INDICE

Unas palabras sobre Lógica Matemática y Conjuntos

Es importante que los profesores y estudiantes tengan una idea clara de las razones que fundamentan la elaboración de este libro.

Las matemáticas tienen un papel muy importante en la curricula de toda carrera universitaria en la cual se incluye estos dos temas en este libro.

Por lo tanto, es esencial un buen comienzo en el estudio de la **Lógica Matemática** y la **teoría de Conjuntos** para contar con bases firmes en los cursos posteriores.

Honestamente creo que este libro es fundamental en todas las especialidades cuyos programas de matemáticas están basados en la teoría Lógico – Conjuntista. Por ello es imprescindible un conocimiento cabal de la Lógica Matemática y Conjuntos. La primera, para darle característica de sistema lógico y la segunda como lenguaje de expresión.

El objetivo primordial es estructurar nuestra forma matemática de pensar y obtener un lenguaje que facilite la expresión de la misma.

El texto consta de dos capítulos: En ella se presenta la lógica porque juega un papel regulador de nuestra actividad mental, abstracción y el razonamiento deductivo y, la teoría de Conjuntos para sistematizar nuestra forma de pensar y para el desarrollo de la capacidad de análisis.

Dada la estructura de los capítulos y el enfoque didáctico utilizado, este libro puede emplearse de manera autodidáctica como libro de texto del curso de Matemática I que se dicta en todas las universidades de nuestro país. En cada capítulo se desarrollan los aspectos teóricos; se presentan ejemplos y problemas resueltos y, una actividad de aprendizaje con ejercicios propuestos con su solución para los ejercicios y problemas pares; esperando que sean de gran utilidad.

Sobre el rigor y la formalidad matemática quiero aclarar que fue mi intención revertir las explicaciones de dicha rigurosidad, ya que sabemos que en nuestra universidad se busca que el alumno se familiarice con la formalidad matemática. Invito a los profesores a trabajar este aspecto con sus alumnos con paciencia y moderación.

Finalmente, quiero dar las gracias a las personas que de alguna u otra forma han contribuido para que este proyecto se convierta en realidad. En particular al profesor Gustavo Reyes Carrera y a la Srta. Luzmila Flores Flores por la digitación del libro y la cuidadosa verificación de todos los ejemplos, solución de los problemas y la serie de ejercicios; al profesor Lizandro Reyna Zegarra por sus aportes en temas de Matemática aplicada, a la profesora Rosa Llanos Vargas por las sugerencias y uso de libros de matemática relacionadas a Ciencias de la vida y a mi señorita hija Liliana Elizabeth Cielo Iglesias por el constante apoyo en las traducciones del inglés al castellano de literatura matemática relacionada con este libro.

Por último agradezco a mi esposa Melva, por el apoyo que siempre me ha dado y a mis hijos Liliana y Ornar por su comprensión por el tiempo que no les dedique durante la preparación de este libro.

UNIDAD TEMÁTICA

1 *Lógica matemática*

INTRODUCCIÓN:

El hombre creativo: Premio al inventor del Ajedrez.

Lección 1: Enunciado, proposiciones, simbología de la lógica y valores de verdad.

Lección 2: Estudio de los conectivos lógicos: Negación de una proposición, conjunción de dos proposiciones y disyunción de dos proposiciones.

Lección 3: Negación de las proposiciones compuestas, la condicional o implicación y la bicondicional o doble implicación

Lección 4: Tablas de verdad y sus aplicaciones - Leyes lógicas

Lección 5: Cuantificadores

Lección 6: Argumentos Lógicos

Lección 7: Circuitos Lógicos

INTRODUCCIÓN

El estudio de las matemáticas se realiza a través de áreas que llamamos **estructuras o sistemas.** Entre otras podemos citar la aritmética, la geometría, los conjuntos, el álgebra, etc.

Todo sistema está constituido por términos indefinidos, términos definidos, axiomas o postulados y teoremas o proposiciones.

Los términos no definidos o primitivos son aquellos conceptos intuitivos o elementales tales como: punto, línea, etc.

Los términos definidos o simplemente definiciones son conceptos que requieren de una conceptualización formal para aclararlas, como por ejemplo: cardinalidad, conjunto finito, etc.

El axioma o postulado es cualquier hecho o dato aceptado como verdadero bajo el sistema matemático en consideración. Por ejemplo: los axiomas de la geometría euclidiana.

Por último, **los teoremas o proposiciones** son nuevos enunciados o afirmaciones que se deducen de los axiomas, cuyos contenidos se someten a demostración.

Estos conceptos son de importancia en cualquier sistema o estructura deductiva, por ejemplo **La lógica** juega un papel regulador de nuestra actividad mental, ya que mediante ella podemos determinar cómo un hecho puede resultar de otro, apegarse a la validez de un argumento o aceptar como ciertas nuevas proposiciones.

En esta unidad temática estableceremos **las reglas de La lógica matemática** creada por **Boole y Rusell,** que mediante símbolos establecen en lenguaje cotidiano las reglas de la lógica tradicional. Asimismo familiarizar a los estudiantes con técnicas de orden lógico, a fin de conducirlos a un hábil manejo del **lenguaje matemático** y al empleo de **métodos eficaces de razonamiento.**

EL HOMBRE CREATIVO

"PREMIO AL INVENTOR DEL AJEDREZ"

El Ajedrez es un juego de origen árabe que se da entre dos personas cada uno de los cuales dispone de 16 piezas movibles que se colocan sobre un tablero dividido en 64 casillas. Éstas piezas son: un rey, una reina, dos alfiles, dos caballos, dos roques o torres y ocho peones; las de un jugador se distingue por su color de las del otro, y no se marchan de igual modo las de diferentes clases. Gana quién da jaque mate al adversario. El jaque es un lance del Ajedrez en el cual un jugador, mediante el movimiento de una pieza, amenaza directamente al rey del otro, con obligación de avisarle. El jaque mate es el segundo lance que pone término al juego de Ajedrez.

Un rey persa fascinado por el juego de Ajedrez, quiso conocer y premiar al inventor, con lo que este solicitara.

El matemático oriental contestó: me conformo con un grano de trigo por la primera casilla de tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, y así doblando la cantidad hasta la casilla 64 del tablero.

Ordenó el rey a su visir (Ministro) que prepare lo solicitado, quién hizo los cálculos y se dio cuenta que era imposible cumplir la orden. Se necesitaría la cantidad $\mathbf{2^{64}}$ granos de trigo:

$\mathbf{2^{64}} = \mathbf{18_3\ 446\ 744_2\ 073\ 709_1\ 551\ 616}$ granos de trigo

Es decir, diez y ocho trillones, cuatrocientos cuarenta y seis mil setecientos cuarenta y cuatro billones, setenta y tres mil setecientos nuevos millones, quinientos cincuenta y un mil seiscientos dieciséis granos de trigo. En cada kilogramo de trigo cabe aproximadamente unos 28 220 granos, por lo que el resultado sería de unas 653 676 260 585 toneladas; que ocuparía un depósito en forma de cubo de algo más de 115 kilómetros de lado. Para producir tal cantidad de trigo se necesitaría estar cultivando la tierra (incluido los mares), durante ocho años.

LECCIÓN 1

ENUNCIADO, PROPOSICIONES, SIMBOLOGÌA DE LA LÓGICA Y VALORES DE VERDAD.

<u>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</u>

1. Identificar proposiciones.
2. Distinguir entre proposiciones simples y proposiciones compuestas.
3. Decidir el valor de verdad de proposiciones.
4. Determinar el conjunto solución de proposiciones.
5. Reconocer los símbolos de la lógica en proposiciones.
6. Escribir simbólicamente y expresar literalmente las proposiciones.

1.1 Enunciado

Denominaremos **enunciado** a toda frase u oración.

Ejemplos:

1. La bandera Peruana es roja y blanca.
2. 7 es número primo.
3. La matemática es útil en la resolución de problemas.
4. ¿Qué hora es?
5. $x + 5 = 9$
6. Fuera de aquí.
7. $2x + 5 < 3$
8. La UNS fue fundada en Lima.

1.2 Las proposiciones

Una **proposición lógica** es un enunciado declarativo que puede considerarse como falso o verdadero, pero no ambos a la vez.

Ejemplos:

1. El Perú es un país sudamericano.
2. El número 10 es divisible por 2.
3. Todos los herbívoros son invertebrados
4. 5 + 3 = 4
5. El poeta César Vallejo nación en el Perú.
6. La fiebre generalmente es causada por una infección interna.
7. Liliana es profesora.
8. El trapecio no es paralelogramo.

1.2.1. Características de las proposiciones.

Una proposición, no es cualquier enunciado, sino aquel al cual se le puede asignar un **valor de verdad:** V ó F. En ese sentido hay que tener presente las siguientes características de las proposiciones:

a) Enunciativas: Son aquellas proposiciones que atribuyen o rechazan algo del sujeto.

Ejemplos:

1. Omar es médico.
2. El automóvil es azul

b) Determinantes: Proposición que refiere a la característica del objeto.

Ejemplos:

1. Liliana es estudiosa.
2. El agua es incolora

c) Es una relación de términos: Por definición, un **término** es una palabra o grupo de palabras (o un símbolo) que usamos para referirnos a uno o varios objetos. Cuando el término se refiere a un solo individuo, se le llama **singular;** cuando se aplica a todos los individuos de una clase, se llama **general.**

Ejemplos:

1. Singulares: Vallejo, Mariátegui, 8, el sol, etc.
2. Generales: ciudad, hombre, número entero, satélite, etc.

d) Es verdadera o falsa: Hay proposiciones de lo que en este momento no podemos saber si son verdaderos o falsos pero son potencialmente verificables o falsables.

Ejemplos:

1. Existen seres vivos en la estrella de Alfa Centauri. De este enunciado no podemos decir que sea verdadero o falso en este momento ya que primero habría que comprobar si hay o no hay vida en esta estrella a años luz de distancia de nuestro planeta.
   Sin embargo es posible comprobarlo una vez que poseamos los medios adecuados.
   En este sentido dicho enunciado es potencialmente contrastable y por tanto es una proposición.
2. Ayer fue miércoles.

Observaciones:

i. No son proposiciones:
   - Las preguntas.
   - Las creencias, mitos o leyendas.
   - Las metáforas o refranes.
   - Las supersticiones.
   - Los hechos de la literatura o personajes ficticios.
   - Hechos discutibles; la moral, los valores, la belleza, etc.
   - Los mandatos.

- Las interjecciones.
- Los deseos.
- Las dudas.

ii. Son proposiciones lógicas:
- Las fórmulas científicas ya demostradas.
- Enunciados cerrados o definidos.
- Las oraciones: informativas, descriptivas, explicativas (causa – efecto)

1.2.2. Clasificación de proposiciones.

Las proposiciones se clasifican en simples o atómicas, abiertas y compuestas o moleculares.

a) Proposiciones simples: Llamadas también atómicas o elementales, son enunciados que tiene un solo sujeto y un solo predicado. No posee conectivo lógico.

Ejemplos:

1. Los ángulos suplementarios miden 180°.
2. Soy peruano.
3. Tengo 20 años.
4. Melva tiene anemia.
5. Chimbote es un puerto.
6. $9 + 7 = 16$
7. $2 < 8$
8. La Enterocolitis es una enfermedad intestinal.

b) Proposiciones abiertas: Son aquellas en donde interviene una variable y no es posible determinar inmediatamente si es falsa o verdadera. En su lugar debemos determinar un **Conjunto Solución (CS)** con aquellos elementos que sustituyendo en la variable hagan verdadero el enunciado de la proposición.

Unidad 1 / Lógica matemática

Ejemplos:

1. x es un número par, $x \in \mathbb{N}$	$CS = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$
2. $y - 3 = 5$	$CS = \{8\}$
3. x es un número primo, $x < 10$	$CS = \{2, 3, 5, 7\}$
4. z es múltiplo de 3	$CS = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$
5. $x^2 = -16$, $x \in \mathbb{N}$	$CS = \emptyset$
6. Los divisores de 29	$CS = \{1, 29\}$
7. $x + y = 15$	CS: $x = 8$, $y = 7$
8. $x + y + z = 12$	CS: $x = 2$, $y = 6$, $z = 4$

Obsérvese que las proposiciones abiertas son de la más gran importancia en la matemática, pues casi la totalidad de enunciados matemáticos (problemas) involucran una o más variables.

c) Proposiciones compuestas: Llamadas también moleculares o coligativas, son aquellas que están enlazadas por dos o más proposiciones simples.

Ejemplos:

1. Liliana es profesora y Omar es médico.
2. Si estudio ahora entonces aprobaré mañana.
3. Dos es par y menor de veinte.
4. El oxígeno es gaseoso o líquido.
5. No es el caso que aquél señor sea mi padre.
6. Si un número es par entonces es múltiplo de 4.
7. La Enterocolitis es una enfermedad intestinal si, y sólo si es una inflamación al colon.
8. Aplicamos una política económica neoliberal ortodoxa o aplicamos una política económica mixta.

1.3 Simbología de la lógica y valores de verdad

Dada las proposiciones:

"El ángulo que describe una circunferencia mide 360°"
"x es un número primo"
"3 es divisor de 21"

Se pueden simbolizar con una letra:

p = El ángulo que describe una circunferencia mide 360°

q = x es un número primo

r = 3 es divisor de 21

y no es necesario leer todo el contenido. Basta con hacer referencia a la letra p ó q para saber que nos estamos refiriendo a una proposición. Al analizar los valores de verdad de una proposición simple, podemos observar que puede ser verdadera o falsa.

Para el caso de las proposiciones compuestas, se puede expresar:

"Ceno y veo televisión"	"p y q"
"Tomo el colectivo o la combi"	"s ó t"
"Si tengo dinero, entonces compro un libro"	"Si r entonces t"
"Estudio si y sólo sí, tengo deseos de superación"	"m si, y sólo si, n"

Simbolizando las proposiciones compuestas:

- "p y q" $p \wedge q$
- "s ó t" $s \vee t$
- "si r entonces t" $r \rightarrow t$
- "m si, y sólo si, n" $m \leftrightarrow n$

Los símbolos que unen las proposiciones simples se denominan **conectivos lógicos** y sus nombres y símbolos correspondientes son:

conjunción……………………………… y …………………… $\wedge$

disyunción…………………………..….. o …………………… $\vee$

condicional…………...…. si ……… entonces …………….... $\rightarrow$

bicondicional……………..…. si, y sólo si, …..……….…….. $\leftrightarrow$

Cuando tratamos una proposición compuesta, los posibles valores de verdad de dos proposiciones serán:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Los posibles valores de verdad para tres proposiciones son:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

En general podemos decir que el número de combinaciones de valores de verdad serán $\mathbf{2^n}$, en donde **n** es el número de proposiciones.

1.4 Ejercicios resueltos

A. En los siguientes enunciados decir cuáles son proposiciones y cuáles no.

1. Buenas noches
2. ¡Qué tal!
3. ¿Cómo estás?
4. x + y = 3
5. 9 + 4 = 8
6. Estudia mucho
7. x – y > 4
8. Ollanta Humala es menos anti-imperialista
9. La ballena es un cetáceo
10. Cleopatra fue una mujer muy bella
11. ¡Fuera de aquí!
12. 2 es un número par
13. El hábito no hace al monje

Solución:

1. No es proposición
2. No es proposición
3. No es proposición
4. Es un enunciado abierto y que al sustituirlo por valores concretos como x = 1, y = 2 dan origen a una proposición abierta
5. Es proposición
6. No es proposición
7. Es un enunciado abierto y que al sustituirlo por valores concretos como x = 8, y = 2 dan origen a una proposición abierta
8. Es proposición
9. Es proposición
10. Es proposición

Unidad 1 / Lógica matemática

11. No es proposición
12. Es proposición
13. No es proposición

B. En las siguientes proposiciones simples, ¿cuáles son verdaderos y cuáles son falsos?

1. Los perros son mamíferos
2. Chimbote es la capital del departamento de Ancash
3. El hombre es vivíparo
4. 5 es par
5. 35 es múltiplo de 7
6. 4 + 0 = 4
7. Los alumnos son parte del mobiliario
8. 17 es un número primo
9. La tierra es el único satélite natural
10. Los gatos son roedores
11. Las suma de los ángulos internos de todo triángulo es 180°
12. El foco fue inventado por Tomás Alva Edinsón
13. El padre de la lógica es Aristóteles
14. El teorema de Pitágoras afirma que la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los catetos al cuadrado respectivamente
15. Un número es múltiplo de tres si la suma de sus cifras es nueve o múltiplo de 9
16. El padre de la medicina es Hipocrátes
17. La ley de cosenos y la ley de senos se cumple para todo triángulo rectángulo
18. El mundo es ancho y ajeno fue escrito por Ciro Alegría
19. El poema del mio Cid fue escrito por Lope de Vega
20. El 12 de octubre de 1532 fue el descubrimiento de América
21. Lima fue fundada el 15 de junio de 1721
22. María Parado de Bellido fue esposa de Manco Inca
23. El último Virrey fue La Cerna

24. El vals "La flor de la canela" fue escrito por Felipe
25. La guerra del Pacífico fue entre Perú y Ecuador
26. Blasco Nuñez de Vela fue quién descubrió el océano Atlántico
27. En nuestro planeta tierra existen 6 continentes
28. Julio C. Tello descubrió las ruinas de Macchu Picchu
29. La teoría que sostiene que el hombre proviene de Oceanía fue sustentada por Max Hule
30. La Universidad Nacional del Santa pertenece a Huaraz

Solución:

1. Verdadero	11. Verdadero	21. Falso
2. Falso	12. Verdadero	22. Falso
3. Verdadero	13. Verdadero	23. Verdadero
4. Falso	14. Verdadero	24. Falso
5. Verdadero	15. Falso	25. Falso
6. Verdadero	16. Verdadero	26. Falso
7. Falso	17. Falso	27. Verdadero
8. Verdadero	18. Verdadero	28. Falso
9. Falso	19. Falso	29. Verdadero
10. Falso	20. Falso	30. Falso

