 - x$
$R_2 = F \cap C = x$
$R_3 = 80 - x$
$R_4 = 660$

Luego,

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 1000$$
$$(312 - x) + x + (80 - x) + 660 = 1000$$
$$1052 - x = 1000$$
$$x = 52$$

De donde:

1. $R_2 = 52$, es el número de personas que fumaban y tenían cáncer.
2. Como el total de fumadores es:

   $R_1 + R_2 = 260 + 52 = 312$

Tenemos:

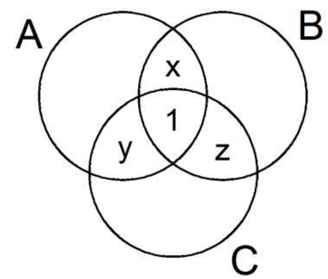
$312 \rightarrow 100\%$
$52 \rightarrow a$

$$a = \frac{52 \times 100}{312} = \frac{52 \times 50}{156} = 16{,}6\%$$

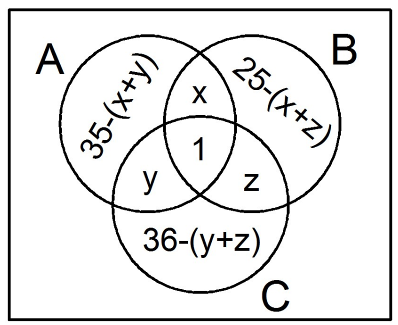
Por tanto, el 16,6% representa a fumadores con cáncer.

3. No, depende una patología específica.

Ejemplo 3: En el diagrama adjunto:
A, B y C son asignaturas que llevan 70 alumnos. Todo A: llevan 36 alumnos; todo B: llevan 26 alumnos; todo C: llevan 37 alumnos. Halla el número de alumnos que llevan 2 asignaturas.



Solución:
Sea (x + y + z) el número de alumnos que llevan dos asignaturas.
Entonces en el diagrama de Venn – Euler los datos quedan así:



En efecto:

$35 - (x + y) + x + y + 1 + 25 - (x + z) + z + 36 - (y + z) = 70$

$35 - x - y + x + y + 1 + 25 - x - z + z + 36 - y - z = 70$

$$97 - (x + y + z) = 70$$

$$\therefore \ (x + y + z) = 27$$

Ejemplo 4: En un grupo de 100 estudiantes se encontró que 28 estudiaban español (E); 30 alemán (A); 42 francés (F); 8 español y alemán; 10 español y francés; 5 alemán y francés; 3 los tres idiomas. Se pregunta:

1. ¿Cuántos no estudiaban ningún idioma?
2. ¿Cuántos estudiaban sólo francés?
3. ¿Cuántos estudiaban alemán sí y sólo sí estudiaban francés?

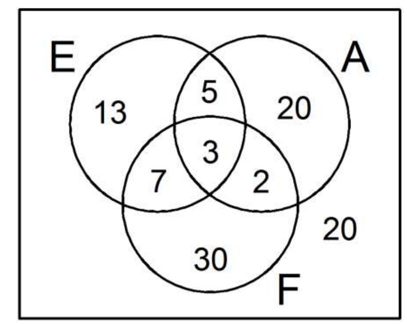
Solución: Según los datos tenemos:

$E = 28 \quad ; \quad A = 30 \quad ; \quad F = 42$

$E \cap A = 8 \quad ; \quad E \cap F = 10 \quad ; \quad A \cap F = 5$

$E \cap A \cap F = 3.$

Ayudados por el diagrama de Venn – Euler, colocamos los datos:



1. Sumando en el diagrama:

   $13 + 5 + 20 + 7 + 3 + 2 + 30 = 80$

   Entonces ningún idioma será:

   $100 - 80 = 20$ alumnos.

2. Sólo francés: $SF = 42 - (7 + 3 + 2)$

   $SF = 42 - 12$

   $SF = 30$ alumnos

3. Estudiaban alemán sí y sólo sí estudiaban francés; se cumple:

A	$\leftrightarrow$	F
V	V	V
V		F
F		V
F	V	F

Por conjunción: $A \cap F$ ó también: $A' \cap F' = (A \cup F)'$; tenemos:

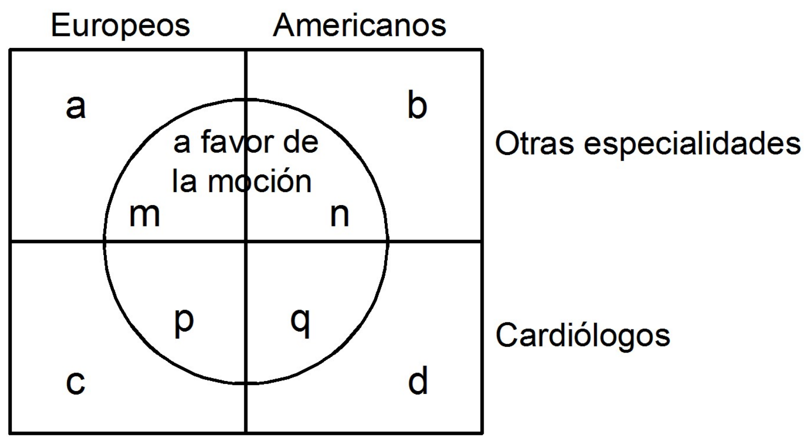
$$A \cap F = 5$$
$$(A \cup F)' = 33$$
$$(A \cap F) \cup (A \cup F)' = 38 \text{ alumnos}$$

Ejemplo 5: En un congreso Internacional de Medicina, se debatió el problema de la Eutanasia, planteándose una moción:

115 europeos votaron a favor de la moción,
75 cardiólogos votaron en contra,
60 europeos votaron en contra,
80 cardiólogos votaron a favor.

Si el número de cardiólogos europeos excede en 30 al número de americanos de otras especialidades y no hubo abstenciones. ¿Cuántos médicos participaron en el Congreso?

Solución: Usando el diagrama de Lewis Carroll:



De donde:

115 europeos a favor de la moción: $m + p = 115$
75 cardiólogos que votaron en contra: $c + d = 75$
60 europeos que votaron en contra: $a + c = 60$
80 cardiólogos que votaron a favor de la moción: $p + q = 80$

$$m + p + c + d + a + c + p + q = 330 \ldots (1)$$

Además:

Número de cardiólogos europeos: $p + c = b + n + 30$………….. (2)

Luego, (2) en (1)

$$m + (b + n + 30) + d + a + c + p + q = 330$$
$$m + b + n + d + a + c + p + q = 330 - 30$$
$$\therefore\ a + b + c + d + p + q + m + n = 300 \text{ médicos}$$

7.2 ÁLGEBRA BOOLEANA EN CONJUNTOS

En un conjunto finito la aplicación de operaciones teóricas y lógica de dos o más conjuntos o proposiciones surge un álgebra peculiar llamada **Álgebra Booleana.**

En la sección 4, se ha visto que es fácil comprobar la ley conmutativa de las operaciones unión e intersección de conjuntos, como:

1. $A \cup B = B \cup A$, 2. $A \cap B = B \cap A$
3. $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$, 4. $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

También, podemos decir que es fácil verificar el resultado asociativo para la unión e intersección para tres conjuntos:

5. $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$, 6. $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$

Como así también para la ley distributiva:

7. $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$, 8. $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$

A continuación comprobamos que estas leyes se cumplen en la vida real:

Ejemplo 1: Supongamos que los individuos de una determinada población son la prueba de la presencia de uno o varios de los antígenos A, B y Rh. A y B son antígenos del grupo sanguíneo AB y Rh es el antígeno del grupo sanguíneo RhO.

Solución: Señalamos al conjunto universal U como la población de personas con sus tipos sanguíneos respectivos y denotamos los subconjuntos de individuos que llevan los antígenos A, B y Rh como A, B, R; respectivamente y sea x una variable que denota cualquier individuo de la población U, entonces tenemos:

$A = \{x \,/\, x \text{ tiene antígeno A}\}$

$B = \{x \,/\, x \text{ tiene antígeno B}\}$

$R = \{x \,/\, x \text{ tiene antígeno Rh}\}$

Con esto podemos decir que en (1), la igual es válida porque al combinar los subconjuntos de individuos que llevan por lo menos uno de los antígenos, obtenemos:

$A \cup B = \{x \,/\, x \text{ tiene antígeno A y B}\}$

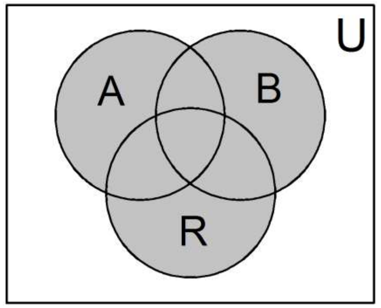
$A \cup R = \{x \,/\, x \text{ tiene antígeno A y Rh}\}$

$B \cup R = \{x \,/\, x \text{ tiene antígeno B y Rh}\}$

De igual manera ocurre para obtener el subconjunto de personas que llevan por **lo menos uno** de los antígenos, es decir A ó B ó Rh, entonces tenemos varias posibilidades.

$(A \cup B) \cup R$ ó $(A \cup R) \cup B$ ó $A \cup (B \cup R)$

se puede observar que estos conjuntos son idénticos, como lo muestra el diagrama de Venn – Euler:



En general, cualquiera de los tres conjuntos A, B y R satisfacen la ley asociativa para la unión de conjuntos (5), a saber:

$(A \cup B) \cup R = A \cup (B \cup R)$

como consecuencia de ello, los paréntesis son superfluos y pueden ser omitidos. Simplemente se puede escribir: $A \cup B \cup R$.

En la intersección de conjuntos dados en (2), la igual también es válida. Por ejemplo, consideremos los subconjuntos de individuos que **llevan al menos** dos de los antígenos, y estos subgrupos son las intersecciones siguientes:

$A \cap B = \{x / x$ tiene antígeno A y B$\}$

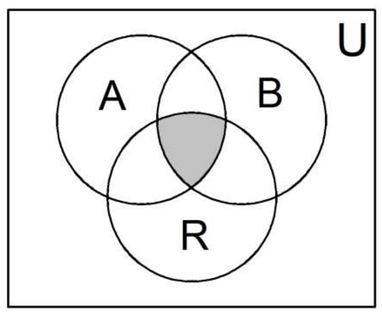
$A \cap R = \{x / x$ tiene antígeno A y Rh$\}$

$B \cap R = \{x / x$ tiene antígeno B y Rh$\}$

Para obtener el subconjunto de personas que llevan los tres antígenos, tenemos varias posibilidades:

$(A \cap B) \cap R = A \cap (B \cap R)$

estos conjuntos son idénticos, el resultado se muestra en el diagrama de Venn – Euler:



El resultado asociativo para tres conjuntos bajo la operación de intersección (6), se generaliza de tal manera que:

$(A \cap B) \cap R = A \cap (B \cap R)$

esta igualdad se satisface. Por tanto, de esta igualdad podemos decir que los paréntesis son innecesarios y podemos omitirlos. Así para la intersección de tres conjuntos podemos escribirlo: $A \cap B \cap R$.

Unidad 2 / Conjuntos

Ejemplo 2: Si la población del ejemplo anterior se subdivide en ocho conjuntos disjuntos, entonces corresponden a ocho categorías mutuamente excluyentes de los tipos de sangre. En biomédica, la presencia de A y B es simbolizada por AB; la ausencia de A y B como O(O^+, O^-); la presencia de Rh por Rh^+, y la ausencia de Rh por Rh^-. Con estas notaciones obtenemos las siguientes clases de tipos de sangre:

$A \cap B \cap R = \{x / \text{tipo } (AB, Rh^+)\}$

$A \cap B \cap R' = \{x / \text{tipo } (AB, Rh^-)\}$

$A \cap B' \cap R = \{x / \text{tipo } (A, Rh^+)\}$

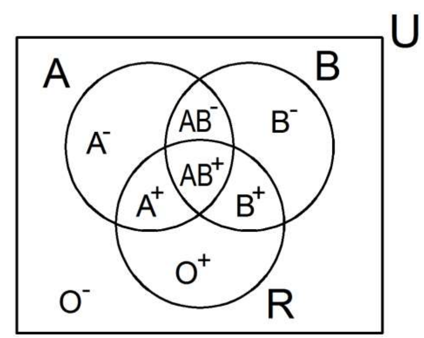
$A \cap B' \cap R' = \{x / \text{tipo } (A, Rh^-)\}$

$A' \cap B \cap R = \{x / \text{tipo } (B, Rh^+)\}$

$A' \cap B \cap R' = \{x / \text{tipo } (B, Rh^-)\}$

$A' \cap B' \cap R' = \{x / \text{tipo } (O, Rh^+)\}$

Usando el diagrama de Venn – Euler, tenemos:



Basadas en la distribución de los 8 tipos de sangre; como lo muestra el diagrama anterior, vamos a comprobar que se cumple la ley distributiva:

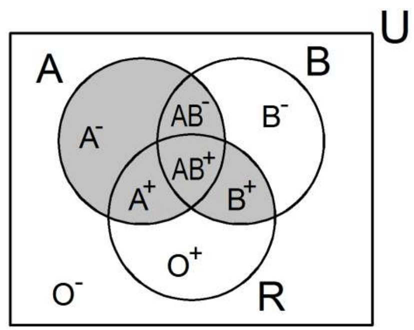
$A \cup (B \cap R) = (A \cup B) \cap (A \cup R)$

a) Por medio de los diagramas de Venn – Euler: $A \cup (B \cap R)$ corresponde a:

$A = \{A^+, A^-, AB^+, AB^-\}$
$B \cap R = \{AB^+, B^+\}$

Luego:

$A \cup (B \cap R) = \{A^+, A^-, AB^+, AB^-, B^+\}$

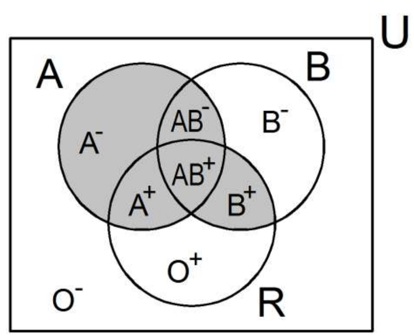


b) $(A \cup B) \cap (A \cup R)$: corresponde a:

$A \cup B = \{A^+, A^-, B^+, B^-, AB^+, AB^-\}$
$A \cup R = \{A^+, A^-, AB^+, AB^-, B^+, O^+\}$

Luego:

$(A \cup B) \cap (A \cup R) = \{A^+, A^-, AB^+, AB^-, B^+\}$



De (a) y (b) se observa que presentan regiones iguales, lo que completa la prueba.

En segundo lugar, consideremos la otra posibilidad:

$A \cap (B \cup R) = (A \cap B) \cup (A \cap R)$

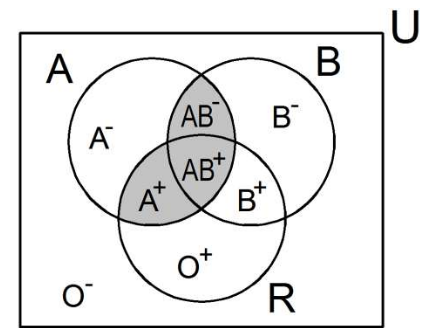
probaremos por medio de los diagramas de Venn – Euler:

c) $A \cap (B \cup R)$: corresponde a:

$A = \{A^+, A^-, AB^+, AB^-\}$
$B \cup R = \{B^+, B^-, AB^+, AB^-, A^+, O^+\}$

Luego:

$A \cap (B \cup R) = \{A^+, AB^+, AB^-\}$

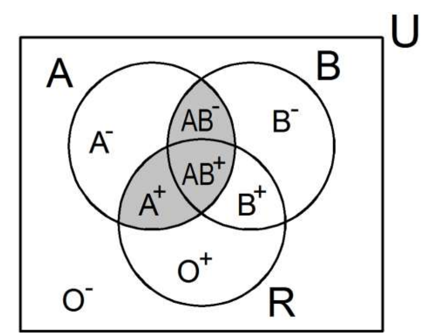


d) $(A \cap B) \cup (A \cap R)$: corresponde a:

$A \cap B = \{AB^+, AB^-\}$
$A \cap R = \{A^+, AB^+\}$

Luego:

$(A \cap B) \cup (A \cap R) = \{A^+, AB^+, AB^-\}$



Por tanto, los resultados de (c) y (d) son iguales, que completa la prueba. Además, podemos decir que las leyes distributivas (7) y (8) son válidas:

Finalmente, podemos concluir que las leyes: conmutativa, asociativa y distributiva de la teoría de conjuntos, junto con las propiedades $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$, también son propiedades notables del Álgebra Booleana.

7.3 Ejercicios Resueltos

A. Bienestar Universitario de la UNS había fijado que 200 estudiantes del 1er. Ciclo iban a pasar examen médico en RX y Dental, y sólo el 30% lo hicieron. Si 104 fueron examinados en RX y el 25% del resto no llegaron a tiempo, ¿Cuál es el número de estudiantes que pasaron un solo examen médico?

Solución: Según datos del problema:

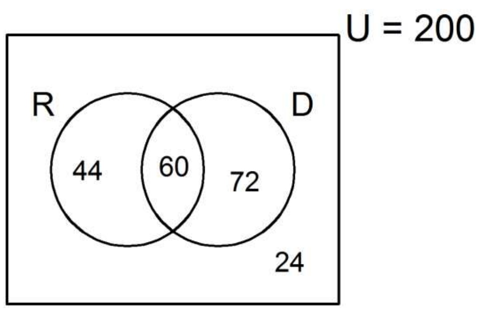
$R \cap D = 60$ (que es el 30% de 200)

$SR = 104 - 60 = 44$

El resto es: $200 - 104 = 96$

El 25% del resto es 24 alumnos.

Ayudándonos en el siguiente diagrama de Venn – Euler, tenemos:



que pasan sólo Dental: $SD = 200 - (60 + 44 + 24) = 72$

Por tanto, el número de estudiantes que pasaron un sólo examen: 1 examen = $44 + 72 = 116$ alumnos.

B. En la facultad de Medicina de la UPSP se encuesta a los estudiantes para determinar su preferencia de tres especialidades y los resultados son:

El 72% prefieren especialización en Ginecología (G).

El 52% prefieren especialización en Neurología (N).

El 37% prefieren especialización en Pediatría (P).

El 32% aún no deciden entres G y N.

El 12% aún no deciden entres N y P.