C. Da el conjunto solución de las siguientes proposiciones. El conjunto universal son los números Naturales $\mathbb{N}$**.**

1. $x < 4$
2. $2x - 10 = 0$
3. x es múltiplo de 3
4. $x^2 = -16$
5. $x^3 = -27$
6. $2 < x < 5$
7. $x - 4 < 1$
8. $\sqrt{x} = 2$
9. Los número impares menores que 12
10. x es primo

Solución:

1. CS = {1, 2, 3}
2. CS = {5}
3. CS ={3, 6, 9, 12, …}
4. CS = $\emptyset$
5. CS ={-3}
6. CS ={3, 4}
7. CS ={1, 2, 3, 4}
8. CS ={4}
9. CS ={1, 3, 5, 7, 9, 11}
10. CS ={2, 3, 5, 7, …}

D. Simbolice las siguientes proposiciones:

1. La leche es agradable a menos que se le agregue azúcar
2. Qué un cuadrilátero tenga cuatro lados iguales es una condición suficiente para que sea un cuadrilátero
3. Qué dos lados de un triángulo sean congruentes, es una condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea isósceles
4. No es cierto que, la Enterocolitis sea enfermedad intestinal e inflamación al colon
5. Enterocolitis es una enfermedad intestinal o no es inflamación al colon
6. Si la Enterocolitis no es una enfermedad intestinal entonces no es una inflamación al colon

Solución:

1. Se puede expresar como: "Si no añadimos azúcar, entonces la leche es agradable": simbólicamente se representa: $\sim p \rightarrow q$
2. $p \rightarrow q$
3. $p \leftrightarrow q$
4. $\sim p \wedge q$

5. $p \vee \sim q$
6. $\sim p \rightarrow \sim q$

E. Dada las proposiciones:

p: La fiebre es riesgosa

q: La fiebre generalmente es causada por una infección interna

r: Programar nuestras actividades de trabajo no es importante

s: Programar nuestras actividades de trabajo es positivo

Escribir literalmente:

1. $p \rightarrow q$
2. $s \wedge t$
3. $\sim p \rightarrow \sim q$
4. $\sim p \vee \sim q$
5. $s \wedge \sim r$
6. $\sim s \wedge \sim r$

Solución:

1. La fiebre es riesgosa puesto que es causada por una infección interna
2. Programar nuestras actividades de trabajo es positivo pero no importante
3. No es cierto que la fiebre sea riesgosa ya que no es causada por una infección interna
4. La fiebre no es riesgosa o no es causada por una infección interna
5. Programar actividades de trabajo es positivo e importante
6. No es cierto que no programar actividades de trabajo sea positivo cada vez que es importante

1.5 Actividad de Aprendizaje

A. Identificación de proposiciones:

Señale cuál de los siguientes enunciados son proposiciones:

1. Omar es bueno
2. ¡Fuego!
3. El príncipe de Gales
4. Juan Pablo
5. Son las 8 pm
6. Melva es bonita
7. Es un estudiante
8. Cierra la puerta
9. El río que cruza el Santa
10. La olimpiada de Beijing
11. El cubo de tres
12. $2x + y > 16$
13. El solitario de Sayán
14. “Gato” es un animal
15. El manco de Lepanto
16. Dos más cinco es igual a siete
17. Liliana, ¿en qué curso te has matriculado?
18. Prohibido hacer bulla
19. $x^2 < 4y$
20. todas las gallinas son aves

B. Distinción entre proposiciones simples y proposiciones compuestas:

Señale cuál de los siguientes enunciados son proposiciones simples y cuáles compuestas o moleculares:

1. Ayer fue viernes por lo tanto hoy es sábado
2. 16 es un número par

3. Omar y Liliana son hermanos
4. Melva estuvo ayer en casa
5. Aurora es mayor que Adela o Adela es mayor que María
6. Aceptaré el trabajo únicamente si me pagan lo que pedí
7. No es tarde
8. Me han dicho que David Ricardo no escribió El Capital
9. Hernando de Soto es autor de El misterio de capital y de sendero
10. El valor se mide por la cantidad de trabajo acumulado y la cantidad de trabajo acumulado se mide a través de la cantidad del esfuerzo realizado entre el tiempo transcurrido

C. Decisión del valor de verdad de las proposiciones:

Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

1. $5 \neq 3 + 2$
2. No es cierto que 3 es mayor que 12
3. Un triángulo tiene 4 lados
4. No todo número natural es par
5. Algunos pares son primos
6. Ningún par es múltiplo de 3
7. 9 es un número primo
8. El cuadrado de un número natural es mayor que el número natural
9. 7 divide a 23
10. El trapecio no es un paralelogramo

D. Determinación del conjunto solución de las proposiciones:

Dar el conjunto solución de las siguientes proposiciones, $x \in \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$:

1. $10 \leq x \leq 15$
2. $x < 4$ ó $x > 16$
3. Los múltiplos de 7 que sean pares
4. $x \geq 14$ e impar
5. Los números que sean cuadrados o cubos
6. Los números compuestos

7. Los pares menores que 20
8. x no es múltiplo de 3 y $x \leq 5$
9. Los números que son múltiplos de 3
10. Los números divisibles entre 2

E. Reconocimiento de los signos del lenguaje de la lógica.

Simboliza y determina el valor de verdad:

1. La hierba es verde pero el cielo es azul
2. La matemática es bonita o no soy un buen estudiante
3. Los sueldos no son elevados y los precios son altos
4. Es cierto que la Enterocolitis sea una enfermedad intestinal entonces es una inflamación al colon

1.6 Clave de Respuestas

A. Identificación de proposiciones:

2. Enunciado	4. Enunciado	6. Proposición
8. Enunciado	10. Enunciado	12. Enunciado abierto
14. Proposición	16. Proposición	18. Enunciado
20. Proposición		

B. Distinción entre proposiciones simples y proposiciones compuestas:

2. Prop. simple	4. Prop. simple	6. Prop. compuesta
8. Prop. compuesta	10. Prop. compuesta	

C. Decisión del valor de verdad de las proposiciones:

2. Verdadero	4. Verdadero	6. Falso
8. Falso (uno no cumple con esta proposición)		10. Verdadero

D. Determinación del conjunto solución de las proposiciones:

2. {10, 11, 12, 13, 14, 15} 4. {15, 17, 19}
8. {4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18} 8 y 10 queda para el estudiante

E. Reconocimiento de los signos del lenguaje de la lógica.

2. $p \vee \sim q$ (V) 4. $p \wedge q$ (F)

> ***"La gran diferencia entre el hombre creativo y el que no lo es, es que en éste, la lógica controla su mente y en aquél, la lógica se encuentra al servicio de la mente"***

LECCIÓN 2

ESTUDIO DE LOS CONECTIVOS LÓGICOS: NEGACIÓN DE UNA PROPOSICIÓN, CONJUNCIÓN DE DOS PROPOSICIONES Y DISYUNCIÓN DE DOS PROPOSICIONES.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Formalizar correctamente la negación, la conjunción y la disyunción de proposiciones.
2. Decidir el valor de verdad de proposiciones lógicas a través del uso del negador, el disyuntor y el conjuntor.
3. Aplicar técnicas formales de simbolización de proposiciones simples y compuestas.

2.1 Estudio de los conectivos lógicos

2.1.1. Características de las proposiciones.

a) **Negación interna:** Se caracteriza fundamentalmente por su carácter débil, sólo afecta a la proposición simple más cercana. Se usa anteponiendo la frase: "No p", "nunca p", "jamás p".

b) **Negación externa:** Son de carácter más fuerte que la negación interna, generalmente se encuentra delante de la oración, es por ello que su representación queda indicada explícitamente fuera de un paréntesis. Se forma intercalando la palabra: "No es cierto que", "Es mentira que", "es objetable que".
El símbolo "∼" se emplea para indicar la negación, tanto para la interna como para la externa, de la proposición; así "$\sim p$" significa la negación de p.

Nota 1. Existen otras formas de indicar la negación de una proposición por términos sinónimos, como:

Es incompatible que *p*

Es inconcebible que *p*

No ocurre que *p*

No es verdad que *p*

No es el caso que *p*

No acaece que *p*

Es inadmisible que *p*

De ninguna forma se da *p*

En forma alguna *p*

Carece de todo sentido *p*

De ningún modo *p*

En modo alguno *p*

Es incorrecto que *p*

Es incierto que *p*

Nadie que sea *p*

Es absurdo que *p*

Es falso que *p*

Es refutable que *p*

Es falaz que *p*

Nota 2. Recuerda que la negación afecta únicamente a los términos que están a su derecha. Para ello a la negación se le denomina también “conector monádico”

Ejemplos:

i. Dar la negación de las siguientes proposiciones simples:

1. p: un ángulo recto mide 90° (V)

$\sim p$: un ángulo recto no mide 90° (F)

2. p: $5 < 13$ (V)

$\sim p$: $5 \nless 13$ (F)

Observe que al negar la proposición, p cambia su valor de verdad. Así podemos concluir de una manera general la tabla de valores de verdad de la negación de una proposición simple:

p	$\sim p$
V	F
F	V

ii. Dar la negación de la siguiente proposición abierta:

p: x es un múltiplo de 3

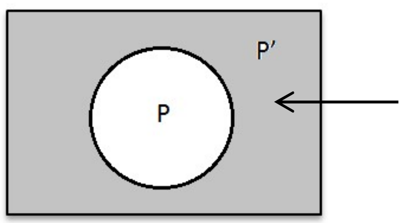
La solución de p resulta ser P = {3, 6, 9, 12, 15,…}

$\sim p$: x no es un múltiplo de 3

La solución es P' = {1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14,…}

Observe que cuando se trata de la negación de una proposición abierta, primero buscamos el conjunto solución. La negación de la proposición corresponderá a los elementos que no están en el conjunto o sea a su complemento.

En un diagrama de Venn – Euler, se representa:



Los elementos que no están en P

iii. Doble negación: Dar la negación de la negación de:

q: Un rombo es un paralelogramo (V)

$\sim q$: Un rombo no es un paralelogramo (F)

La negación de la negación resulta ser:

$\sim (\sim q)$: Es falso que un rombo no es un paralelogramo (V)

Obsérvese que el valor de verdad de la última proposición es el mismo que la proposición original. Por lo tanto, de acuerdo con el esquema lógico de la negación, la tabla de valores de verdad de la doble negación establece:

p	$\sim p$	$\sim (\sim p)$
V	F	V
F	V	F

2.1.2. Conjunción de dos proposiciones.

La conjunción es la proposición compuesta que resulta de ligar dos proposiciones simples mediante la palabra "**y**". Si las dos proposiciones son $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$, entonces su conjunción se escribe simbólicamente $\boldsymbol{p \wedge q}$.

Algunas veces se usan algunas palabras que suelen sustituir al conjuntor "**y**", como:

p aunque q

p pero q

p sin embargo q

p incluso q

p es compatible con q

p así como q

p del mismo modo q

p aun cuando *q*

p también *q*

p de la misma forma que *q*

p al igual que *q*

Tanto *p* como *q*

Siempre ambos *p* con *q*

p no obstante *q*

No sólo *p* sino también *q*

p al igual que *q*

p a pesar de *q*

p a la vez *q*

p más *q*

p con *q* las dos a la vez

La regla de la conjunción $p \wedge q$, afirma:

i) La connotación lógica implica la idea de satisfacer ambas afirmaciones de las proposiciones; por lo tanto, la tabla de verdad de la conjunción sólo es verdadera si ambas proposiciones son verdaderas.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplos:

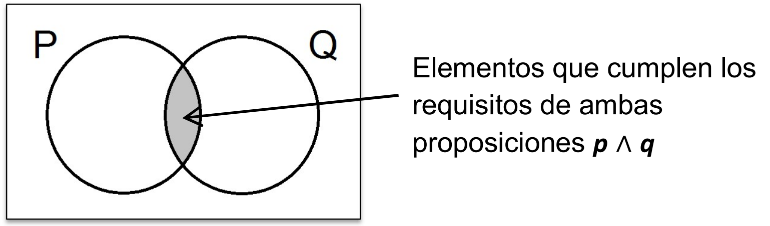
Encuentre el valor de verdad:

1. 25 es impar y múltiplo de 5.
2. Omar tiene anemia pero no visita el hospital.

La proposición 1 es verdadera, ya que ambas proposiciones simples son verdaderas. En la proposición 2, una es verdadera y la otra falsa; por lo tanto la conjunción es falsa.

ii) La conjunción de dos proposiciones abiertas es verdadera, para ya que aquellos elementos que hacen que ambas proposiciones sean verdaderas.

En un diagrama de Venn – Euler, se representa:



Ejemplos:

Si $x \in \mathbb{N}$, da el conjunto solución de:

1. $x < 7 \wedge x \geq 4$.
   CS = {4, 5, 6}; sólo los elementos que cumplen con ambas proposiciones.
2. x es par y menor que 10
   CS = {2, 4, 6, 8}; sólo elementos pares que cumplen con ambas proposiciones.

2.1.2. La Disyunción de dos proposiciones.

a) **Disyunción Débil o Inclusiva:** El "**o**" lógico de la disyunción inclusiva es verdadera cuando por lo menos una de las proposiciones es verdadera, resultando falsa solamente cuando la dos proposiciones son falsas. Se representa simbólicamente $p \vee q$.

La tabla de valores de verdad será:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplos: Da el valor de verdad para:

1. "7 es primo o par"
   Es verdadero ya que 7 es primo y basta para que la disyunción sea verdadera.
2. La fiebre es riesgosa o es causada por una infección interna.
   Es verdadera ya que cumple con una proposición, lo cual es suficiente.

Unidad 1 / Lógica matemática

Algunas veces se usan algunas palabras que suelen sustituir al disyuntor inclusivo "**o**", como:

p a menos que *p, q*

p salvo que *q*

p excepto que *q*

p o también *q*

p o bien *q*

p a no ser que *q*

p o incluso *q*

Al menos uno de los dos también *p* o *q*

p o sino *q*

p alternativamente *q*

b) **Disyunción Fuerte o Exclusiva:** En el lenguaje cotidiano algunas veces nos referimos a la disyunción en el sentido excluyente, como sucede en el "**o**" del menú del restaurante donde sólo sirven té o café pero no ambos. Es decir, es verdadera cuando solamente una de las dos proposiciones es verdadera y no las dos proposiciones, resultando falsa en otros casos. Su símbolo es "$\underline{\vee}$".

La tabla de valores de verdad será:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplos: Da el valor de verdad para:

1. César Vallejo escribió “El Sexto” o escribió “Trilce”.
   Es verdadero ya que Vallejo escribió “Trilce”.
2. O el general José de San Martín nació en Argentina o nació en el Perú.
   Es verdadera porque José de San Martín nació en Argentina.

Las siguientes palabras equivalen al disyuntor exclusivo:

O bien *p* o bien *q*

p a menos que solamente *q*

p salvo que únicamente *q*

p excepto que sólo *q*

A menos sólo *p, q*

p o bien necesariamente *q*

p o exclusivamente *q*

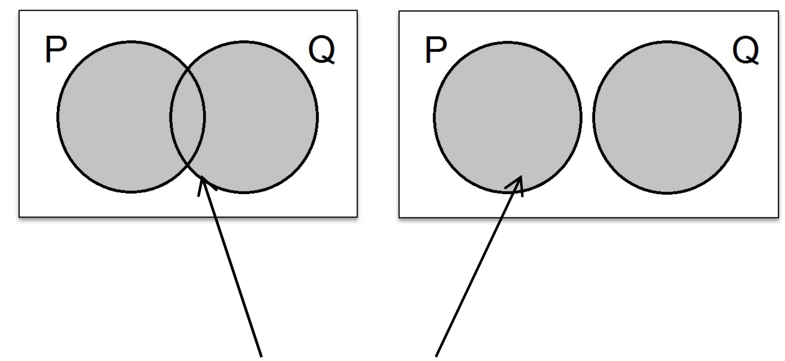
p no es equivalente a *q*

p no es idéntico a *q*

p no es lo mismo que *q*

c) **La disyunción Inclusiva** de dos proposiciones abiertas es verdadera para aquellos elementos que hacen que al menos uno de ellos sea verdadera.

En un diagrama de Venn – Euler, se representa:



Elementos que cumplen cuando menos con una u otra proposición $p \vee q$

Ejemplos:

Si $x \in \mathbb{N}$, da el conjunto solución de:

1. $x > 4$ o $x < 2$.
   CS = {1, 5, 6, 7, 8, 9, 10,…}. Estos elementos cumplen cuando menos con una de las dos proposiciones.

2. x es par o mayor que 6
   CS = {2, 4, 6, 7, 8, 9,…}; cabe preguntarse ¿porque el 7 es un elemento de la solución? Porque es mayor que 6 y con eso basta. Lo mismo sucede con los demás elementos de la solución que cuando menos cumple con una proposición.

2.1.2 Ejercicios resueltos

A. Escribe la negación de las siguientes proposiciones:

1. Ocho es mayor que cinco.
2. 3 = 6
3. Es falso que un triángulo tenga cuatro lados.
4. Liliana no estudia matemática.
5. La pizarra es negra.
6. (3) (6) $\neq$18
7. 33 es número compuesto.
8. 363 no es divisible entre 11
9. 81 es el cubo de 3
10. No es cierto que 9 es un número primo.

Solución: Recuerda que hay varias formas de negar las proposiciones:

1. "Ocho no es mayor que cinco" ó "$8 \ngtr 5$"
2. "No es cierto que 3 = 6" ó "$3 \neq 6$"
3. "Es falso que un triángulo no tenga cuatro lados" o "Es cierto que un triángulo tiene cuatro lados"
4. Liliana estudia matemática.
5. No es cierto que la pizarra es negra.
6. (3) (6) = 18
7. 33 no es un número compuesto.
8. 363 es divisible entre 11
9. 81 no es el cubo de 3
10. 9 es un número primo.