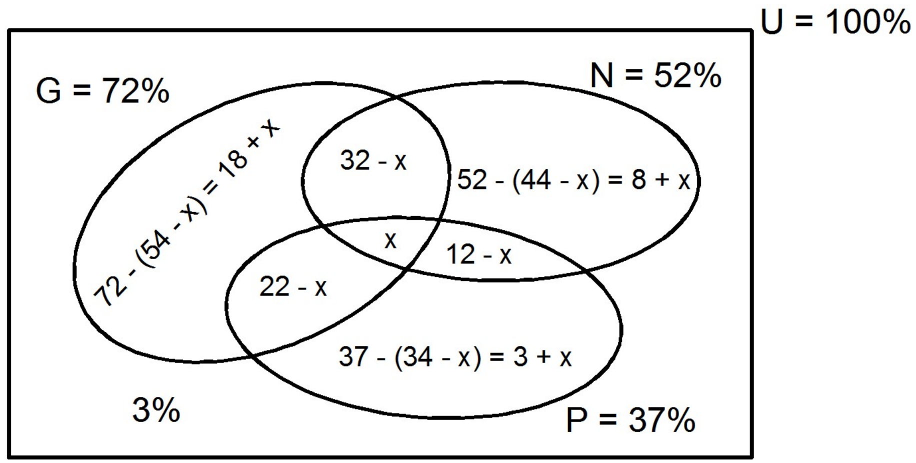
El 22% aún no deciden entres G y P.

El 3% no respondieron.

Se pregunta:

1. Calcula el porcentaje de estudiantes que están decididos por una especialidad.
2. Calcula el porcentaje de alumnos que no deciden por una especialidad.

Solución: Considerando el conjunto universal: U = 100% y $G \cap N \cap P = x$ alumnos, colocamos los datos en el diagrama de Venn – Euler siguiente:



Tenemos:

$(18 + x) + (32 - x) + x + (22 - x) + (12 - x) + (8 + x) + (3 + x) + 3 = 100$

$18 + x + 32 – x + x + 22 – x + 12 – x + 8 + x + 3 + x + 3 = 100$

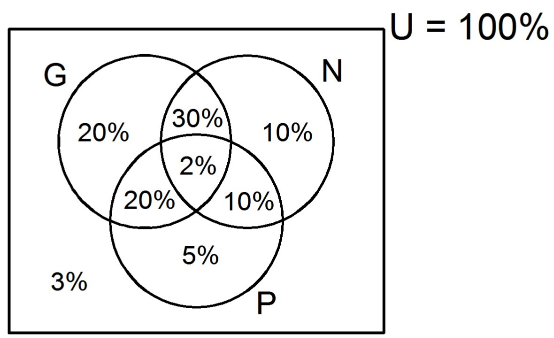
$x + 98 = 100$

$x = 100 – 98$

$x = 2\% = G \cap N \cap P$

Ordenando nuevamente el diagrama de Venn – Euler con el dato:

$G \cap N \cap P = 2\%$:



1. El porcentaje de estudiantes decididos por una especialidad:

$$\begin{array}{r} SG = 20\% \\ SN = 10\% \\ SP = 5\% \\ \hline SG + SN + SP = 35\% \end{array}$$

2. El porcentaje de estudiantes que no deciden por una especialidad:

   $20\% + 30\% + 10\% + 2\% + 3\% = 65\%$

Unidad 2 / Conjuntos

C. 100 personas respondieron a un cuestionario formado por 3 preguntas. Cada pregunta debía contestarse por si o por no y una sola de estas respuestas es correcta. Si sabemos que:

8 personas contestaron bien las 3 preguntas
9 personas contestaron bien sólo la 1ra. y la 2da.
11 personas contestaron bien sólo la 1ra. y la 3ra.
6 personas contestaron bien sólo la 2da. y la 3ra.
55 personas contestaron bien sólo la 1ra. pregunta por los menos
32 contestaron a la 2da. por lo menos.
49 respondieron a la 3ra. por lo menos.

¿Cuántas personas no contestaron bien ninguna pregunta?

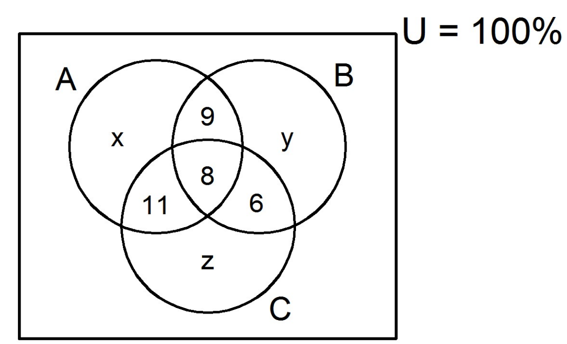
Solución: Consideramos que:

A = respondieron bien la 1ra. pregunta
B = respondieron bien la 2da. pregunta
C = respondieron bien la 3ra. pregunta

de donde:

$n(A \cap B \cap C) = 8$
$n(ABC') = 9$
$n(ACB') = 11$
$n(BCA') = 6$

Ayudándonos con el diagrama de Venn – Euler, queda:



Luego:

SA: $n(AB'C') + n(ABC') + n(ACB') + n(ABC) = 55$

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 9 & + & 11 & + & 8 & = & 55 \\ & & & & x & + & 28 & = & 55 \\ & & & & & & x & = & 27 \end{array}$$

SB: $n(BA'C') + n(ABC') + n(BCA') + n(ABC) = 32$

$$\begin{array}{ccccccccc} y & + & 9 & + & 6 & + & 8 & = & 32 \\ & & & & y & + & 23 & = & 32 \\ & & & & & & y & = & 9 \end{array}$$

SC: $n(CA'B') + n(BCA') + n(ACB') + n(ABC) = 49$

$$\begin{array}{ccccccccc} z & + & 6 & + & 11 & + & 8 & = & 49 \\ & & & & z & + & 23 & = & 49 \\ & & & & & & z & = & 24 \end{array}$$

Entonces:

$n(A) = x + 9 + 11 + 8 = 27 + 9 + 11 + 8 = 55$

$n(B) = y + 9 + 6 + 8 = 9 + 9 + 6 + 8 = 32$

$n(C) = z + 6 + 11 + 8 = 24 + 9 + 11 + 8 = 49$

Aplicando la propiedad L_4

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(AB) - n(AC) - n(BC) + n(ABC)$$
$$= 55 + 32 + 49 - 17 - 19 - 14 + 8$$

$n(A \cup B \cup C) = 94$

Por tanto, los que no contestaron bien ninguna pregunta:

$100 - 94 = 6$ personas.

D. En la escuela de estudios empresariales de una universidad, los alumnos del segundo ciclo que tienen tres asignaturas: Matemáticas, Contabilidad y Estadística, repiten curso. El último año los resultados fueron: 6% aprobaron la tres asignaturas; 22% aprobaron Matemáticas y Contabilidad; 16% aprobaron Matemáticas y Estadística; 28 aprobaron Contabilidad y Estadística; 37% aprobaron Matemáticas, 56% aprobaron Contabilidad y el 41% aprobaron Estadística.

Se pregunta:

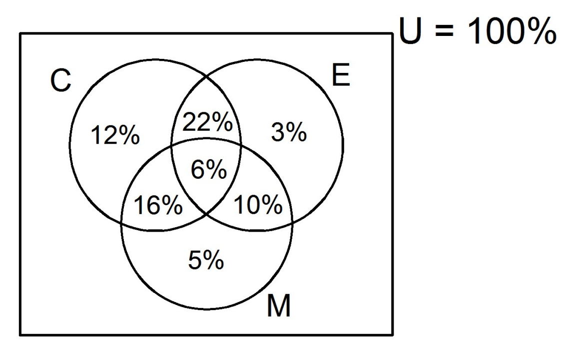
1. ¿Qué porcentaje de alumnos repitió el curso?
2. ¿Qué porcentaje aprobó sólo una asignatura?

Solución:

Llamemos M, C y E a los sucesos aprobar Matemáticas, Contabilidad y Estadística, respectivamente. Además tenemos:

$n(M \cap C \cap E) = 6\%$
$n(M \cap C) = 22\%$
$n(M \cap E) = 16\%$
$n(C \cap E) = 28\%$
$n(M) = 37\%$
$n(C) = 56\%$
$n(E) = 41\%$

Si representamos estos datos en el diagrama de Venn – Euler, se obtienen:



Luego, podemos decir que los alumnos que aprobaron alguna asignatura es la suma de todas las cantidades indicadas:

$$12 + 22 + 3 + 16 + 6 + 10 + 5 = 74\%$$

Por tanto:

1. El porcentaje de repeticiones fue: $100 – 74 = 26\%$
2. Aprobó sólo una asignatura: $12 + 3 + 5 = 20\%$

E. Demostrar que:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C)$$

Prueba:

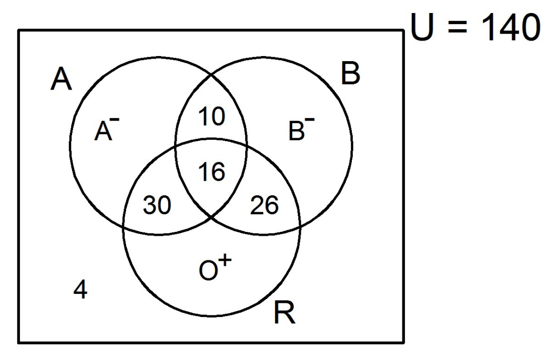
$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n[(A \cup B) \cup C] \\ &= n(A \cup B) + n(C) – n[(A\cup B)\cap C] \\ &= n(A) + n(B) - n(A\cap B) + n(C) - n[(A\cap C) \cup (B\cap C)] \\ &= n(A) + n(B) - n(A\cap B) + n(C) - [n(A\cap C) + n(B\cap C) – n(A\cap C\cap B\cap C)] \\ &= n(A) + n(B) - n(A\cap B) + n(C) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap C\cap B\cap C)] \\ n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C) \end{aligned}$$

F. En un hospital se obtuvieron los siguientes datos sobre los pacientes atendidos en una semana:
Se atendieron un total de 140 personas de las cuales, 16 fueron AB^+, 62 tenían el antígeno A, 4 eran del grupo O^-, 26 eran del grupo B^+, 30 fueron del grupo A^+, 60 tenían el antígeno B, 10 eran del grupo AB^-.

Se desea saber:

1. ¿Cuántos tenían los antígenos A y B?
2. ¿Cuántos eran del grupo O?
3. ¿Cuántos tenían el factor Rh?

Solución:
Basándose en la distribución de los 8 tipos de sangre dados en el ejemplo 2. sección 7.2, tenemos:



de donde:

$62 = A^- + 10 + 16 + 30 \;\rightarrow\; A^- = 62 – 56 = 6$
$60 = B^- + 10 + 16 + 26 \;\rightarrow\; B^- = 60 – 52 = 8$
$140 = O^+ + 30 + 16 + 10 + 26 +6 +8 +4 \;\rightarrow\; O^+ = 40$

Por tanto:

1. 26 personas tenían los antígenos A y B.
2. $O = O^+ + O^- = 40 + 4 = 44$ personas eran del grupo O.
3. 112 personas tenían el factor Rh.

7.4 Actividad de Aprendizaje

A. En un grupo de 100 pacientes, 49 no tenían TBC y 53 no tenían SIDA. Si 27 pacientes no tenían TBC ni SIDA, ¿Cuántos pacientes tenían uno de tales males?

B. En los diferentes cursos que ofrece la Facultad de Ciencias de la UNS, se han inscrito los siguientes números de alumnos: 150 en el curso P; 75 en el curso Q; 35 en el curso R; 50 en el curso S; 70 en P y Q; 40 en P y S; 30 en P y R; 5 en Q y R, y 2 en P, Q y R. Si cada estudiante toma cuando menos un curso, ¿cuántos estudiantes están inscritos?

C. Se examinan historias clínicas de 200 pacientes de gastroenterología, en un hospital se encontró que: 100 tenían gastritis, 80 tenían duodenitis y 60 ambas enfermedades.

Se pide:

1. ¿Cuántos pacientes tenían sólo gastritis o duodenitis?
2. ¿Cuántos no sufrían dichas enfermedades?

D. En una encuesta realizada por la panadería "Don Lolo", se entrevistaron a 900 amas de casa sobre su preferencia de los tres productos que produce. Se obtuvieron los siguientes datos:

130 personas compran únicamente pan francés
88 personas compran únicamente pan integral
32 personas compran únicamente pan de manteca
144 personas compran pan francés y pan integral exclusivamente
86 personas compran pan integral y de manteca exclusivamente
90 personas compran exclusivamente pan francés y de manteca
205 personas compran los tres productos.

Se pregunta:

1. ¿Cuántas personas consumen al menos pan francés o pan integral?
2. ¿Cuántas personas no consumen los productos que produce esta panadería?

E. En un análisis a 100 estudiantes, se encontró que el número de estudiantes en 3 diferentes cursos: solamente A eran 18; 23, A pero no E; 8 A y F; 26 para A; 48 para F; 8 F y E; 24 ningún curso.

Se pregunta:

1. ¿Cuántos estudiaban E?
2. ¿Cuántos estudiaban A y E pero no F?
3. ¿Cuántos estudiaban F sí y sólo si no estudiaban E?