B. Hacer la negación y da el conjunto solución, x $\in \mathbb{N}$

1. Los números mayores que 7.
2. Los números que no son menores que 10.
3. Los pares menores que 12.
4. Los números que no son múltiplos de 3.
5. No es cierto que x está comprendido entre 1 y 20.

Solución: Primero obtenemos el conjunto solución de cada proposición:

CS_1 = {8, 9, 10, 11, 12, 13,…}
CS_2 = {10, 11, 12, 13, 14, 15,…}
CS_3 = {2, 4, 6, 8, 10,…}
CS_4 = {1, 2, 4, 5, 7, 8, 10,…}
CS_5 = {1, 20, 21, 22, 23,…}

Luego la negación con su solución será:

1. "Los números que no son mayores que 7" corresponde al complemento cuya solución es {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
2. "Los números que no son menores que 10", porque la negación de la negación es su afirmación. Su solución es {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
3. "Los pares que no son menores que 12". Su solución {1, 3, 5, 7, 9, 11} que corresponde al complemento.
4. "Los números que son múltiplos de 3", porque la negación de la negación es su afirmación. Su solución es {3, 6, 9, 12,…}
5. "x está comprendido entre 1 y 20". Su solución {2, 3, 4, 5, … ,19} que corresponde al complemento.

C. Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

1. 2 es divisor de 9 y de 20
2. 19 es primo e impar
3. 15 = 4 ó 15 es múltiplo de 3
4. 16 es compuesto o par
5. 26 no es par o no es impar

Solución:

1. Sólo una resulta ser verdadera, por lo tanto, la conjunción es falsa.
2. Verdadero: la conjunción sólo con las dos proposiciones verdaderas resulta ser verdadera.
3. Verdadera; para la disyunción basta que se cumpla una proposición.
4. Verdadera, ya que se trata de una disyunción y basta con que una sea verdadera.
5. La primera proposición es falsa y la segunda verdadera, por lo tanto la disyunción es verdadera.

D. Dadas las proposiciones:

p: Omar lee

q: Liliana escucha

Escribe en forma literal y simbólica, cada uno de los siguientes enunciados:

1. Disyunción de la primera con la negación de la segunda.
2. Negación de la primera en conjunción con la negación de la segunda.
3. Negación de la disyunción de la segunda con la primera.
4. Conjunción de la primera con la negación de la disyunción de la primera con la segunda.

Solución:

1. Omar lee o Liliana escucha $(p \vee \sim q)$
2. Omar no lee y Liliana no escucha $(\sim p \wedge \sim q)$
3. No es verdad que, Omar lee o Liliana escucha $\sim (p \vee q)$
4. Omar lee y no es verdad que, Omar lee o Liliana escucha.
   $[p \wedge \sim (p \vee q)]$

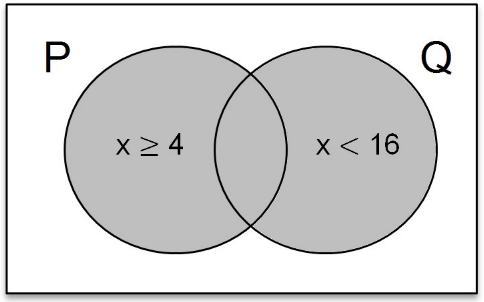
E. Si x ∈ {1, 2, 3,…,20}, encuentra el Conjunto Solución y grafica usando diagramas de Venn – Euler:

1. $x \geq 4$ ó $x < 16$
2. $x < 4$ y $x \geq 9$
3. $2 \leq x < 18$
4. x es par y divide a 20
5. x es impar o múltiplo de 3

Solución:

1. Considere: P = {4, 5, 6, … ,20}
   Q = {1, 2,…,15}

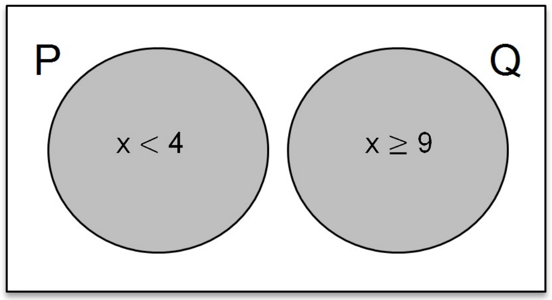
   Por tanto:
   $P \cup Q = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$



2. Sea: P = {1, 2, 3}
   Q = {9, 10, 11,…,20}

   Se observa que no existen elementos que cumplan con ambas proposiciones.

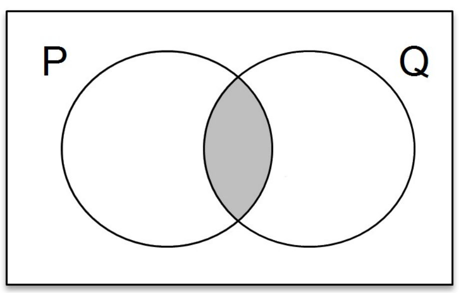
   Es decir, $P \cap Q = \emptyset$



3. $2 \leq x < 18$ es equivalente a $x \geq 2 \wedge x < 18$

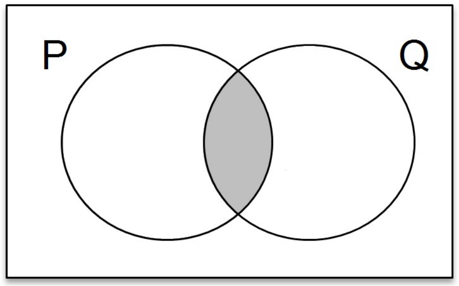
   Considere: P = {2, 3, 4,…., 20}
   Q = {1, 2, 3, 4,…,17}

   Por tanto:
   $P \cap Q$ = {2, 3, 4,…,17}



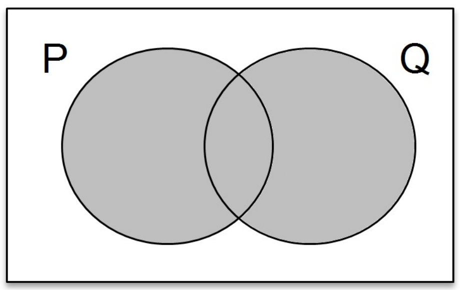
4. Sea: P = {2, 4, 6, 8,…,20}
   Q = {1, 2, 4, 5, 10, 20}

   Por tanto:
   $P \cap Q$ = {1, 2, 4, 5, 10, 20}



5. Considere: P = {1, 3, 5, 7,…,19}
   Q = {3, 6, 9, 12, 15, 18}

   Por tanto:
   $P \cup Q$ = {1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19}



2.1.3 Actividad de Aprendizaje

A. Escribe la negación de las siguientes proposiciones. Dar el valor de verdad de ellas.

1. El pentágono es un polígono.
2. El cuadrado no es un círculo.
3. 660 es divisible entre 11.
4. 84 no es múltiplo de 6.
5. La cardinalidad es una operación con conjuntos.
6. La nieve es blanca.
7. A veces llueve.
8. Siempre hay continuidad.

B. Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

1. El cuadrado es rombo y rectángulo.
2. El trapecio es polígono o paralelogramo.
3. La risa es el mejor reflejo de un estado de ánimo positivo o es una saludable terapia para prevenir enfermedades.
4. El triángulo no es paralelogramo ni es poliedro.
5. Existen niños traviesos y no buenos.
6. El cubo de 5 es 125 ó su cuadrado es 36.
7. No es cierto que estudiemos y no aprobemos.
8. Los sueldos no son elevados y los precios son altos.
9. O me pongo a estudiar como un loco o, salgo de paseo.

C. Considera las dos proposiciones:

p: Omar vive en Nuevo Chimbote.

q: Omar juega fútbol.

Expresa las siguientes proposiciones en forma simbólica.

1. Omar vive en Nuevo Chimbote y juega fútbol.
2. Omar vive en Nuevo Chimbote o juega fútbol.
3. Omar no juega fútbol.

Unidad 1 / Lógica matemática

4. No es cierto que, Omar vive en Nuevo Chimbote y juegue fútbol.
5. Omar no vive en Nuevo Chimbote ni juega fútbol.

D. Dada las proposiciones:

p: x es el cuadrado de un número natural.

q: x es múltiplo de 4.

U = {1, 2, 3, 4,…,20}

1. Haz la negación de la proposición p y elabora el conjunto solución.
2. Haz la disyunción y el conjunto solución.
3. Haz la conjunción y el conjunto solución.
4. Haz la negación de la disyunción y elabora el conjunto solución.
5. Haz la negación de la conjunción y elabora el conjunto solución.

E. Considera las proposiciones:

p: Los gatos son agradables.

q: Los perros corren de prisa.

r: Me gustan los conejos.

Escribir literalmente las siguientes proposiciones:

1. $(p \wedge q) \vee r$
2. $(p \vee q) \wedge \sim r$
3. $(\sim p \vee \sim q) \wedge r$
4. $\sim p \wedge \sim r$
5. $\sim p \vee \sim q$

F. Dar la solución de las siguientes proposiciones; donde x ∈ {1, 2, 3,…,16} y grafica usando Diagramas de Venn – Euler.

1. $8 < x < 12$
2. $x > 7$ y $x > 10$
3. $x \leq 6$ ó $x > 11$
4. $x > 4$ ó $x > 8$
5. x es divisor de 7 y 8
6. $9 \leq x \leq 14$
7. x es un número primo ó x es el cuadrado menor que 16.
8. x es múltiplo de 3 ó 4.

2.1.4 Clave de Respuestas

A. Escribe la negación de las siguientes proposiciones. Dar el valor de verdad de ellas.

2) Es falso que el cuadrado no es círculo ó el cuadrado es un círculo. (F)
4) 84 es múltiplo de 6 (V)
6) No es verdad que la nieve es blanca (F)
8) La cardinalidad no es una operación con conjuntos. (V)

B. Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

2. Verdadero 4. Verdadero 6. Verdadero
8. Verdadero

C. Considera las dos proposiciones:

2. $p \vee q$ 4. $\sim (p \wedge q)$

D. Dada las proposiciones:

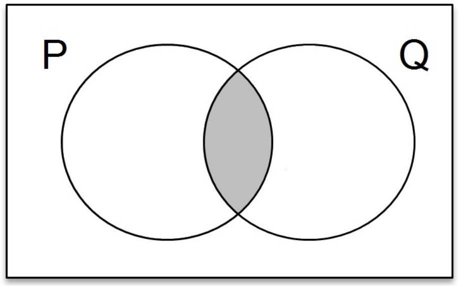
2. La solución es {1, 4, 8, 9, 12, 16, 20}. Estos elementos cumplen cuando menos con una de la dos proposiciones.
4. La negación de la disyunción es el complemento de la parte (2); es decir, {2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19}.

E. Considera las proposiciones:

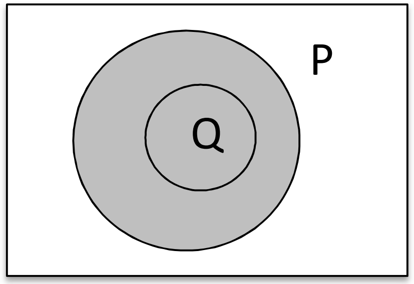
2. Los gatos son agradables y los perros corren de prisa, o me gustan los conejos.
4. No es cierto que, los perros corren de prisa o me gustan los conejos.

F. Dar la solución de las siguientes proposiciones; donde x ∈ {1, 2, 3,…,16} y grafica usando Diagramas de Venn – Euler.

2. $P \cap Q = \{12, 13, 14, 15, 16\}$



4. $P \cup Q = \{5, 6, 7, 8, 9,\ldots,16\}$



6 y 8 quedan para el estudiante

“Un hombre sin imaginación, es como un pájaro sin alas”

LECCIÓN 3

NEGACIÓN DE LAS PROPOSICIONES COMPUESTAS, LA CONDICIONAL O IMPLICACIÓN Y LA BICONDICIONAL O DOBLE IMPLICACIÓN.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Aplicar Leyes de Morgan al análisis y desarrollo de la negación de proposiciones.
2. Formalizar proposiciones con condicional directo y con variantes de condicionales.
3. Formalizar correctamente proposiciones con bicondicionales.
4. Diferenciar, identificar y analizar proposiciones equivalentes.

3.1 Negación de las Proposiciones Compuestas

3.1.1. Negación de la conjunción: Consideremos la conjunción de dos proposiciones $p \wedge q$ su negación será $\sim (p \wedge q)$. Una proposición equivalente a la negación es $\sim p \vee q$.

Su demostración se realiza mediante la tabla de valores de verdad:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Esta equivalencia se llama Ley de Morgan de la negación de una proposición, que dice: La negación de la conjunción de dos proposiciones es la disyunción de sus negaciones.

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

Ejemplos 1: Dar la negación de la conjunción y su conjunto solución:

"x es impar y x es múltiplo de 3".

Sean p: x impar

q: x múltiplo de 3

Luego, p ∧ q vienen dado por CS = {3, 9, 15, 21,…}

La negación es:

"x no es impar ó x no es múltiplo de 3".

La solución es el complemento del conjunto solución CS; es decir CS' = {1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16,…}

Ejemplos 2: Usando equivalencia de Morgan, simplifica lo siguiente:

$$\sim (\sim p \wedge \sim q)$$

Simplificando:

$$\sim (\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim\sim p \vee \sim\sim q \equiv p \vee q$$

Ejemplos 3: Simplifica el siguiente enunciado:

"No es verdad que, no hace frío y está lloviendo".

Sean p: hace frio

q: está lloviendo

Simbólicamente: $\sim (\sim p \wedge q) \equiv p \vee \sim q$; se lee:

"Hace frio o no está lloviendo"

Observación 1. Recordar que la tabla de valores de verdad de $(\sim p \vee \sim q)$ es equivalente a $p \,/\, q \equiv$ "no p o no q". También se le llama el imcopatibilizador de **Sheffer** $p \,/\, q$.

3.1.2. Negación de la disyunción: De manera similar la ley de Morgan resume el resultado para la disyunción: La negación de la disyunción de dos proposiciones es la conjunción de sus negaciones"

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

Su demostración se realiza mediante la tabla de valores de verdad:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Ejemplos 1: Dar la negación de la disyunción y su conjunto solución:

"x es par, ó múltiplo de 5", x ∈ {0, 1, 2, 3,…,9}

Sean p: x es par

q: x múltiplo de 5

Luego, p ∨ q vienen dado por CS = {0, 2, 4, 5, 6, 8}

La negación es:

"x no es par y no es múltiplo de 5".

La solución es el complemento del conjunto solución CS; es decir CS' = {1, 3, 7, 9}

Ejemplos 2: Usando equivalencia de Morgan, simplifica lo siguiente:

$$\sim (p \vee \sim q)$$

Simplificando:

$$\sim (p \vee \sim q) \equiv \sim p \wedge \sim\sim q \equiv \sim p \vee q$$

Ejemplos 3: Simplifica el siguiente enunciado:

"No es verdad que, ella es rubia o elegante".

Sean p: ella es rubia

q: ella es elegante

Simbólicamente: $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$; se lee:

"Ella no es rubia ni elegante"

Observación 2. Recordar que la tabla de valores de verdad de $(\sim p \wedge \sim q)$ es equivalente a $p \downarrow q \equiv$ "ni p o ni q". También se le llama el inalternador de **Nicod's dagger** $p \downarrow q$.

3.2 La condicional o implicación

Dadas las proposiciones p y q, se llama proposición condicional o implicación al que resulta de unir p y q por el conectivo **"Si…entonces…".** Es el más importante de los enunciados lógicos.

Ejemplos: "Si una figura es un cuadrado, entonces es un paralelogramo".

Se observa que la primera proposición se llama **antecedente o hipótesis.** La segunda proposición se llama **consecuente o tesis.**

El símbolo usado para la condicional es $p \rightarrow q$.

a) **Diferentes formas de enunciar una implicación:** Algunas veces se usan algunas palabras que suelen sustituir al implicador, como:

Si p entonces q

Siempre que p por consiguiente q

Ya que p bien se ve que q

Dado que p por eso q

En cuanto *p* por lo tanto *q*

Porque *p* por eso *q*

Como *p* es evidente *q*

Con tal que *p* es obvio que *q*

Toda vez que *p* en consecuencia *q*

p por consiguiente *q*

Dado que *p* por lo cual *q*

En la medida que *p* de allí *q*

En virtud de que *p* entonces *q*

p implica *q*

p es innecesario para *q*

p es condición suficiente para *q*

p sólo si *q*

p luego *q*

p trae como consecuencia a *q*

De *p* deviene *q*

Partiendo de *p* llegamos a *q*

De *p* inferimos, deducimos, coligamos *q*

Para *p* es condición necesaria *q*

p sólo cuando *q*

Es suficiente *p* y *q* necesario

En el caso que *p* en tal sentido *q*

q si *p*

Ejemplos: "Si $x = 5$ entonces $x^2 = 25$"

"$x = 5$ sólo si $x^2 = 25$"

"Si $x = 5$ implica que $x^2 = 25$"

"$x^2 = 25$ si $x = 5$"

b) Análisis del valor de verdad:

Para analizar los valores de verdad de una condicional, supóngase la siguiente propuesta de un padre a su hijo.

"Si apruebas matemáticas entonces te llevo al Cuzco"

Así me comprometo a que aprobando matemáticas tendré que llevarte al Cuzco.

Si analizamos las posibles combinaciones de los valores de verdad tendremos:

Que aprobando matemáticas (Verdadero)	Te llevo al Cuzco (Verdadero)	Se cumple al compromiso (Verdadero)
Que aprobando matemáticas (Verdadero)	No te llevo al Cuzco (Falso)	No se cumple el compromiso (Falso)
Que no apruebes matemáticas (Falso)	Te llevo al Cuzco (Verdadero)	No se viola el compromiso (Verdadero)
Que no apruebes matemáticas (Falso)	No te llevo al Cuzco (Falso)	No se viola el compromiso (Verdadero)

Así, la tabla de valores de verdad para la condicional establece:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

El valor de verdad de la condicional o implicación establece que cumpliéndose la hipótesis (verdadera) deberá cumplirse la conclusión, para que sea verdadera, y falsa en caso contrario.