Unidad 2 / Conjuntos

F. En una encuesta pública se determina la posibilidad de que una persona que consume: Un medicamento A es 50% un medicamento B es 37%; un medicamento C es 30%; un medicamento A y B es 12%; solamente medicamentos A y C es 8%; solamente medicamentos B y C es 5% y solamente medicamento C es 15%. Calcula la posibilidad de que una persona consuma:

1. El medicamento A o B no C.
2. Solamente A.
3. Ningún medicamento.

G. En una encuesta sobre tres artículos A, B y C se obtuvieron los siguientes datos:

$n(A \cup B) = 75$; $n(A) = 43$; $n(C) = 52$; $n(A \cap B)$ 15 ;
$n(A \cap C) = 18$; $n(B \cap C) = 16$; $n(A') = 77$; $n(A \cap B \cap C)' = 113$

Se desea saber:

1. El número de personas que prefieren el artículo B.
2. ¿Cuántas prefieren sólo el artículo B o C, pero no ambos?
3. ¿Cuántas prefieren por lo menos uno de los tres artículos?
4. El número de personas a las que se hizo la encuesta.
5. El número de personas que sólo prefieren el artículo A.
6. El número de personas que no prefieren ninguno de los tres artículos.

H. En una encuesta realizada en los últimos días a 1000 personas sobre la preferencia de las carnes en la ciudad de Nuevo Chimbote, es como sigue:

9,8% consumieron res
22,9% consumieron pollo
12,1% consumieron pescado
5,1% consumieron res y pollo
3,7% consumieron res y pescado
6,0% consumieron pollo y pescado
32,4% consumieron al menos uno de las 3 carnes.

Calcula el porcentaje de las personas que:

1. No consumieron ninguna de las tres carnes mencionadas.
2. Consumieron exactamente dos de las carnes.

I. En una Universidad al analizar los horarios de clases observó que:

El 43% de los estudiantes tienen clases a las 7 am.

47% tienen a las 8 am.

40% a las 9 am.

16% tienen clases a las 7 am. y a las 8 am.

18% a las 7 am. , 8 am. y 9 am.

14% tienen a las 8 am. y a las 9 am.

6% tienen a las 7 am. , 8 am. y 9 am.

Se desea conocer:

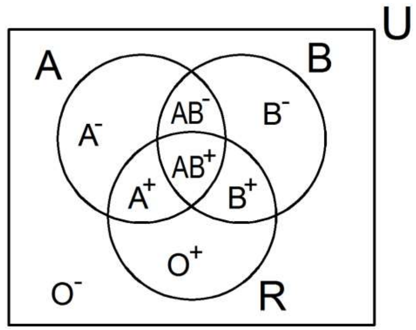
1. ¿Qué porcentaje de estudiantes tienen clases durante esas tres horas?
2. Sólo a las 8 am.
3. ¿Qué porcentaje no tiene clases durante esas horas?
4. Sólo a las 7 am. y a las 8 am.

J. Demuestra que: Si A y B son dos conjuntos finitos, tal que $A \cap B = \emptyset$, entonces $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

K. Sea U el conjunto de todas las personas por considerar: Una persona A^- tiene el antígeno A pero no B ni Rh; una persona O^+ tiene Rh pero no A ni B; una persona AB^- tiene los antígenos A y B pero no Rh; etc. Mediante el diagrama de Venn – Euler, indica cuales de los 8 tipos sanguíneos se incluyen en cada conjunto:

Unidad 2 / Conjuntos

1. $A \cap R$
2. $A \cap B$
3. $A \cup R$
4. $A \cup B$
5. $(A \cup B)'$
6. $(A \cup B \cup R)'$
7. $A' \cap B$
8. $R' \cap A$



7.5 Clave de Respuesta

A. 48 pacientes

B. 167 alumnos

C. 2) 80 pacientes

D. 2) 80 personas

E. 2) Ningún estudiante

F. 2) 30%

G. 2) 48 personas
4) 120 personas
6) 20 personas

H. 2) 7,6%

I. 2) 23%
4) 10%

J. Queda para el estudiante.

K. 2) AB^-, AB^+
4) A^-, AB^-, B^-, A^+, AB^+, B^+
6) O^-
8) A^-, AB^-

Estimado lector: ***"Ten presente siempre que las ideas son sentimientos, son pensamiento expresados en conceptos y éstos son tus propios conceptos, no sólo en tu ser interior, sino en todo aquel exterior que te rodea y hace tu diario vivir"***

EXÁMENES DE LA SEGUNDA UNIDAD

PRIMERA AUTOEVALUACIÓN

I. 1. Determina por extensión:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \ / \log_{1/2}\frac{1}{x} < 2\}$$

2. Determina por comprensión:

$$B = \{\frac{5}{3}, 2, 3, \frac{14}{3}, 7, 10\}$$

II. Si A = {1, 2, 3, 4, 5} ; B = {1, 3, 4, 6} ; C = {1, 6, 7} y
U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Obtenga el resultado de:

1. $A \cap B$
2. $B \cup C$
3. $A \cup (B \cap C)$
4. A'
5. $C - (A \cap B)$
6. $A - B$
7. $(A \cup B)' \cap C$
8. $A \cap (B \cup C)$
9. $A \,\Delta\, B$
10. $A - (A \cup C)$
11. $A' \cap (A \cup B')$
12. $U - B$
13. $A' \cap B$
14. $(C')'$
15. $A \cup \emptyset$
16. $A \cap U$

III. Si U = {x ∈ ℕ / x ≤ 11}

A = {x / x no es divisible entre 2}

B = {x / x es divisible entre 3}

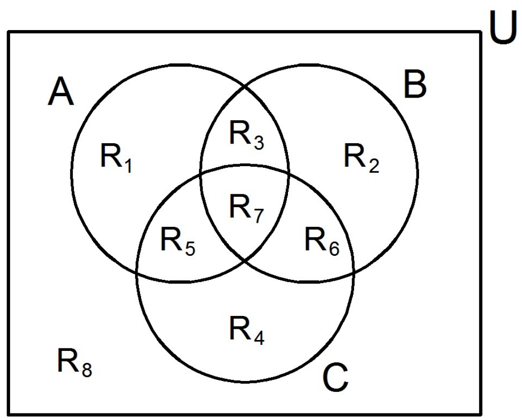
C = {x / x es primo}

D = {3, 5, 7, 9}

Encuentra el resultado:

1. (A ∪ B) – (C ∩ D)
2. (A′ ∩ B) – D
3. (A ∩ B) ∪ (C – D)
4. [A ∩ (B ∩ C)] Δ (D ∪ C)

IV. Mediante el uso de las regiones numeradas de la figura, encuentra la región de cada operación. Haz un diagrama para cada ejercicio.



1. A – (B ∪ C)
2. C ∩ (A ∪ B)
3. (A ∩ B ∩ C) – (A ∩ B)
4. (A ∩ B′) ∪ (A ∩ C′)
5. (A ∪ B) ∩ C′
6. A′Δ (B – C)

V. Por medio de un diagrama de Venn – Euler demuestra cada una de las siguientes identidades:

1. A ∪ (B ∪ C) = (A ∪ B) ∪ C
2. A ∪ A′ = U
3. A ∩ A′ = ∅
4. (A ∪ B)′ = A′ ∩ B′
5. (A ∩ B)′ = A′ ∪ B′

VI. ¿Cuáles de las siguientes propiedades para conjuntos son verdaderos?

1. A ∪ B = B ∩ A ↔ A = B
2. (A – B) ∪ B = A ↔ B ⊂ C
3. (A′ ∩ B′) ∩ B = (A ∪ B)′ ∩ B
4. (A ∪ B) ↔ A′ – (A ∩ B) ; A = A

VII. Si A= {otitis, faringitis}. Determinar los elementos del conjunto P (P (A)).

VIII. Problema 1:

La encuesta de una radiodifusora sobre el gusto de la música indica que a:

29 radioescuchas les gusta el bolero

23 radioescuchas les gusta el rock

40 radioescuchas les gusta el folclore

10 radioescuchas les gusta el folclore y el bolero

13 radioescuchas les gusta el folclore y el rock

5 radioescuchas les gusta el rock y el bolero

3 radioescuchas les gusta el bolero, rock y el folclore

En total se entrevistaron 70 personas. Con base en los datos anteriores, calcula:

1. El total de personas a quien sólo les gusta el folclore.
2. El total de personas a quien les agrada sólo bolero y el rock.
3. El número de personas a quienes no les gusta el bolero ni el rock, ni la música folclórica.
4. El número de personas que les gusta al menos dos géneros musicales.

Problema 2:

El espacio muestral de un experimento aleatorio es:
E = {a, b, c, d, e, f, g}. Sean los sucesos A = {a, e} ; B = {b, c, d} ;
C = {a, b, c, f} y D = {g}. Calcula:

1. Los sucesos contrarios de A, B, C y D.
2. $A \cup B$
3. $(A \cup B)'$
4. $A \cap C$
5. $A' \cap B'$
6. $A \cup (B \cap C')$
7. $(A \cap B)' \cap C$

SEGUNDA AUTOEVALUACIÓN

I. Si $U = \{x \in \mathbb{N} / x < 6\}$, $A = \{2^x / x \in \mathbb{Z}, -1 < x < 3\}$ y $B = \{2, 4, 5\}$. Halla:

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. $A' \cap B'$
4. $B' - A$
5. $B \cup A'$
6. $A' \cup B'$
7. $(A \cup B) - B'$
8. $A' - (B' - A)$
9. $(B' - A') - (A \cap B)$
10. $(B \cap A') \cap (A - B)$

II. Indica y prueba en cuales de los siguientes casos, las proposiciones siguientes son equivalentes:

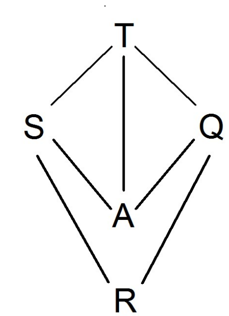
1. $x \in [A - (B \cup C')]'$, $x \in A \vee x \in B \vee x \in C$
2. $y \in [A \cap (A \cap B')]'$, $y \in (A \cap B)$
3. $A \subset (B - C)'$; $(x \in B \wedge x \notin C) \rightarrow x \notin A$

III. Si $U = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \leq x < 7\}$; $A = \{x \in \mathbb{Z} / 0 \leq x < 5\}$; $B = \{1, 3, 4\}$ y $C = \{x / x2 - 1 = 0\}$. Halla:

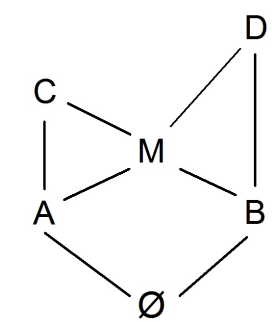
1. $(A \cup B) \cap C$
2. $A - (B \cup C)$
3. $B - (A \cup C)$
4. $A \Delta B$
5. $A' \Delta B'$
6. $[A' \cap (B \cap C)'] \Delta (B \cup C)$

IV. Expresa en diagrama de Venn – Euler:

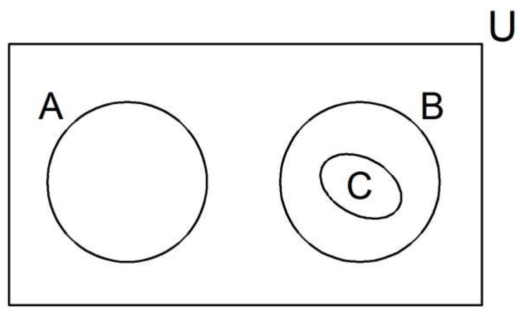
1.



2.



V. Para cada ejercicio dibuja un diagrama similar al de abajo, y sombrea de rojo el área resultante. Si el conjunto vacío es el resultante escríbelo:



1. $A \cup B$
2. $(A' \cap B') \cap C$
3. $A \cap (B \cup C)$
4. $A - B$
5. $B - C$
6. $(A \cup B) - C$

VI. Es necesario dividir dos cintas de 36 cm. y 48 cm. de longitud en pedazos iguales y de la mayor longitud posible, ¿Cuál será la longitud de cada pedazo?

VII. En un estudio de sangre ABO – grupos. 6000 personas se pusieron a prueba: 2527 tuvo el antígeno A, 2234 el antígeno B, y 1846 no antígeno. ¿Cuántas personas tenían dos antígenos?

VIII. Problema 1:

Los conjuntos A, B y C, tenían k, 3k y (k - 1) elementos, respectivamente. Además se considera que:

A y B tienen k/2 elementos comunes;
A y C tienen k/4, y
B y C tienen 2 elementos

Si existe un único elemento común a los tres conjuntos. Halla el número de elementos de:

$$[(A \cup B) - (A \cap B)] - C$$

Problema 2:

Se reparten juguetes de 3 tipos distintos: aviones, autos y trenes, entre 200 niños, de la siguiente manera:

70 niños se les entregaron aviones;
60 niños reciben autos;
20 niños reciben aviones y autos;
27 niños reciben autos y trenes pero no aviones;
3 niños reciben autos, trenes y aviones;
90 niños reciben únicamente trenes.