Las proposiciones implicativas o condicionales son tan importantes en las matemáticas, a continuación veremos los siguientes ejemplos:

Ejemplos 1: "Si un triángulo es equilátero, entonces sus tres lados son congruentes".

Esta implicación es verdadera porque al cumplirse la hipótesis, se debe cumplir la conclusión.

Ejemplos 2: "Si $\sqrt{7}$ es un número real, $\sqrt{7}$ es un número racional".

Es claro que la proposición considerada es falsa, pues se cumple el antecedente, porque es verdad que $\sqrt{7} \in \mathbb{R}$, pero no se cumple el consecuente porque $\sqrt{7}$ es un número racional.

Ejemplos 3: "Si 69 es primo, 40 es par".

Es verdadero, sin embargo, el antecedente "69 es primo" es falso y el consecuente "40 es par" es verdadero.

Ejemplos 4: "Si $3 \neq 2$ entonces $3^2 = 17$".

Es verdadero. Si no se cumple la hipótesis no tiene por qué cumplirse la conclusión.

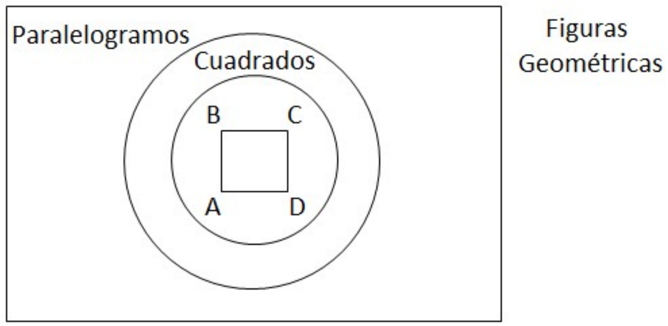
c) Análisis del valor de verdad para proposiciones abiertas.

Una afirmación escrita en la forma $p \rightarrow q$, es una forma de decir **"*p* es una condición suficiente para *q*"**, o sea que, lo que indica la proposición p es suficiente para que ocurra lo que indica la afirmación q.

Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplos 1: "Si una figura geométrica es un cuadrado, entonces es un paralelogramo"

Usando el diagrama de Venn – Euler:



Observamos que los cuadrados son un subconjunto de los paralelogramos. Esto demuestra que si una figura geométrica es un cuadrado, es "suficiente" para que la figura sea un paralelogramo.

Ejemplos 2: "Si x es múltiplo de 4, entonces x es par"

Sean las proposiciones:

p: x es múltiplo 4

q: x es par

Donde el conjunto solución es p de P = {4, 8, 12, 16,…} y
el conjunto solución de q es Q = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16,…}.

La proposición $p \rightarrow q$ es verdadero porque estamos afirmando que todo elemento de P también está en Q, es decir $P \subset Q$.

Ejemplos 3: "Si un número es múltiplo de 3, entonces es múltiplo de 6"

El conjunto solución de la hipótesis es P = {3, 6, 9, 12, 15,…}

El conjunto solución de la conclusión es Q = {6, 12, 18, 24,…}

Claramente vemos que la implicación es falsa ya que 15 es múltiplo de 3 y no es múltiplo de 6. En general, todos los múltiplos impares de 3 no son múltiplos de 6. Además podemos decir $P \not\subset Q$.

Observación 1. Del ejemplo 1 podemos afirmar que una implicación o condicional es simplemente una forma especial de decir que un conjunto es subconjunto de otro. En cambio del ejemplo 2 podemos concluir que una implicación es verdadera si el conjunto solución de la hipótesis es un subconjunto del conjunto solución y es falsa en cualquier otro caso.

Unidad 1 / Lógica matemática

Observación 2. En el ejemplo 3, mostramos que para concluir que la implicación sea falsa, basta con encontrar un elemento que satisfaga la hipótesis y que contradiga lo que se afirma en la implicación. A éste le llamamos un **contraejemplo.**

3.2.1. Variantes de la Implicación o Condicional:

A toda implicación se le asocian otras tres proposiciones que juegan un papel importante. Ellos son:

a) **Recíproca de la condicional:** Es el enunciado que se obtiene al cambiar el orden de los enunciados de la implicación pero manteniendo "si entonces" en los mismos lugares de la proposición, es decir, la hipótesis y la conclusión se intercambian para formar la recíproca.

La implicación: $p \rightarrow q$

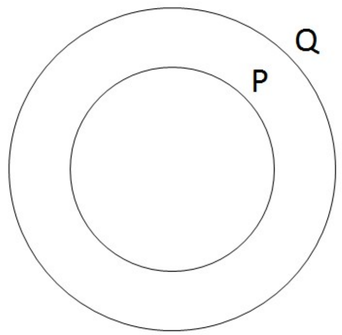
Su recíproca es: $q \rightarrow p$

Ejemplo: Dada la implicación: "Si una figura es un cuadrado, entonces es un paralelogramo" (Verdadero)

Su recíproca es: "Si una figura es un paralelogramo, entonces es un cuadrado" (Falso)

En el ejemplo, observamos que aun cuando la implicación sea verdadera, su recíproca puede no serlo. Es decir; al expresar $p \rightarrow q$, afirmamos que una figura cuadrada es **"condición suficiente"** para que sea un paralelogramo. En la recíproca $q \rightarrow p$, al expresar que la figura que es un paralelogramo es una **"condición necesaria"** pero no suficiente para ser un cuadrado.

Esto lo podemos resumir usando el diagrama de Venn – Euler:



$p \rightarrow q$: " p es condición suficiente para q "

$q \rightarrow p$: " q es necesario para p "

Por tanto, demostraremos mediante una tabla de valores de verdad que una implicación y su recíproca no son equivalentes.

La tabla de valores de verdad será:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

b) Contrarrecíproca de la condicional: Es la proposición que resulta de hacer la recíproca y después negar la nueva hipótesis y conclusión.

La implicación: $p \rightarrow q$

Su contrarrecíproca es: $\sim q \rightarrow \sim p$

Ejemplo: Dada la implicación:

"Si una figura es un cuadrado, entonces es un paralelogramo" (Verdadero)

Su contrarrecíproca es:

"Si una figura no es un paralelogramo, entonces no es un cuadrado (Verdadero)

En el ejemplo, se observa que las dos proposiciones son equivalentes si tenemos dificultades para demostrar la implicación $p \rightarrow q$, tal vez sea más fácil demostrar su contrarrecíproca $\sim q \rightarrow \sim p$. Esta resulta ser la prueba de la contrarrecíproca, lo podemos verificar en la siguiente tabla de valores de verdad:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

c) Inversa de la condicional: Es la proposición que resulta de negar la hipótesis y conclusión.

La condicional: $p \rightarrow q$

Su inversa o contraria es: $\sim q \rightarrow \sim p$

Ejemplo: Dada la implicación:

"Si una figura es un cuadrado, entonces es un paralelogramo". (Verdadero)

Su inversa es:

"Si una figura no es un cuadrado, entonces no es un paralelogramo". (Falso)

En el ejemplo, se observa que las dos proposiciones no son equivalentes.
A continuación, demostraremos mediante una tabla de valores de verdad que una implicación y su inversa no son equivalentes:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim p \rightarrow \sim q$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V

Comparando los valores de verdad de la parte (a) y la parte (c), se observa que la recíproca y la inversa son proposiciones equivalentes.

Observación: Cuando es un enunciado, se encuentran los términos.

Sólo si p, q

Sólo cumple cuando p, q

Solamente porque p, q

p si q

p porque q

p dado que q

p ya que q

p siempre que q

p puesto que q

p es condición necesaria para q

p es suficiente para q

Es necesario p para q

Es insuficiente p para q

p cada vez que q

p está implicado por q

p con la condición de que q

Si solamente p cada vez que q

p debido a que q

p depende de q

p sigue de q

Únicamente si p, q

Éstos términos son conectivos condicionales, se caracterizan porque después de cada uno de estos términos el antecedente. A éstas proposiciones se le aplica el **Replicador:** $p \leftarrow q$, por ejemplo:

“Como Liliana sufrió un accidente es evidente que no vendrá”

Sean:

p: Liliana vendrá

q: Liliana sufrió un accidente

Aplicando el Replicador, se escribe:

"Liliana no vendrá porque sufrió un accidente"

Simbólicamente, se tiene: $q \to p$

3.2.2. Proposiciones equivalentes a la Condicional:

a) Una proposición equivalente a la implicación $p \to q$ es $\sim p \vee q$. Mediante una tabla de valores de verdad demostraremos su equivalencia.

$$\sim p \vee q \equiv p \to q$$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \to q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Ejemplo: Escribe simbólicamente y literalmente, el equivalente a:

"Si crece el nivel de vida, los pobres de empobrecerán aún más"

$$(p \to q)$$

La proposición equivalente es:

"El nivel de vida no crece o los pobres se empobrecerán aún más"

$$(\sim p \vee q)$$

b) Otra proposición equivalente es: $p \wedge \sim q \equiv \sim (p \to q)$

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \to q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

Ejemplo: Aplique el equivalente de la condicional:

"Es falso que; si la tierra forma parte del sistema solar entonces forma parte de la vía láctea". $\sim (p \to q)$

La proposición equivalente es:

"La tierra forma parte del sistema solar, pero no forma parte de la vía láctea". $(p \wedge \sim q) \equiv \sim (p \to q)$

3.3 La Bicondicional o Doble Implicación:

Una proposición es bicondicional siempre y cuando cada una de las proposiciones componentes son a la vez suficiente y necesaria una respecto a la otra. La denotaremos así:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p),$$

Se lee: "p si, y sólo si, q". Esta proposición expresa:

$p \to q$: Lo suficiente es p y lo necesario es q, a la vez.
y
$q \to p$: Lo suficiente es q y lo necesario p.

Algunas veces se usan algunas palabras que suelen sustituir al biimplicador como:

p por lo cual y según lo cual *q*

p cuando y sólo cuando *q*

p cada vez que y sólo si *q*

Si y sólo si *p, q*

Porque y solamente porque *p, q*

Es suficiente *p* para que suficientemente *q*

Es necesario *p* para que necesariamente *q*

p es equivalente a *q*

p es lo mismo que *q*

p es idéntico a *q*

p implica y está implicado por *q*

Ejemplo: Escribe literalmente, el equivalente a:

"El nivel de vida crece si, y sólo si, los pobres se empobrecerán aún más"

$$(p \leftrightarrow q)$$

Esto significa que es necesario y suficiente que si el nivel de vida crece, los pobres empobrecerán aún más.

Unidad 1 / Lógica matemática

Equivale a:

"Si crece el nivel de vida, los pobres se empobrecerán aún más y sí los pobres se empobrecerán aún más, crece el nivel de vida"

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

a) Las definiciones matemáticas son proposiciones bicondicionales es decir que si el grupo de palabras o frases pueden ser intercambiadas sin que cambie la veracidad de la afirmación:

Ejemplo 1. "Un ángulo es recto si, y sólo si, mide 90°". (V)
"Un ángulo mide 90°, sólo si es recto". (V)

Ejemplo 2. "Un triángulo es equilátero si, y sólo si, sus tres lados son congruentes". (V)
"Si un triángulo es equilátero, entonces sus tres lados son congruentes". (V)

Ejemplo 3. "$0 < x < 3$ si, y sólo si, $0 < x^2 < 9$". (F)
"$0 < x^2 < 9$, sólo si $0 < x < 3$". (F)

Ejemplo 4. "Dos ángulos son complementarios, si, y sólo si, la suma de ambos es 90°" (V)
"Si dos ángulos son complementarios, entonces la suma de ambos es 90°". (V)

El principio lógico de la bicondicional afirma que es verdadero si ambas proposiciones son verdaderas o son falsas, en otros casos es falso. Esto queda expresado en la siguiente tabla de valores de verdad:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (p \leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

b) En el caso de proposiciones abiertas, si la implicación $p \rightarrow q$ es verdadera entonces P es un subconjunto de Q; ahora bien, si la recíproca es también verdadera, entonces Q es un subconjunto de P, es decir:

$$P \subset Q \wedge Q \subset P \Rightarrow P = Q$$

A estas proposiciones las llamamos **equivalentes** y son verdaderas sólo en el caso que el conjunto solución de la hipótesis y conclusión sean el mismo.

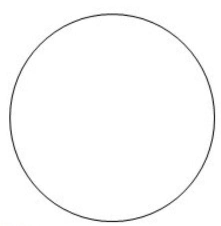
Ejemplo: Si s {1, 2, 3,…, 20}, encuentre el conjunto solución de:

"Un número es par si, y sólo si, es múltiplo de dos"

Sean: p: x es par, P = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,…}

q: x es múltiplo de dos, Q = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,…}

Usando diagramas de Venn – Euler, se observa que:



P = Q

Por lo tanto, P = Q

3.4 Ejercicios Resueltos

A. Niega las siguientes proposiciones:

1. 9 es impar o múltiplo de 3.
2. Omar tiene anemia o está fortalecido.
3. 4 es el cuadrado de 2 y raíz de 16.
4. $2 \neq 3$ y $5 > 4$
5. $x < 7$ ó $x \leq 3$
6. $x > 5$ ó x es par
7. x no es múltiplo de 3 y $x \leq 5$
8. $5 \leq x \leq 8$
9. x es un número compuesto y $x < 10$
10. El jarabe Mucosolvan es contra la faringitis o contra la tos.

Solución:

1. 9 es no impar y no es múltiplo de 3.
2. Omar no tiene anemia y no está fortalecido.
3. 4 no es el cuadrado de 2 ó no es la raíz de 16.
4. $2 = 3$ ó $5 \ngtr 4$
5. $x \nless 7$ y $x > 3$
6. $x \leq 5$ y x no es par
7. x es múltiplo de 3 ó $x > 5$
8. $x \ngtr 5$ ó $x \nless 8$
9. x no es un número compuesto ó $x \geq 10$
10. El jarabe Mucosolvan no es contra la faringitis y no contra la tos.

B. Halla la proposición equivalente a:

1. No es el caso que, hace frío y no congele.
2. Liliana no termina su tarea y no irá al cine.
3. No es un buen estudiante, sin embargo destaca en el futbol.
4. No es verdad que, ella es rubia o elegante.

Solución:

1. Sean: p: hace frío
   q: congela

   Formalizando: "No es el caso que, p y no q"

   Simbolizando: $\sim (p \wedge \sim q)$

   Usando Ley de Morgan: $\sim (p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q$

   Su equivalencia se escribe:

   "No hace frío o congela"

2. Formalizando las proposiciones:

   p: Liliana va al cine
   q: Liliana termina su tarea

   Simbolizando:
   $\sim q \wedge \sim p \equiv \sim (q \vee p)$

   Su equivalencia se escribe:

   "No es cierto que, Liliana termine su tarea o vaya al cine"

3. Consideremos las proposiciones:

   p: es un buen estudiante
   q: destaca en el fútbol

   Formalizando:

   "No p, sin embargo q"

Unidad 1 / Lógica matemática

   Simbolizando:
   $\sim p \wedge q \equiv \sim (p \vee \sim q)$, por Morgan

   Su equivalencia se escribe:

   "No es cierto que, sea un buen estudiante o no destaque en fútbol"

4. Sean:

   p: ella es rubia
   q: ella es elegante

   Simbolizando:
   $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

   Su equivalencia se escribe:

   "Ella no es rubia ni elegante"

C. Enuncia la siguiente implicación en forma equivalente:
"Si un polígono tiene 5 lados, entonces es un pentágono"

Solución: La proposición se puede escribir en forma equivalente:

"Un polígono tiene 5 lados sólo si es pentágono"

"Un polígono que tenga 5 lados implica que sea pentágono"

"Una figura es pentágono si es polígono de 5 lados"

"Un polígono de 5 lados es condición suficiente para ser un pentágono"

D. Da el valor de verdad para las siguientes implicaciones:
1. Si 4 > 3, entonces 4 < 5
2. Si 5 es par, entonces 5 es divisor de 40.
3. Si 40 es múltiplo de 5, entonces 40 es divisible entre 3.
4. Si x < 6, entonces x < 8
5. Si x es múltiplo de 8, entonces x es múltiplo de 2.
6. Si una figura es un rectángulo, entonces es un cuadrado.
7. Si una figura es un triángulo, entonces es un paralelogramo.
8. Si 19 no es primo, 40 no es par.

Solución: De acuerdo con la tabla de valores de verdad de la implicación, las respuestas son:
1. Verdadero, ya que ambas proposiciones son verdaderas.
2. Verdadero, porque de una hipótesis falsa se puede concluir cualquier proposición.
3. Falsa: de una proposición verdadera en la hipótesis no puede seguir una falsa.
4. Verdadera: porque P = {1, 2, 3, 4, 5} ⊂ Q = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
5. Verdadera: porque P = {8, 16, 24,…} ⊂ Q = {2, 4, 6, 8, 10,…}
6. Falsa: Los rectángulos no es subconjunto de los cuadrados.
7. Falsa: El conjunto de los triangulo es disjunto de los paralelogramos.
8. Verdadera, ya que ambas proposiciones son falsas.

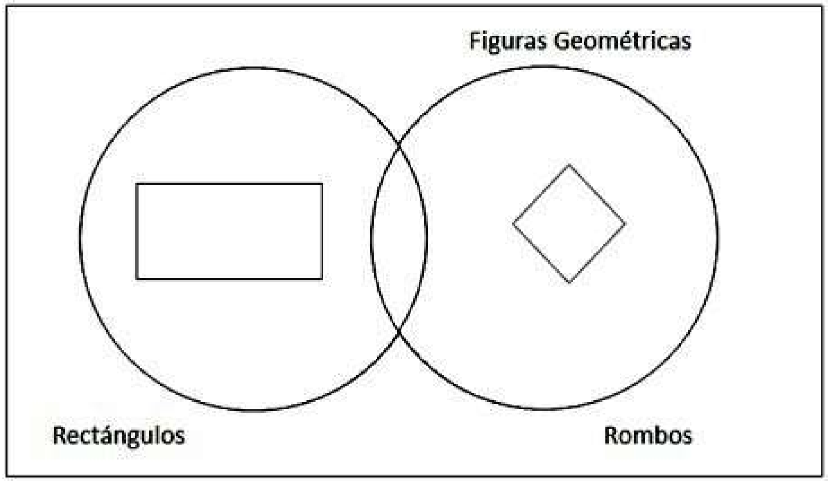
E. Da un contraejemplo que muestre la falsedad de las siguientes implicaciones:
1. Si x es primo, entonces x es impar.
2. Si x es múltiplo de 3, entonces x es impar.
3. Si x es divisor de 12, entonces x es múltiplo de 2.
4. Si x es cuadrado de un número, entonces es par.

Solución:
1. x = 2 sirve como contraejemplo, ya que 2 es el único primo par.
2. x = 6 sirve como contraejemplo, ya que a pesar de ser múltiplo de 3 no es impar.

3. x = 3 sirve como contraejemplo, porque 3 es divisor de 12 pero no es múltiplo de 2.
4. x = 9 sirve como contraejemplo, porque muestra que es cuadrado pero no es par.

F. Usando el Diagrama de Venn – Euler, da el valor de verdad de la siguiente implicación:
"Si una figura es un rectángulo, entonces es un rombo"

Solución: Usando el diagrama de Venn – Euler:



En el diagrama vemos que le conjunto de rectángulos no es subconjunto de los rombos.

Por lo tanto, la proposición es falsa, ya que una figura al ser rectángulo no es "condición suficiente" para que sea un rombo.

G. Escribe la recíproca y su valor de verdad de las siguientes implicaciones:

1. Si los transportes aumentan, subirán los precios de pasaje.
2. Si x es múltiplo de 8, entonces es múltiplo de 4.
3. Si $7 > 3$, entonces $3 < 8$.

Solución:

1. La implicación es verdadera. Su recíproca es:
   "Si subirán los precios del pasaje, entonces los transportes aumentaran" (Falso)
2. La implicación es verdadera. Su recíproca es:
   "Si x es múltiplo de 4, entonces x es múltiplo de 8" (Falso)
3. La implicación es verdadera. Su recíproca es:
   "Si $3 < 8$, entonces $7 > 3$" (Verdadero)

H. Escribe la contrarrecíproca y su valor de verdad de las siguientes implicaciones:

1. Si $x < 4$, entonces x es natural.
2. Si Melva come, entonces tiene hambre.
3. Estudio mucho luego aprobaré mi curso.

Solución:

1. La implicación es verdadera. Su contrarrecíproca es:
   "x no es natural, entonces $x \geq 4$" (Falso)
2. La implicación es verdadera. Su contrarrecíproca es:
   "Si Melva no come, no tiene hambre" (Falso)
3. La implicación es verdadera. Su contrarrecíproca es:
   "No aprobaré mi curso si no estudio mucho" (Verdadero)

I. Escribe la inversa y un valor de verdad de las siguientes implicaciones:

1. Si x es divisible entre 3, entonces x es múltiplo de 3.
2. $8 < 9$ sólo si $6 = 9$.
3. Si una figura es un rombo, entonces es un paralelogramo.

Solución:

1. La implicación es verdadera. La inversa es:
   "Si x no es múltiplo de 3, entonces x no es divisible entre 3" (Falso)
2. La implicación es falsa. La inversa es:
   "Si $8 \geq 9$ entonces $6 \neq 9$" (Verdadero)
3. La implicación es verdadera. La inversa es:
   "Si una figura no es un rombo, entonces no es un paralelogramo" (Falso)

J. Aplica el Replicador en las siguientes proposiciones.

1. El descontento de los trabajadores se debe a que hubo una mala administración de los recursos.
2. El paciente falleció debido a que no recibió la atención necesaria.
3. El matrimonio fracaso ya que hubo infidelidad.

Solución:

1. Sean: p: El descontento de los trabajadores
   q: Hubo una mala administración de los recursos

   Si denotamos la proposición como "$p \rightarrow q$" sería erróneo ya que el descontento de los trabajadores no fue la causa de la mala administración de los recursos humanos, sino que; "la mala administración de los recursos humanos ha sido la causa del descontento de los trabajadores". Por ello la simbolización correcta es "$q \rightarrow p$".

2. Sean: p: El paciente falleció
   q: Recibió la atención necesaria.
   $\sim q$: No recibió la atención necesaria.

Aplicando el Replicador, se escribe:
"Porque no recibió la atención necesaria por eso el paciente falleció"

Simbólicamente, se tiene: $\sim q \rightarrow p$

3. Sean: p: El matrimonio fracasó.
   q: Hubo infidelidad.

   Aplicando el Replicador, se escribe:
   "Como hubo infidelidad es evidente que el matrimonio fracasó"

   Simbólicamente, se tiene: $q \rightarrow p$

K. Indica cuáles proposiciones son equivalentes.

1. Un número es múltiplo de 6 si, y sólo si, es par y múltiplo de 3.
2. $a^2 = 4$ si, y sólo si $a = 2 \vee a = -2$
3. Dos conjuntos son disjuntos si y sólo si, su intersección es el conjunto vacío.
4. $0 < x < 3$ si, y sólo si, $0 < x^2 < 9$
5. Dos conjuntos son equivalentes si, y sólo si, tienen la misma cardinalidad.
6. Un cuadrilátero es un cuadrado si, y sólo si, todos sus lados son iguales.
7. Un triángulo es equilátero si, y sólo si, es isósceles.
8. $x^2 < 4$ si, y sólo si, $-2 < x < 2$
9. El gobierno peruano es elegido por el pueblo si, y sólo si, es democrático.
10. La matemática es bonita, si y sólo sí, soy un buen estudiante o tengo buenos libros.

Solución:

1. Sean: $P = \{6, 12, 18, \ldots\}$
   $Q = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} \cap \{3, 6, 9, 12, \ldots\} = \{6, 12, 18, \ldots\}$

   Por tanto, $P \equiv Q$ (Son equivalentes)

2. Sean: p: $a^2 = 4$
   q: $a = 2 \vee a = -2$

   Usando: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (p \leftrightarrow q)$
   $\quad\quad V \quad \wedge \quad V \;=\; V$

   Por tanto las proposiciones son equivalentes.

3. Sean:
   i) $p \rightarrow q$ es verdadero, diremos que: "Dos conjuntos son disjuntos es condición suficiente para ser conjunto vacío".
   ii) $q \rightarrow p$ es verdadero, diremos que: "Dos conjuntos son disjuntos es condición necesaria para ser conjunto vacío".

   Por tanto, $p \leftrightarrow q$ es verdadero; es decir: $p \equiv q$

4. Sean:

   $p \rightarrow q$ es verdadero
   $q \rightarrow p$ es falso

   Por tanto, $p \leftrightarrow q$ es falso; es decir, las proposiciones no son equivalentes.

5. Equivalentes.

6. Equivalentes.
7. No son equivalentes.
8. Equivalentes.
9. Equivalentes.
10. Equivalentes.

3.5 Actividad de Aprendizaje

A. Dada las siguientes proposiciones:

p: 36 es múltiplo de 7

q: la raíz de 50 es 25

1. Haz la negación de la conjunción y elabora el conjunto solución.
2. Haz la negación de la disyunción y elabora el conjunto solución.
3. Haz la implicación y elabora el conjunto solución.
4. Haz la doble implicación y elabora el conjunto solución.

B. Dados:

p: Proposición verdadera.

q: Proposición falsa.

m: Proposición verdadera.

Encuentra el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

1. $p \wedge m$
2. $p \vee q$
3. $\sim p \wedge \sim q$
4. $\sim (p \vee q)$

5. $p \rightarrow q$
6. $m \rightarrow q$
7. $p \leftrightarrow q$
8. $(m \wedge q) \vee p$
9. $(p \wedge q) \leftrightarrow (m \vee p)$
10. $\sim p \leftrightarrow \sim q$

C. Dadas las proposiciones:

p: Laura es estudiosa

q: aprende con facilidad

Formula la traducción verbal de:

1. $\sim p \wedge \sim q$
2. $\sim (p \wedge q)$
3. $\sim (p \vee \sim q)$
4. $\sim (\sim p \wedge q)$
5. $\sim (\sim p \wedge \sim q)$
6. $p \leftrightarrow q$
7. $\sim p \rightarrow q$
8. $\sim (\sim p \vee q) \wedge p$

D. Halla el equivalente de la negación de:

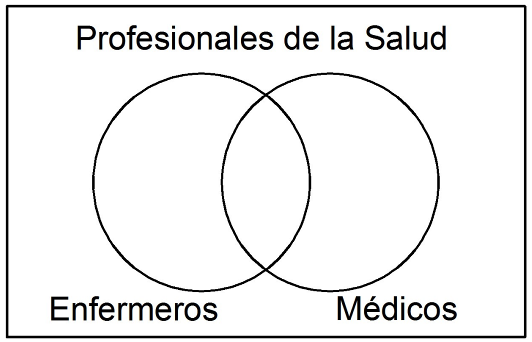
1. Si llueve entonces no podré manejar el auto.
2. Si estudio, podré ir a la UNS o al instituto tecnológico.
3. Tener hambre equivale a querer comer.
4. $2 + 3 = 5$ ó $2 > 3$
5. Si crece el nivel de vida, los pobres se empobrecerán aún más.

E. Determina el valor de verdad de los siguientes enunciados:

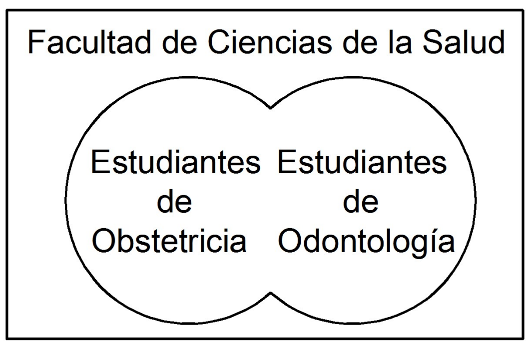
1. Si $3 + 4 = 7$ entonces $x \neq x$
2. $2 > 3$ ó $3 < 2$, luego $3 > 1$
3. Si $x = x$ ú $8 \neq 5$, no es verdad que $2 + 4 = 6$ y $3 = 4$
4. $7 = 4 \times 2$ sí, y sólo sí $6 \neq 6$, pero $4 = 2^2$
5. No es verdad que, $3 > 2$ ó $5 < 7$, entonces $6 = 3 \times 2$ y $7 = 3 + 4$
6. $\sim (2 + 5 = 6) \leftrightarrow (3 + 5 = 10)$
7. $6 = 2^2 + 2$ ó $7 = 3 + 4$, implica que $4 = 2^2$ pero $6 = 6^0 + 5$
8. $(6 + 4 = 10) \rightarrow [(6 = 10 - 4) \wedge (4 = 10 - 6)]$

F. Realiza una implicación de acuerdo con el Diagrama de Venn – Euler que sea verdadera:

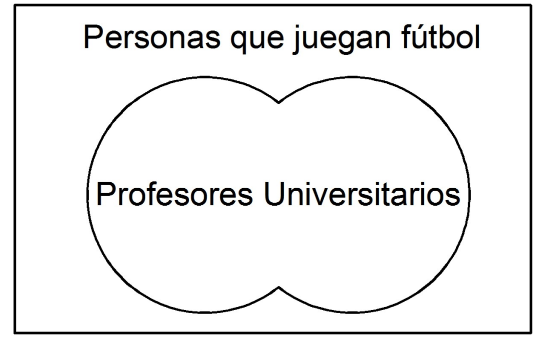
1.



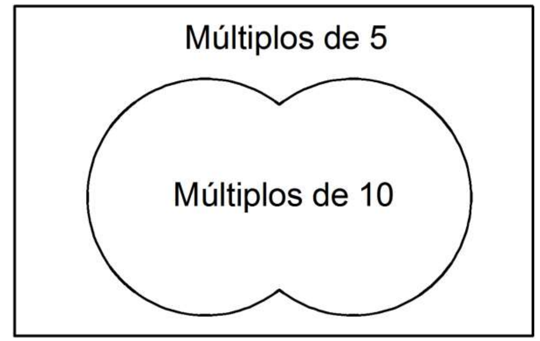
2.



3.



4.



G. Halla la recíproca, inversa y contrarrecíproca de:

1. Si Melva llega, entonces estudiamos.
2. $3 < 7$ entonces $-3 > -7$
3. $8 = 2^3$ ó $5 = 3 + 2$ implica que $1 = 6^0$ pero $\frac{1}{3} = 3^{-1}$
4. Omar va al estadio sólo si hay un buen partido.
5. Melva piensa por lo tanto existe.
6. Si Liliana come, entonces tiene hambre.

H. Halla la:

1. Inversa de la contraria de la recíproca de la inversa de: "$x > y \rightarrow a = b \vee b > a$"
2. Contrarrecíproca de la recíproca de la inversa de la contrarrecíproca de: "$8 > 1 \rightarrow x > y$"

3. Recíproca de la inversa de la contrarrecíproca de la contraria de: "Liliana tiene un libro o un cuaderno, entonces lee".
4. Inversa de la recíproca de la contrarrecíproca de: "Omar juega entonces está sano".

I. Da un contraejemplo que muestre la falsedad de las siguientes implicaciones:
1. Si x es múltiplo de 3, entonces x es impar.
2. Si x es el cuadrado de un número, entonces es par.
3. Si x es primo, entonces x es impar.

J. Aplica el Replicador en las siguientes proposiciones:
1. Los calamares son moluscos sólo si los caracoles también lo son.
2. Si Melva baila y Liliana canta, entonces Omar juega.
3. La casa se desplomó a causa de que sus cimientos eran endebles.

K. Dadas las proposiciones:

p: x es divisible entre 6

q: x es divisible entre 2 y 3

Indica la bicondicional y haz un Diagrama de Venn – Euler.

L. Indica cuales de las siguientes proposiciones son equivalentes:
1. x^2 par si, y sólo si, x es par.
2. Los precios son altos si, y sólo si, los sueldos son elevados.
3. Sean a y b números reales; ab = 0 si, y sólo si, a = 0 ó b = 0.
4. Para todos los enteros b y c, $x^2 + bx + c = 0$ tienes raíces enteras si, y sólo si, $b^2 - 4ac$ es el cuadrado de un entero.
5. En todo triángulo isósceles las bisectrices de los ángulos de la base son de igual longitud, y recíprocamente.
6. Gustavo construirá su casa si, y sólo si, obtiene un préstamo en el Banco de la Nación.

3.6 Clave de Respuestas

A. Dada las siguientes proposiciones:

2) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
Se lee: "36 no es múltiplo de 7 y la raíz de 50 no es 25"
El conjunto solución de $\sim p \wedge \sim q$ es: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8,…}

4) $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
Se lee: "36 es múltiplo de 7 si, y sólo si, la raíz de 50 es 25"
El conjunto solución de $p \leftrightarrow q$ es el vacío.

B. Dados:

Si $\boldsymbol{v}(p) = V$, $\boldsymbol{v}(q) = F$ y $\boldsymbol{v}(m) = V$

2) Verdadera.
4) Falsa.
6) Falsa
8) Verdadera.
10) Falsa.

C. Dadas las proposiciones:

2) No es verdad que, Laura es estudiosa y aprende con facilidad.
4) $\sim (\sim p \wedge q) \equiv p \vee \sim q$ (Por Morgan).
"Liliana es estudiosa o no aprende con facilidad"
6) "Liliana es estudiosa si, y sólo si, aprende con facilidad".
8) Por leyes de la lógica, se tiene:
$\sim (\sim p \vee q) \wedge p \equiv (p \wedge \sim q) \wedge p \equiv p \wedge \sim q \equiv \sim (p \rightarrow q)$
"No es verdad que, si Laura es estudiosa entonces aprende con facilidad"

D. Halla el equivalente de la negación de:

2) Sean:

p: estudio

q: podré ir a la UNS

r: podré ir al instituto tecnológico

Simbólicamente: $p \rightarrow (q \vee r)$

Negación: $\sim [p \rightarrow (q \vee r)] \equiv p \wedge \sim (q \wedge r)$

"Estudio y no es cierto que, podré ir a la UNS ó al instituto tecnológico"

4) Sean:

m: $2 + 3 = 5$

n: $2 > 3$

Simbólicamente: $m \vee n$

Negación: $\sim (m \vee n) \equiv \sim m \wedge \sim n$

"$2 + 3 \neq 5$ y $2 \leq 3$"

E. Determina el valor de los siguientes enunciados:

2) $(2 > 3$ ó $3 < 2) \rightarrow (3 > 1)$

$$\text{F} \quad \vee \quad \text{F} \quad \rightarrow \quad \text{V}$$

$$\text{F} \qquad \boxed{\text{V}} \quad \text{V}$$

Unidad 1 / Lógica matemática

4) $(7 = 4 \times 2) \leftrightarrow (6 \neq 6 \wedge 4 = 2^2)$

$$\text{F} \quad \leftrightarrow \quad \text{F} \quad \wedge \quad \text{V}$$

$$\text{F} \quad \boxed{\text{V}} \quad \text{F}$$

6) $\sim (2 + 5 = 6) \leftrightarrow (3 + 5 = 10)$

$$\sim \text{F} \quad \leftrightarrow \quad \text{F}$$

$$\text{V} \quad \boxed{\text{F}} \quad \text{F}$$

8) $(6 + 4 = 10) \rightarrow [(6 = 10 - 4) \wedge (4 = 10 - 6)]$

$$\text{V} \quad \rightarrow \quad \text{V} \quad \wedge \quad \text{V}$$

$$\text{V} \quad \boxed{\text{V}} \qquad \text{V}$$

F. Realiza una implicación de acuerdo con el Diagrama de Venn – Euler que sea verdadera:

2) El Diagrama de Venn – Euler muestra que tanto el conjunto de estudiantes de Obstetricia y estudiantes de Odontología son subconjuntos de la Facultad de Ciencias de la Salud.