Se sabe además que los reciben únicamente autos y no otros juguetes son tantos como los que reciben aviones y trenes. ¿Cuántos niños reciben aviones y trenes pero no autos?

TERCERA AUTOEVALUACIÓN

I. Dados los conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{N} / x > 4 \rightarrow x = 6\}$
$B = \{x \in \mathbb{N} / \sim (x \geq 1 \rightarrow x^2 \neq 4x - 3)\}$
$C = \{x \in \mathbb{Z} / \sim (x \leq -2 \vee x > 3)\}$

Halla:

1. $C_A B$
2. $C_A(A \cap B)$
3. $C_B C_A(A \cap B)$
4. $C_{B \cap C}(A \cap B) \cup C_{A \cap B}(B \cap A)$
5. $(B' \cup C) \cap [A \Delta (B' - C')]$

II. Si $G \neq \emptyset$ / $G \subset (A \Delta B)$; y donde A y B son no comparables, $G \subset A$; cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

1. $x \in G \rightarrow x \in A$
2. $x \in G \rightarrow x \notin (A \cap B)$
3. $x \in A \rightarrow x \in G$
4. $x \in G \leftrightarrow x \in (A \cup B)$
5. $A \cap B \neq \emptyset \rightarrow B \cap G = \emptyset$
6. $A \cap G = \emptyset \rightarrow x \in (A \cap B)$
7. $A \subset G \rightarrow x \in (B \cap G)$
8. $x \notin G \rightarrow x \in (A \cap B)$

III. Dados los conjuntos $A \subset E$, $B \subset E$, $C \subset E$ y $U = \{x \in \mathbb{N} / x < 10\}$

Si $A' \equiv C_A = \{x \in U / x < 7\}$; $A \cup B = \{x \in U / x \leq 9 \wedge x > 2\}$;

$B \cup C = \{x \in U / x \leq 7\}$; $B \cap A = \{3\}$ y $A \cap C = A' \cap B' \cap C' = \emptyset$

Determina los conjuntos A, B y C.

IV. Representa en diagrama lineal y de Venn – Euler:

1. $A \supset C$; $C \subset D$; $A \subset D$; $A \subset E$; E y D son no comparables.
2. $P \subset Q$; $R \supset Q$; $S \supset Q$; $V \subset R$; $R \subset T$ y $T \supset S$.

V. 1. ¿Cuál es el m.c.d.?

a) 64, 40, 32
b) 25, 75

2. ¿Cuál es el m.c.m.?

a) 2, 3, 5, 10
b) 30, 50, 75

VI. Dados los conjuntos:

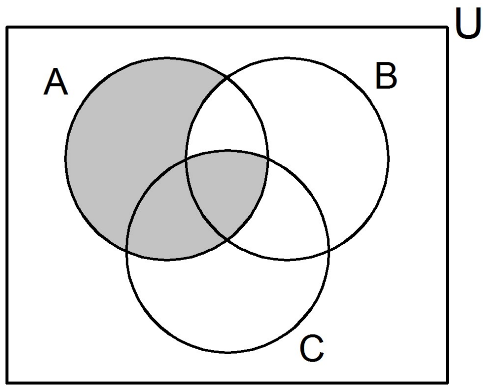
$A = \{x \in \mathbb{R} / -5 \leq x < 0 \ \vee \ 2 \leq x < 6\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 1 \ \vee \ 4 < x \leq 6\}$
$C = \{x \in \mathbb{Z} / \sim (x \leq -2 \vee x > 3)\}$

Halla:

1. $A \cap B$
2. $A - B$

3. $C_{A \cup B} \equiv (A \cup B)'$
4. $A \cup (B \cap A')$

VII. 1. Halla la expresión que representa la siguiente región sombreada:



2. Usando diagrama de Venn – Euler, representa gráficamente:

$$[R' \cap (S \Delta T)]'$$

VIII. Problema 1:

En una encuesta entre 300 personas sobre el partido político de su preferencia se obtuvo el siguiente resultado: 140 prefirieron al Partido Nacionalista Peruano (PNP); 90 al APRA; 115 a Unidad Nacional (UN); el número de personas que prefirieron a los 3 partidos es la quinta parte de los que prefieren al PNP; y un tercio de los que prefieren al APRA. El número de personas que sólo prefieren al PNP y al APRA es la cuarta parte de lo que prefieren sólo a UN. El número de personas que sólo prefieren al APRA y UN es la mitad de los que prefieren sólo al PNP y a UN. Halla:

1. ¿Cuántas personas prefieren un solo partido?
2. ¿Cuántos prefieren a los 3 partidos?
3. ¿Cuántos no prefieren a ningún partido?
4. ¿Cuántos al PNP sí y sólo sí a UN?

Problema 2:
Se considera un experimento aleatorio consistente en lanzar 3 monedas, si una moneda cae cara se anota uno, y si cae sello, se anota cero; forma el conjunto cuyos elementos sean los posibles resultados del experimento; luego determina por extensión los subconjuntos donde:

a) E_1 = se obtienen más caras que sellos.

b) E_2 = se obtienen al menos dos sellos.

c) E_3 = se obtiene el mismo resultado en las 3 monedas.

d) E_4 = se obtiene al menos dos caras.

e) E_5 = se obtienen dos sellos solamente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS DEL CAPÍTULO 2

1. BATSCHELET, Edward

   1998 Introduction to Mathematics for life Scientists.
   Second, edition-springer study edition-New York

2. BARNETT, Raymond

   1994 Pre cálculo: Álgebra, geometría analítica y trigonometría
   Limusa, México.

3. CERNA, R. S.

   2000 Ejercicios de Matemática I. Edit. San Marcos. Lima-Perú

4. ESLAVA E., María Emilia y VELASCO Q. José R.

   1997 Introducción a las Matemáticas Universitarias
   Edit. MC Graw-Hill, México.

5. LAZARO C. Moisés

   2005 Lógica y Teoría de Conjuntos.
   Edit. Moshera S.R.L. Lima – Perú.

6. LEPSCHUTZ, Seymour

   1990 Teoría de Conjuntos y temas afines.
   Edit. MC Graw-Hill, México.

7. ULLOA L. Antonio y HARO F., Luis

   1990 Matemática Básica – Texto Universitario.
   Ediciones “Sigma de X_n”. Lima, Perú.