Se lee: "Los estudiantes de Obstetricia y de Odontología son estudiantes de la facultad de Ciencias de la Salud".

Esta proposición es verdadera.

4) Si analizamos el Diagrama de Venn – Euler, vemos que los múltiplos de 10 son un subconjunto de los múltiplos de 5.
Se lee: "Si x es múltiplo de 10, entonces x es múltiplo de 5".
Esta proposición es verdadera.

G. Halla la recíproca, inversa y contrarrecíproca de:

2) D: $3 < 7 \rightarrow -3 > -7$
R: $-3 > -7 \rightarrow 3 < 7$
CR: $-3 \leq -7 \rightarrow 3 \geq 7$
I: $3 \geq 7 \rightarrow -3 \leq -7$

4) D: Omar va al estadio sólo si hay un buen partido.
R: Si hay un buen partido entonces Omar va al estadio.
CR: Si no hay un buen partido entonces Omar no va al estadio.
I: Omar no va al estadio sólo si no hay un buen partido.

6) D: Si Liliana come, entonces tiene hambre.
R: Si Liliana tiene hambre, entonces come.
CR: Si Liliana no tiene hambre, no come.
I: Si Liliana no come, no tiene hambre.

H. Halla la:

2) Sean:
p: $8 > 1$
q: $x > y$
D: $p \rightarrow q$
CR: $\sim q \rightarrow \sim p$ (D)
I: $q \rightarrow p$ (D)
R: $p \rightarrow q$ (D)
CR: $\sim q \rightarrow \sim p$
"$(8 > 1) \rightarrow (x > y)$".

4) Sean:
p: Omar juega
q: Omar está sano
D: $p \rightarrow q$
CR: $\sim q \rightarrow \sim p$ (D)
R: $\sim p \rightarrow \sim q$ (D)
I: $p \rightarrow q$
"Omar juega, entonces está sano".

I. Da un contraejemplo que muestre la falsedad de las siguientes implicaciones:

2) x = 9 es un contraejemplo porque muestra que es cuadrado pero no es par.

J. Aplica el Replicador en las siguientes proposiciones:

2) "Omar juega, ya que Melva baila y Liliana canta".

K. Dadas las proposiciones:

Quedan para el estudiante.

L. Indica cuales de las siguientes proposiciones son equivalentes:

2) Sean:

p: Los sueldos son elevados.
q: Los precios son altos.

Simbolizando: $p \leftrightarrow q$

Son equivalentes, porque decir que "los precios son altos es condición necesaria y suficiente para que los sueldos sean elevados".

4) Son equivalentes, porque: "Para todos los enteros b y c, una condición necesaria y suficiente para que $x^2 + bx + c = 0$ tenga raíces enteras es que $b^2 – 4ac$ sea el cuadrado de un entero".

6) Son equivalentes, porque para "Gustavo obtener el préstamo del Banco de la Nación es condición necesaria y suficiente para construir su casa".

"Dios te ha dado dos hermosos regalos: tu vida y tu mundo. Lo demás tienes que ganártelo, es tu tarea"

LECCIÓN 4

TABLAS DE VERDAD Y SUS APLICACIONES – LEYES LÓGICAS.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Construir tablas de verdad de proposiciones compuestas.
2. Aplicar tablas de verdad para demostrar la equivalencia de proposiciones.
3. Hallar el valor de verdad de proposiciones compuestas usando el método abreviado.
4. Simplifica proposiciones compuestas usando leyes lógicas.

4.1 Tablas de Verdad

El cuadro de doble entrada es la estructura o armazón básico de una tabla de verdad, cuya razón es conocer el valor de verdad de una proposición compuesta, con base en todas las combinaciones de valor de verdad que tengan las proposiciones simples que la forman.

Para hacer una tabla de verdad se necesita:

i) Analizar cuántas variables proposicionales existen.

ii) Encontrar las combinaciones posibles de **valores de verdad**. El número de valores de verdad es 2^n donde n es el número de variables proposicionales. Esto nos da el número de filas de la tabla.

iii) Después de desglosar la proposición dada ubicar la **matriz secundaria** en cada una de sus partes. En las matrices secundarias se desarrollan los valores de verdad de acuerdo a la conectiva respectiva, partiendo de los valores de verdad de las respectivas variables proposicionales en cada una de sus posibilidades.

iv) Finalmente en la **matriz principal** se desarrollan los valores de verdad resultado de combinar los valores de verdad de las matrices secundarias respectivas de acuerdo al operador de mayor jerarquía.

v) La matriz principal puede arrojar tres tipos distintos de resultados:

* Si todos los valores de verdad son verdaderos, recibe el nombre de **Tautología**.
* Si todos los valores de verdad son falsos, recibe el nombre de **Contradicción**.
* Si presenta tantos valores de verdad verdaderos como falsos, recibe el nombre de **Contingencia**.

En el siguiente ejemplo mostramos la estructura y elaboración de una tabla de verdad para dos o más variables:

Variables proposicionales

Esquema de fórmula

p	***q***	***r***	**(*p* → *q*)**	∨	**(*q* ∧ *r*)**
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F
V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	F
F	F	F	V	V	F

Cuadro de doble entrada

Valores de Verdad

Matriz Secundaria

Matriz Principal

Matriz Secundaria

En el caso del ejemplo considerado, tenemos tres variables proposicionales: *p*, *q*, *r*; donde $2^3 = 8$ arreglos posibles. Además la matriz principal da como resultado una **Contingencia**.

4.1.1. Aplicaciones de la Tabla de Verdad.

a) Una de las aplicaciones de la tabla de verdad es para demostrar la equivalencia de dos proposiciones. Se enuncia así: **"Dos proposiciones son equivalentes cuando los resultados de sus matrices principales son iguales".** Se expresa mediante el símbolo ≡.

Ejemplo: Demuestra que las dos proposiciones son equivalentes:

$$[\sim (p \wedge q) \vee \sim r] \equiv [\sim (p \wedge q \wedge r)]$$

p	*q*	*r*	[~ (*p* ∧ *q*) ∨ ~ *r*]		
V	V	V	F	**F**	F
V	V	F	F	**V**	V
V	F	V	V	**V**	F
V	F	F	V	**V**	V
F	V	V	V	**V**	F
F	V	F	V	**V**	V
F	F	V	V	**V**	F
F	F	F	V	**V**	V

p	*q*	*r*	[~ (*p* ∧ *q* ∧ *r*)]	
V	V	V	**F**	V
V	V	F	**V**	F
V	F	V	**V**	F
V	F	F	**V**	F
F	V	V	**V**	F
F	V	F	**V**	F
F	F	V	**V**	F
F	F	F	**V**	F

Si comparamos las matrices principales de ambas proposiciones vemos que: $[\sim (p \wedge q) \vee \sim r] \equiv [\sim (p \wedge q \wedge r)]$, ya que sus valores de verdad correspondientes son iguales.

b) El desarrollo de la tabla de verdad resulta muy laborioso cuando el número de variables proposicionales son mayores que 4. Para evitar el engorroso y laborioso trabajo se utiliza el **método abreviado** que es de fácil manejo y de gran precisión; también es usado en inferencia lógica. Este método consiste en analizar la única posibilidad de ser falso la implicación ($p \to q$) si $\boldsymbol{v}$ (p) = V y $\boldsymbol{v}$ (q) = F. Pero para el caso de que una variable proposicional llegue a tener dos valores a la vez (V y F), entonces demostramos que no es posible para la conjunción de premisas sea V y la conclusión F. Por lo tanto, hay implicación y la inferencia es válida.

Ejemplo: Construye una tabla de verdad de la siguiente proposición:

$$\{[(p \vee q) \wedge (p \to r)] \wedge (q \to s)\} \to (r \vee s)$$

Las variables proposicionales son: p, q, r, s. Donde hay $2^4 = 16$ combinaciones:

1. Construyendo la tabla de verdad:

p	q	r	s	$\{[(p \vee q) \wedge (p \to r)] \wedge (q \to s)\} \to (r \vee s)$						
V	V	V	V	V	V	V	**V**		V	
V	V	V	F	V	F	F	**V**		V	
V	V	F	V	F	F	V	**V**		V	
V	V	F	F	F	F	F	**V**		F	
V	F	V	V	V	V	V	**V**		V	
V	F	V	F	V	V	V	**V**		V	
V	F	F	V	F	F	V	**V**		V	
V	F	F	F	F	F	V	**V**		F	
F	V	V	V	V	V	V	**V**		V	
F	V	V	F	V	F	F	**V**		V	
F	V	F	V	V	V	V	**V**		V	
F	V	F	F	V	F	F	**V**		F	
F	F	V	V	F	F	V	**V**		V	
F	F	V	F	F	F	V	**V**		V	
F	F	F	V	F	F	V	**V**		V	
F	F	F	F	F	F	V	**V**		F	

Como lo muestra la matriz principal, la proposición es una **Tautología**.

2. Aplicando el **método abreviado**:

$$\{[(p \vee q) \wedge (p \to r)] \wedge (q \to s)\} \quad \to \quad (r \vee s)$$

error

V V F V V F F V F F F F

V F F

De donde:

$(p \vee q) \wedge (p \to r) = V$

$(q \to s) = V$

$(r \vee s) = F$

Luego, los valores de verdad de las variables proposicionales son:

$\boldsymbol{v}$ (r) = F

$\boldsymbol{v}$ (s) = F

$\boldsymbol{v}$ (q) = F

$\boldsymbol{v}$ (p) = V y F (caso del método)

Por lo tanto, el método abreviado es válido, es decir la proposición es verdadera (Tautología)

c) La tabla de verdad es un potente instrumento de análisis para decidir la validez o no validez de una inferencia (argumento), tema que lo aplicaremos en la lección 6.

4.2 Leyes Lógicas

Las **leyes lógicas** también llamados **principios lógicos** vienen a ser formas proposicionales tautológicas de carácter general. A partir de las leyes lógicas se pueden generar otras tautologías y a la vez cualquier tautología se puede reducir a una de las leyes lógicas.

Las principales leyes lógicas son:

1. IDEMPOTENCIA

a) $p \vee p \equiv p$

b) $p \wedge p \equiv p$

2. CONMUTATIVA

a) $p \vee q \equiv q \vee p$

b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

3. ASOCIATIVA

a) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

b) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

c) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

4. DISTRIBUTIVA

a) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

b) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

c) $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

d) $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

5. IDENTIDAD O ELEMENTO NEUTRO

a) $p \vee \mathrm{F} \equiv p$, $p \vee \mathrm{V} \equiv \mathrm{V}$

b) $p \wedge \mathrm{F} \equiv \mathrm{V}$, $p \wedge \mathrm{F} \equiv \mathrm{F}$

6. COMPLEMENTO O INVERSO

a) $p \vee \sim p \equiv \mathrm{V}$

b) $p \wedge \sim p \equiv \mathrm{F}$

7. DOBLE NEGACIÓN

a) $\sim (\sim p) \equiv p$

b) $\sim \mathrm{V} \equiv \mathrm{F}$

c) $\sim \mathrm{F} \equiv \mathrm{V}$

8. LEYES DE MORGAN

a) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

b) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

9. CONDICIONAL

a) $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

b) $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ (transposición)

c) $\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

10. ABSORCIÓN

a) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

b) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

c) $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

d) $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

11. BICONDICIONAL

a) $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

b) $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

A continuación veremos el siguiente ejemplo:
Ejemplo: Simplifica las siguientes proposiciones:

a) $(p \wedge \sim q) \vee \sim (\sim p \vee q \wedge q)$

b) $[(p \rightarrow q) \vee \sim p] \wedge (\sim q \rightarrow p)$

Solución: Aplicando leyes lógicas:

a) $(p \wedge \sim q) \vee \sim (\sim p \vee q \wedge q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee \sim (\sim p \vee q)$
Por Idempotencia
$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim q)$
Por ley de Morgan
$\equiv p \wedge \sim q$
Por Idempotencia
$\equiv \sim (p \rightarrow q)$
Por ley de condicional

b) $[(p \rightarrow q) \vee \sim p] \wedge (\sim q \rightarrow p) \equiv [(\sim p \vee q) \vee \sim p] \wedge (q \vee p)$
Por ley de condicional
$\equiv [(\sim p \vee \sim p) \vee q] \wedge (p \vee q)$
Por conmutativa y asociativa
$\equiv (\sim p \vee q) \wedge (p \vee q)$
Por Idempotencia
$\equiv (p \vee q) \wedge q$
Por absorción
$\equiv q$

4.3 Ejercicios Resueltos

A. Construye una tabla de verdad de las siguientes proposiciones:

1. $\sim [(p \wedge q) \wedge \sim r]$
2. $[(q \leftrightarrow \sim p) \underline{\vee} r] \wedge [\sim (p \rightarrow r) \underline{\vee} q]$
3. $[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q$
4. $[(p \leftrightarrow q) \wedge q] \leftrightarrow q$

Solución:

1.

p	q	r	$\sim [(p \wedge q) \wedge \sim r]$		
V	V	V		**V**	F
V	V	F		**F**	V
V	F	V		**V**	F
V	F	F		**V**	F
F	V	V		**V**	F
F	V	F		**V**	F
F	F	V		**V**	F
F	F	F		**V**	F

La matriz principal da como resultado una **Contingencia.**

3.

p	q	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q$		
V	V	F	**V**	V
V	F	F	**V**	F
F	V	V	**V**	V
F	F	F	**V**	F

La matriz principal da como resultado una **Tautología.**

2 y 4 quedan para que el estudiante lo resuelva.

B. Demuestra que las dos proposiciones siguientes son equivalentes:

1. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
2. $(p \vee q) \equiv [(p \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)]$

Solución:

1.

p	q	r	$p \vee (q \wedge r)$		
V	V	V		**V**	
V	V	F		**V**	
V	F	V		**V**	
V	F	F		**V**	
F	V	V		**V**	
F	V	F		**F**	
F	F	V		**F**	
F	F	F		**F**	

p	q	r	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$		
V	V	V		**V**	
V	V	F		**V**	
V	F	V		**V**	
V	F	F		**V**	
F	V	V		**V**	
F	V	F		**F**	
F	F	V		**F**	
F	F	F		**F**	

Por tanto, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ya que los valores de verdad de las matrices principales son iguales:

2.

p	q	$p \vee q$			$[(p \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)]$		
V	V		**V**		F	**V**	F
V	F		**V**		F	**V**	V
F	V		**V**		V	**V**	F
F	F		**F**		V	**F**	V

Matrices principales iguales.

$\therefore (p \vee q) \equiv [(p \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)]$

C. ¿Cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas?

1. $\sim [\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim q] \equiv (p \rightarrow r)$
2. $\sim [\sim p \leftrightarrow q] \equiv p \leftrightarrow q$
3. $\sim \{(p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim p \vee q)]\} \equiv (p \rightarrow \sim q)$

Solución:

1. $\sim (p \wedge q) \wedge q$ por $\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

   $(\sim p \vee \sim q) \wedge q$ por $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

   $(q \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q) \equiv q \wedge \sim p \equiv q \rightarrow p$

   Se observa que $(q \rightarrow p) \not\equiv (p \rightarrow q)$ $\therefore$ Falso

2. $\sim \sim p \leftrightarrow q$ por $\sim (p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q$

   $p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow q$

   $\therefore$ Verdadero

3. $\sim \{(p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim p \vee q)]\} \equiv \sim (p \wedge q) \wedge \{\sim [p \wedge (\sim p \vee q)]\}$

   $\equiv \sim (p \wedge q) \wedge \sim (p \wedge q)$

   $\equiv \sim (p \wedge q)$ Idempotencia

   Como $\sim (p \wedge q) \equiv p \rightarrow \sim q$

   $\therefore$ Verdadero

D. Halla los valores de verdad de p, q, r, s en cada caso:

1. $(p \wedge \sim q) \rightarrow (r \rightarrow s)$ es falso.
2. $\{(p \vee \sim q) \rightarrow \sim r$ es falso; $[(q \veebar r) \vee \sim p]$ es verdadero y $[\sim (q \rightarrow \sim r) \vee p]$ es falso.

Solución:

1. Como $(p \wedge \sim q) \rightarrow (r \rightarrow s)$ es falsa, entonces.

$p \wedge \sim q = \text{V}$

$r \rightarrow s = \text{F}$

De donde:

$p \wedge \sim q = \text{V}$

V ∧ V, es decir: $\boldsymbol{v}\,(p) = \text{V}$

$\boldsymbol{v}\,(q) = \text{F}$

Además:

$r \rightarrow s = \text{F}$

V → F, es decir: $\boldsymbol{v}\,(r) = \text{V}$

$\boldsymbol{v}\,(s) = \text{F}$

2. Sabemos que:

i) $[(p \vee \sim q) \rightarrow \sim r] = \text{F}$, porque:

$\text{F}\ \text{V}\ \text{V}\ \boxed{\text{F}}\ \text{F}$

ii) $[(q \veebar r) \vee \sim p] = \text{V}$, porque:

$\text{F}\ \text{V}\ \text{V}\ \boxed{\text{V}}\ \text{V}$

iii) $[\sim (q \rightarrow \sim r) \vee p] = \text{F}$, porque:

$\text{F}\ \text{F}\ \text{V}\ \text{F}\ \boxed{\text{F}}\ \text{F}$

Por lo tanto: $\boldsymbol{v}\,(p) = \text{F}$

$\boldsymbol{v}\,(q) = \text{F}$

$\boldsymbol{v}\,(r) = \text{V}$

E. Simplifica los siguientes enunciados:

1. No es verdad que, ella es rubia o elegante.
2. No es verdad que, las rosas no son rojas si, y sólo si, las violetas son azules.
3. No es verdad que, si está lloviendo entonces hace frío.
4. No es verdad que, no hace frío y está lloviendo.

Solución:

1. Simbólicamente: $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ se lee: “Ella no es rubia ni elegante”
2. Simbólicamente: $\sim (\sim p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow q$ se lee: “Las rosas son rojas si, y sólo si, las violetas son azules”
3. Simbólicamente: $\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ se lee: “Está lloviendo y no hace frío”
4. Simbólicamente: $\sim (\sim p \wedge q) \equiv p \vee \sim q$ se lee: “Hace frío o no está lloviendo”

F. Si V indica Tautología, y; p, q son proposiciones entonces ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

1. $\{[p \wedge (q \vee p) \vee \sim \text{V}\} \leftrightarrow \text{V}$
2. $\{[(\text{V} \wedge p) \vee (\sim \text{V} \wedge q)] \wedge (q \vee p)\} \leftrightarrow p$

Solución:

1. Sabemos que:

$p \wedge (p \wedge q) \equiv p$ (Absorción)

$\sim \text{V} \equiv \text{F}$

Luego:

$\{[p \wedge (q \vee p) \vee \sim \text{V}\} \leftrightarrow \text{V}$

$p \vee \text{F} \leftrightarrow \text{V}$

$p \leftrightarrow \text{V}$

Dónde:
Si p = V, la proposición sería verdadera.
Si p = F, la proposición sería falsa.
Por lo tanto, la proposición es FALSA.

2. Simplificando:

$$\{[(V \wedge p) \vee (\sim V \wedge q)] \wedge (q \vee p)\} \equiv \{[p \vee (\sim V \wedge q)] \wedge (q \vee p)\}$$
$$\equiv \{[p \vee F] \wedge (q \vee p)\}$$
$$\equiv p \wedge (q \vee p) \quad \text{(Identidad)}$$
$$\equiv p \quad \text{(Absorción)}$$

Por lo tanto, la proposición es VERDADERA.

G. Usando Leyes Lógicas, simplifica:

1. $[p \vee (p \wedge q)] \wedge (\sim p \vee q)$
2. $[(p \wedge V) \vee (q \wedge \sim V)] \wedge (p \vee q)$

Solución:

1. $[p \vee (p \wedge q)] \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge (\sim p \vee q)$ Por absorción

$$\equiv (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \quad \text{Por distributiva}$$
$$\equiv F \vee (p \wedge q) \quad \text{Por inverso}$$
$$\equiv p \wedge q \quad \text{Por identidad}$$

2. $[(p \wedge V) \vee (q \wedge \sim V)] \wedge (p \vee q)$

$$\equiv [p \vee (q \wedge F)] \wedge (p \vee q) \quad \text{Por identidad}$$
$$\equiv (p \vee F) \wedge (p \vee q) \quad \text{Por identidad}$$
$$\equiv p \wedge (p \vee q) \quad \text{Por identidad}$$
$$\equiv p \quad \text{Por absorción}$$

H. Halla la proposición equivalente a:
"No ocurre que, el risomio es un músculo de la cara, incluso el deltoides es un músculo del tórax"

Solución:

Sean: p: El deltoides es un músculo del tórax.
q: El risomio es un músculo de la cara.

Formalizando tenemos: "no ocurre que, q incluso p".

Simbolizando: $\sim (q \wedge p)$

$$\equiv \sim (p \wedge q) \text{ (Conmutativa)}$$

Se lee:
"Es inadmisible que, el deltoides es un músculo del tórax y el risomio es un músculo de la cara"

4.4 Actividad de Aprendizaje

A. Construye una tabla de verdad de las siguientes proposiciones:

1. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim p \vee q$
2. $[(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow p$
3. $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee s)$
4. $\sim (\sim p \vee q) \rightarrow p$

B. ¿Cuál de las siguientes constituyen una Contingencia, una Contradicción o una Tautología?

1. $\sim [(p \wedge q) \wedge \sim r]$
2. $(p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$
3. $\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim [(\sim q) \rightarrow (\sim p)]$
4. $\sim [(p \wedge q) \vee r] \leftrightarrow [\sim (p \vee r) \vee \sim (q \vee r)]$

5. $[(p \wedge q \wedge r) \rightarrow s] \leftrightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (r \rightarrow s)]$
6. $[(p \vee q) \wedge r] \leftrightarrow [\sim (p \wedge r) \wedge \sim (q \wedge r)]$

C. Simplifica:

1. $[(\sim p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$
2. $[(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)] \wedge \sim (p \wedge q)$
3. $\sim \{(p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim p \vee q)]\} \wedge (p \rightarrow q) \wedge [(p \wedge q) \rightarrow r]$
4. $[\sim (p \wedge q) \wedge p] \vee \sim q$
5. $\{[(\sim q) \rightarrow (\sim p)] \rightarrow [(\sim p) \rightarrow (\sim q)]\} \wedge (p \wedge q)$
6. $\{[\sim \mathrm{F} \wedge (\sim p \rightarrow q)] \wedge \sim q\} \vee [\sim (p \rightarrow q) \wedge \sim \mathrm{F}]$
7. $\sim \{[(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge (\sim p \vee q))]\} \rightarrow \sim (p \vee q)$

D. Si V indica Tautología y; p, q son proposiciones entonces ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

1. $[(\sim \mathrm{V}) \wedge (\mathrm{V} \vee p)] \leftrightarrow \sim \mathrm{V}$
2. $\{[(q \vee p) \vee \sim (p \vee q)] \wedge (q \vee p)\} \leftrightarrow \mathrm{V}$
3. $\{[(p \vee \sim \mathrm{V} \vee q) \wedge \sim \mathrm{V}] \vee [(\mathrm{V} \wedge \sim p) \vee \mathrm{V}]\} \leftrightarrow \mathrm{V}$

E. Halla los valores de verdad de p, q, r, s, en cada caso:

1. $[(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow r]$ es falso; $[(r \veebar \sim p) \wedge \sim r]$ es verdadero, $[q \leftrightarrow (\sim p \wedge r)]$ es falso.
2. $[(q \leftrightarrow \sim (s \vee \sim q)]$ es verdadero, $[(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim (q \veebar r)]$ es falso, $[s \wedge \sim (q \vee r)]$ es falso.
3. $[(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge \sim r)]$ es falso; $[(r \wedge s) \leftrightarrow \sim (p \wedge q)]$ es verdadero, $\{[p \wedge (\sim s \vee \sim r)] \rightarrow [\sim (q \leftrightarrow r)]\}$ es falso.

F. Dadas las proposiciones: q = El jarabe Mucosolvan es contra la cistitis, p y r cualesquiera. Si $[(r \vee q) \rightarrow (r \rightarrow q)]$ es falsa. Halla el valor de verdad de:

1. $r \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$
2. $[r \leftrightarrow (p \wedge q)]$

G. Dadas las proposiciones:

p: Juan juega bien al fútbol

q: Liliana es la mejor alumna

r: Omar es buen amigo

s: Liliana es educadora

Después de hallar la forma más simple, escribe literalmente:

1. $[(p \wedge \sim q) \wedge (r \vee q) \wedge (p \vee \sim s) \wedge (\sim r \wedge s)]$
2. $[r \vee (r \vee q \wedge s) \vee (\sim r \wedge q)]$
3. $(q \wedge \sim p) \rightarrow (q \rightarrow p)$

H. Demuestra que las dos proposiciones siguientes son equivalentes:

1. $[\sim (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim r)] \equiv \{[p \wedge (p \vee \sim r)] \wedge \rightarrow (\sim q)\}$
2. $[(p \downarrow q) \downarrow (q \downarrow p)] \equiv (p \wedge q)$
3. $[(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q] \equiv \sim [(p \vee q) \wedge q]$
4. $(p \# q) \equiv [(q \vee \sim p) \wedge p]$
5. $\sim (p \rightarrow q) \equiv [(p \vee q) \wedge \sim q]$
6. $\sim (q \rightarrow p) \equiv (q \vee p) \wedge q$

I. Indica cuáles de las proposiciones son equivalentes:

1. Un número es primo si, y sólo si, es divisible solamente entre sí mismo y la unidad.
2. Un número es múltiplo de 7 si, y sólo si, la suma de los dígitos del número es múltiplo de 7.

J. Halla la proposición equivalente a:

1. Hay que pagar 100 nuevos soles y ser socio para ingresar al teatro.
2. 19 es primo porque 19 es primo ó 40 es par, y 40 es par.

4.5 Clave de Respuestas

A. Construye una tabla de verdad de las siguientes proposiciones:

2)

p	q	$[(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow p$		
V	V	F	**V**	V
V	F	V	**V**	V
F	V	F	**V**	F
F	F	F	**V**	F

4)

p	q	$\sim (\sim p \vee q) \rightarrow p$		
V	V	F	**V**	V
V	F	F	**V**	F
F	V	V	**V**	V
F	F	V	**V**	V

B. ¿Cuál de las siguientes constituyen una Contingencia, una Contradicción o una Tautología?

2)

p	q	$(p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$		
V	V	F	**V**	V
V	F	V	**V**	V
F	V	F	**V**	F
F	F	F	**V**	F

∴ La matriz principal da como resultado una Tautología.

4)

p	q	r	$\sim [(p \wedge q) \vee r] \leftrightarrow [\sim (p \vee r) \vee \sim (q \vee r)]$						
V	V	V		**F**	V	**V**	F	**F**	F
V	V	F		**F**	V	**V**	F	**F**	F
V	F	V		**F**	V	**V**	F	**F**	F
V	F	F		**V**	F	**V**	F	**V**	V
F	V	V		**F**	V	**V**	F	**F**	F
F	V	F		**V**	F	**V**	V	**V**	F
F	F	V		**F**	V	**V**	F	**F**	F
F	F	F		**V**	F	**V**	V	**V**	V

∴ La matriz principal da como resultado una Tautología.

6)

p	q	r	$[(p \vee q) \wedge r] \leftrightarrow [\sim (p \wedge r) \wedge \sim (q \wedge r)]$						
V	V	V		**V**		**F**	F	**F**	F
V	V	F		**F**		**F**	V	**V**	V
V	F	V		**V**		**F**	F	**F**	V
V	F	F		**F**		**F**	V	**V**	V
F	V	V		**V**		**F**	V	**F**	F
F	V	F		**F**		**F**	V	**V**	V
F	F	V		**F**		**F**	V	**V**	V
F	F	F		**F**		**F**	V	**V**	V

∴ La matriz principal da como resultado una Contradicción.

C. Aplicando leyes Lógicas:

2. $[(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)] \wedge \sim (p \wedge q)$

$\equiv [(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)] \wedge \sim (p \wedge q)$ Recíproca/Contrarrecíproca

$\equiv [(\sim p \vee q) \rightarrow (\sim q \vee p)] \wedge \sim (p \wedge q)$ Ley del condicional

$\equiv [\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim q \vee p)] \wedge \sim (p \wedge q)$ Ley del condicional

$\equiv [(p \wedge \sim q) \vee (p \vee \sim q)] \wedge \sim (p \wedge q)$ Morgan/Conmutativa

$\equiv \{[(p \wedge \sim q) \vee p] \vee \sim q\} \wedge \sim (p \wedge q)$ Ley asociativa

$\equiv \{(p \vee q) \vee \sim q\} \wedge \sim (p \wedge q)$ Ley de absorción

$\equiv (p \vee \sim q) \wedge \sim (p \wedge q)$ Ley de idempotencia

$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee \sim q)$ Identidad/Absorción

$\equiv \sim (p \wedge q)$ Asociativa/Morgan

4. $[\sim (p \wedge q) \wedge p] \vee \sim q \equiv [(\sim p \vee \sim q) \wedge p] \vee \sim q$ Morgan

$\equiv [(\sim p \wedge p) \vee (p \wedge \sim q)] \vee \sim q$ Distributiva

$\equiv [F \vee (p \wedge \sim q)] \vee \sim q$ Inverso

$\equiv [(p \wedge \sim q)] \vee \sim q$ Identidad

$\equiv \sim q$ Absorción

6. $\{[\sim F \wedge (\sim p \rightarrow q)] \wedge \sim q\} \vee [\sim (p \rightarrow q) \wedge \sim F]$

$\equiv \{[V \wedge (\sim p \rightarrow q)] \wedge \sim q\} \vee [\sim (p \rightarrow q) \wedge V]$ Por doble negación

$\equiv [(\sim p \rightarrow q) \wedge \sim q] \vee [\sim (p \rightarrow q)]$ Por identidad

$\equiv [(p \vee q) \wedge \sim q] \vee (p \wedge \sim q)$ Por ley de condicional

$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim q)$ Por absorción

$\equiv (p \wedge \sim q)$ Por idempotencia

D. Si V indica Tautología y: *p*, *q* son proposiciones entonces ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

2) $\{[(q \vee p) \vee \sim (p \vee q)] \wedge (q \vee p)\} \leftrightarrow V \equiv (V \vee F) \wedge (q \vee p)$

Si $q \vee p = V$, $\equiv V \wedge (q \vee p)$

$\sim (p \vee q) = F$, $\equiv q \vee p$ Por identidad

Por lo tanto, la proposición es Falsa.

E. Halla los valores de verdad de *p*, *q*, *r*, *s*, en cada caso:

2) Sabemos que:

i) $[s \wedge \sim (q \vee r)] = F$, porque:
V $\boxed{F}$ F F V V

ii) $[(q \leftrightarrow \sim (s \vee \sim q)] = V$, porque:
F $\boxed{V}$ F V V V F

iii) $[(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim (q \veebar r)] = F$, porque:
V V V F $\boxed{F}$ F F V V

Por lo tanto: $v(p) = V$

$v(q) = F$

$v(r) = V$

$v(s) = V$

F. Dadas las proposiciones:

2) Sabemos que:

q = El jarabe Mucosolvan es contra la Cistitis

p y r: cualesquiera

$[(r \vee q) \rightarrow (r \rightarrow q)] = F$, porque:
V V F $\boxed{F}$ V F F

De donde: $v(q) = F$

$v(r) = V$

$v(p) = V$ y F

Por lo tanto: $r \leftrightarrow (p \wedge q) = F$, porque:
V $\boxed{F}$ V F F

G. Dadas las proposiciones:

2) p: Juan juega bien al fútbol

q: Laura es la mejor alumna

r: Omar es buen amigo

s: Liliana es educadora

Simplificando:

$[r \vee (r \vee q \wedge s) \vee (\sim r \wedge q)] \equiv$
1 2 3

i) De la 1ra. y la 3ra.
$r \vee (\sim r \wedge q) \equiv r \vee q$ Por absorción

ii) $(r \vee q)$ con la 2da.
$(r \vee q) \vee (r \vee q \wedge s) \equiv (r \vee q) \vee [(r \vee q) \wedge s]$ Por asociativa
$\equiv r \vee q$ Por absorción

Por tanto, se lee:

"Omar es buen amigo o Laura es la mejor alumna"

H. Demuestra que las dos proposiciones siguientes son equivalentes:

2) Si son equivalentes
4) Si son equivalentes
6) No son equivalentes

I. Indica cuáles de las proposiciones son equivalentes:

2) No son equivalentes porque no es criterio de divisibilidad.

J. Halla la proposición equivalente a:

2) Formalizando:

p: 19 es primo
q: 40 es par

Simbólicamente:

$[(p \vee q) \wedge q) \rightarrow p \equiv q \rightarrow p$ Por absorción
$\equiv \sim q \vee p$ Por condicional
$\equiv \sim p \rightarrow \sim q$ Por transposición

Se lee:

"Si 19 no es primo, entonces 40 no es par"

"La contrariedad no es piedra en tu camino. Depende de ti transformarla en un escalón que te permita subir más arriba"

LECCIÓN 5

CUANTIFICADORES.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Comprender el funcionamiento lógico de los cuantificadores.
2. Aplicar los diagramas de Venn – Euler en análisis lógico de cuantificadores.
3. Conocer las principales propiedades lógicas de los cuantificadores.
4. Decidir el valor de verdad de proposiciones con cuantificadores.
5. Formalizar correctamente la negación y equivalencia lógica de proposiciones con cuantificadores.

5.1 Función proposicional

a) Función proposicional: Es todo enunciado abierto de la forma P(x), que tiene la propiedad de convertirse en una proposición al ser sustituida la variable por un valor específico.

b) Dominio de la variable: También llamado el **campo de valores de la variable**, está formado por todos los valores convenidos para la variable x. Lo presentaremos por D y lo demostraremos por **x** ∈ **D.**

Es decir, de acuerdo al concepto de **enunciado abierto** dada en la **lección 1**, la función proposicional sobre D es toda expresión P(x) tal que P(a) es verdadero o falsa para todo **a** ∈ **D.**

Ejemplos:

1. P(x): x + 4 > 7, es una función proposicional, cuyo dominio son los números naturales:
   Si x = 1 se tiene P (1): 1 + 4 > 7 (F)
   Si x = 5 se tiene P (5): 5 + 4 > 7 (V)

2. P(x): “x es peruano”, es una función proposicional y su dominio es todo ser humano:
   Si x = César Vallejo, P(x) es verdadero.
   Si x = Sócrates, P(x) es falso.

c) Solución de una función proposicional: Si al reemplazar la variable “x” por un valor específico “a” de su dominio, se obtiene una proposición verdadera, entonces el valor específico “a” es una solución de la función proposicional. Al conjunto de valores específicos que satisfacen a la función proposicional se llama **conjunto solución.**

Ejemplos: Si en P(x): 7x – 5 = 8 se hace el reemplazo x = 2 se tiene que:

P (2): 7(2) – 5 = 9 es verdadero. Luego 2 es una solución de P(x). Para algunas situaciones necesitamos referirnos a cuantos elementos de un conjunto cumplen con determinada cualidad. Para ello necesitamos establecer los **cuantificadores**.

5.2 Cuantificadores.

Los cuantificadores son una palabra o frase en una proposición que indica, en cierta forma, cuántos objetos o cosas cumplen con determinada propiedad.

Los cuantificadores son de dos tipos, el universal, (∀) y el existencial, (∃). Estos son usados dependiendo de si los enunciados a simbolizar son o bien **universales** (la totalidad de individuos que poseen alguna

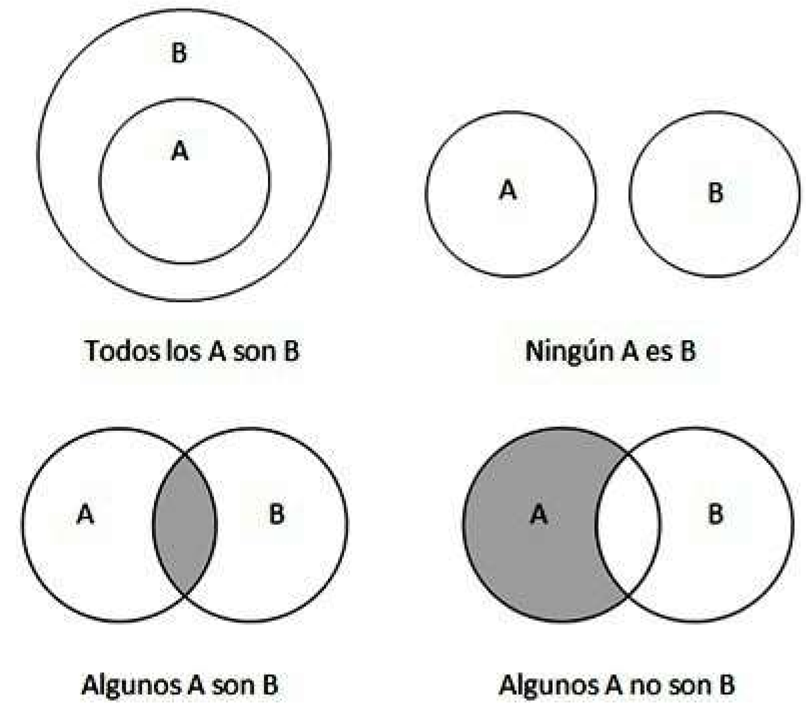
Unidad 1 / Lógica matemática

propiedad determinada) o bien **particulares** (tanto si son singulares – un solo individuo – o plurales – varios individuos – pero no todos los individuos) que poseen una propiedad determinada.

Veamos ahora la forma de obtener proposiciones mediante los diagramas de Venn – Euler:

a) Diagramas de cuantificadores:

Los diagramas de Venn – Euler nos proporcionan una idea del cuantificador con relación al número de elementos que cumplen con una propiedad.



Recuerde que estos diagramas representan a las cuatro proposiciones categóricas básicas.

Ejemplos:

1. Todos los menores que 6 son menores que 8.
2. Ningún par es impar.
3. Algunos pares son primos.
4. Algunos múltiplos de 5 no son pares.

b) Cuantificador Universal (∀):

Es una proposición de la forma:

"Para todo x, P(x)"; donde P(x) es una función proposicional y se simboliza:

"$\forall$ x: P(x)"

Conceptualiza: Para todo elemento x cumpliendo la proposición P(x).

Ejemplos:

1. "Todo hombre es mortal"
   Simbólicamente: "$\forall$ x $\in$ M: x es mortal"; donde M es el conjunto de los hombres mortales.
2. "Todos los múltiplos de 6 son múltiplos de 3"
   Simbólicamente: "$\forall$ x: x múltiplo de 6 implica que x es múltiplo de 3".

c) Cuantificador Existencial (∃):

Es una proposición de la forma:

"Existe x tal que, P(x)"; donde P(x) es una función proposicional, y se simboliza:

"$\exists$ x / P(x)"

Conceptualiza: Existe por lo menos un elemento x, tal que verifica P(x).

Ejemplos:

1. "Algunos estudiantes de la UNS son de Casma".
   Simbólicamente: "$\exists$ x $\in$ UNS / x es de Casma".
2. "Algunos (por lo menos uno) pares son primos".
   Simbólicamente: "$\exists$ x par, tal que x es primo".

   Observación: En matemáticas, un análisis cuidadoso de cuantificadores nos demuestra que la expresión: **"Existe un único elemento",** se refiere a un solo elemento únicamente cumpliendo la proposición P(x), se simboliza: **"$\exists$! x tal que P(x)"**

   Por ejemplo:

   P(x): "$\exists$! x par, que es primo" es verdadero, porque x = 2 es el único número par primo en la teoría de números.

d) Cuantificaciones de las formas categóricas típicas de la lógica tradicional:

1. Universal Afirmativo: "Todos los A son B" $\equiv \forall x\, [A(x) \rightarrow B(x)]$

Se lee: "Para todos los x, si es de A entonces x es de B".

Ejemplo: *Todos los hombres son mortales.*

2. Universal Negativo: "Ningún A es B" $\equiv \forall x\, [A(x) \rightarrow \sim B(x)]$

Se lee: "Para todo x, si x es de A entonces x no es de B".

Ejemplo: *Todos los hombres no son mortales.*

3. Particular Afirmativo: "Algunos A son B" $\equiv \exists x\, [A(x) \wedge B(x)]$

Se lee: "Para algún x, x es de A y x es de B".

Ejemplo: *Algunos hombres son mortales.*

4. **Particular Negativo:** “Algunos A no son de B” $\equiv \exists x\, [A(x) \wedge \sim B(x)]$

Se lee: “Para algunos x, x es A pero no es de B”.

Ejemplo: *Algunos hombres no son mortales.*

e) Negación de proposiciones con cuantificadores:

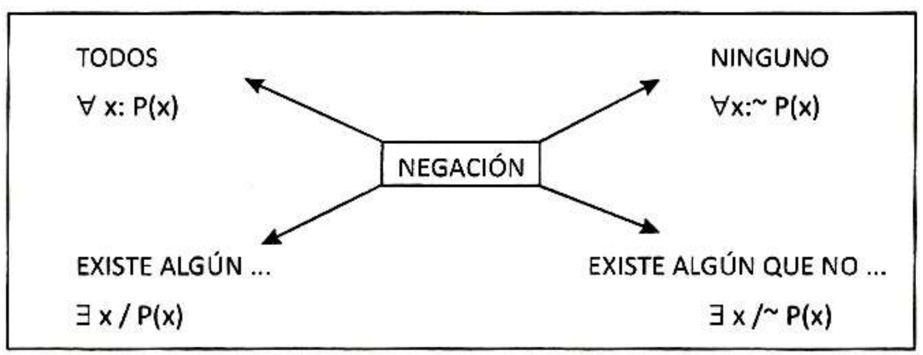
Las proposiciones cuantificadas: “$\forall x: P(x)$” y “$\exists x / P(x)$” se pueden negar obteniéndose otras proposiciones. Sus respectivas negaciones son:

$\sim (\forall x: P(x)) \equiv \exists x / \sim P(x)$
$\sim (\exists x: P(x)) \equiv \forall x / \sim P(x)$

Ejemplos: Da la negación de las siguientes proposiciones:

1. “Todos los hombres son mortales”.
   Negación: “Existen algunos hombres que no son mortales”.
2. “Existen algunos carnívoros que no son herbívoros”.
   Negación: “Todos los carnívoros son herbívoros”.

Es importante saber que en la **lógica matemática,** una manera fácil de recordar la negación es mediante el siguiente cuadro de oposición:



Ejemplos: Mediante símbolos escribe las proposiciones siguientes:

1. Algunos múltiplos de 5 no son pares.
   $\exists$ x, es múltiplo de 5 que no son pares.
2. Todos los rectángulos y todos los rombos son paralelogramos.
   $\forall$ x, rectángulo y $\forall$ x, rombo, x es paralelogramo.
3. Existe algún x tal que $x^2 = 16$.
   $\exists$ x tal que $x^2 = 16$

Ejemplos: Efectúa la negación de las proposiciones de los problemas anteriores:

1. Todos los múltiplos de 5 son pares.
   $\forall$ x, es múltiplo de 5 que son pares.
2. $\exists$ x, rectángulo ó x rombos tal que x no es paralelogramo.
3. Ninguna x es $x^2 = 16$

f) Reglas de la lógica cuantificacional (LC):

Para poder aplicar las distintas reglas de equivalencia y de implicancia (generalmente en argumentos lógicos), se requiere que los distintos elementos que componen las proposiciones se encuentran libres por lo que, durante el proceso operativo, no pueden estar cuantificados. De ahí la necesidad de estas reglas:

* **Regla de Eliminación del Universal (EU):** Consiste en eliminar el cuantificador universal y reemplazar la variable cuantificada por una variable libre ya sea una constante individual o una variable individual.

Por ejemplo:

Sea la proposición el siguiente: $\forall x: S(x) \rightarrow P(x)$
Por la regla de Eliminación del Universal (EU) obtenemos el siguiente esquema no cuantificado: $S(x) \rightarrow P(x)$.

* **Regla de Introducción del Universal (IU):** Es la regla inversa a la anterior. En ella iniciamos con un esquema no cuantificado.

Por ejemplo: S(y) → P(y)

Este esquema es luego cuantificado, pero, así como el descuantificador en el caso anterior se reemplazó una variable cuantificada por otra no cuantificada, igual, en este caso, tenemos que reemplazar la variable no cuantificada por otra cuantificada.

Por la regla de Introducción del Universal (IU) obtenemos el siguiente esquema cuantificado: ∀ x: S(x) → P(x)

* **Regla de Eliminación del Existencial (EE):** Esta regla consiste en eliminar el cuantificador existencial y reemplazar la variable cuantificada por una variable libre ya sea una constante individual.

Por ejemplo:

Sea la proposición el siguiente: ∃ x / S(x) ∧ P(x)
Por la regla de Eliminación del Existencial obtenemos el siguiente esquema no cuantificado: S(y) ∧ P(y).

Finalmente, tenga cuidado se aplica la Eliminación del Existencial, el objeto de referencia cuantificado debe ser reemplazado por un nombre propio o constante individual ésta no tiene que haber sido aún utilizada, para evitar confusiones. De ahí que en caso de tener que aplicar una EU y una EE, se represente la variable descuantificada de éste último por aquella que reemplaza a la del existencial.

* **Regla de Introducción del existencial (IE):** Esta regla inversa a la anterior. En ella iniciamos con un esquema no cuantificado.

Por ejemplo: S(y) ∧ P(y).

Este esquema es luego cuantificado, pero, así como al descuantificador en el caso anterior se reemplazó por una variable

cuantificada por otra no cuantificada, igual en este caso tenemos que reemplazar la variable no cuantificada por otra cuantificada.

Por la regla de Introducción del Existencial (IE) obtenemos el siguiente esquema cuantificado: ∃ x / S(x) ∧ P(x)

5.3 Ejercicios Resueltos.

A. Analiza los siguientes enunciados, para:

1. Determina cuales son proposiciones.
2. Determina cuales son funciones proposicionales.
3. Determinar el valor de verdad de las proposiciones.

a) $x + 5 = 10$
b) $\forall x: x + 5 = 10$
c) x es hermano de Liliana.
d) ∃ x: x es hermano de Liliana.
e) $\forall x \in \mathbb{N}: x + 2 > x$
f) $x + y \leq z$
g) $\exists x \in \mathbb{N}: \forall y \in \mathbb{N}: y.x = y$

Solución:

1. Son proposiciones: b), d), e) y g) porque son cuantificadores.
2. Son funciones proposicionales: a), c) y f).
3. Valor de verdad de la proposiciones:

b) Es falsa; suponiendo que el dominio de la variable es $\mathbb{N}$, existen naturales que no satisfacen $x + 5 = 10$.
d) Su valor de verdad depende de la realidad física concreta.
e) Es verdadera; pues a todo natural que se le adicione 2, se obtiene un natural mayor que el primero.
g) Es verdadera; porque la x que existe vale 1.

B. Expresa en palabras las siguientes proposiciones:

1. $\exists x / x + 7 = 3$
2. $\forall x, \exists y: x + y = 10$

3. $\forall$ x, $\forall$ y, $\forall$ z: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
4. $\forall x \in \mathbb{N}$: $x + 1 > x$

Solución:

1. Existe x, tal que x + 7 = 3.
2. Para todo x, existe y, tal que x + y = 10.
3. Para todo x; para todo y, existe z, tal que $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
4. Para todo x perteneciente a los números naturales, x + 1 > x

C. Sean P(x) = x es par; Q(x) = x divide a 44; $x \in \mathbb{N}$.
Escribe literalmente:

1. $\forall$ x: P(x) $\vee$ Q(x)
2. $\exists$ x / [P(x) $\rightarrow \sim$ Q(x)]
3. $\exists$ x / $\sim$ [P(x) $\wedge$ Q(x)]

Solución:

1. Todo natural es par o divide a 44.
2. Cuando menos un natural, si es par entonces no divide a 44.
3. Algún número natural, no cumple que, es par y divide a 44.

D. Si M = {1, 2, 3, 4, 5}; determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

1. $\exists x \in A$ / x + 3 = 10
2. $\forall x \in A$: x + 3 < 7
3. $\forall x \in A$, $\exists y \in A$: x.y < 20
4. $\exists x \in A$, $\forall y \in A$: $\frac{x}{y} \in \mathbb{N}$

Solución:

1. Si tomamos x = 5, entonces $5 + 3 \neq 10$, lo mismo con 1, 2, 3 y 4.
   Por tanto, la proposición es FALSA.
2. Si tomamos x = 4 se tiene $4 + 3 \not< 7$, luego no se cumple.
   Por consiguiente, la proposición es FALSA.
3. Si x = 1, 2, 3, 4, 5 $\wedge$ y = 3 se tiene 5.3 < 20.
   Por tanto, la proposición es VERDADERA.

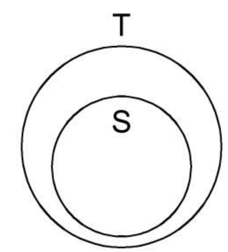
4. Si x = 1 $\wedge$ y = 1, 2, 3, 4, 5 se tiene $\frac{5}{1} \in \mathbb{N}$, $\frac{4}{1} \in \mathbb{N}$, … etc.
   Por tanto, la proposición es VERDADERA.

E. Dibuja diagramas de Venn – Euler que ilustre las siguientes proposiciones:

1. Todos los múltiplos de 6 son múltiplos de 3.
2. Las líneas paralelas entre si no, se intersecan.
3. Algunos impares son múltiplos de 3.
4. Los enfermeros y los médicos son profesionales de la salud.
5. No hay espárragos que no sean nutrientes.
6. Es falso que varios no peruanos sean no sudamericanos.

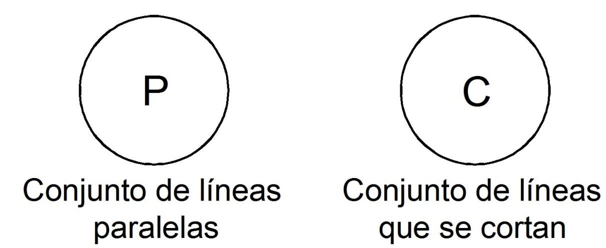
Solución:

1.

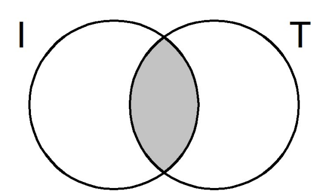


S = Múltiplo de 6
T = Múltiplo de 3

2.

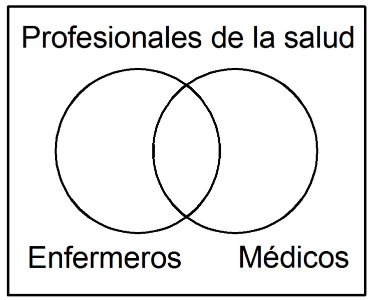


3.

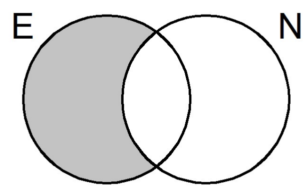


I = Números impares
T = Múltiplos de 3

4.

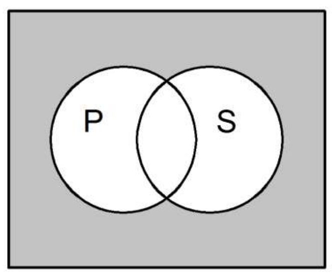


5.



E = Espárragos
N = Nutrientes

6.



P = Peruanos
S = Sudamericanos

F. Si p: $\exists\, x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 2x + 5 = 0$

q: $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $x^2 + 1 > 0$

r: $\exists\, x \in \mathbb{N} \,/\, x + 3 = 0$

Halla el valor de verdad de cada proposición.

Unidad 1 / Lógica matemática

Solución: Hallando el valor de verdad de p, q, y r:

i) p: $\exists\, x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 2x + 5 = 0$, observamos el discriminante $\Delta = (-2)2 - 4(1)(5)$, resulta que $\Delta = -16$; lo que indica que la ecuación no tiene solución real. Por tanto, $v(p)$ = falso.

ii) q: $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $x^2 + 1 > 0$, se observa que $x^2 > -1$, es verdadero, porque el cuadrado de cualquier número real siempre será positivo (o mayor que cualquier número negativo).
Por tanto, $v(q)$ = verdadero.

iii) r: $\exists\, x \in \mathbb{N} \,/\, x + 3 = 0$, resolviendo la ecuación $x = -3 \notin \mathbb{N}$
Por tanto, $v(r)$ = falso.

G. Halla el equivalente de la negación:

1. $\exists\, x \,/\, x^2 < x$
2. $\forall\, x$: $x - 2 = x$
3. $\exists\, y$: $\forall\, x$: $x.y \leq 2$
4. $\forall\, x$: $\exists\, y \,/\, [x + y = 2 \wedge y \leq x]$
5. $(\exists\, x \,/\, x + 7 > 1) \wedge (\forall\, x\text{: } x + 0 = x)$
6. $(\forall\, x\text{: } x = x) \rightarrow (\exists\, x \,/\, x^2 < x)$

Solución:

1. Negación: $\sim (\exists\, x \,/\, x^2 < x)$
   Equivalencia: $\forall\, x \,/\, x^2 \not< x$
2. Negación: $\sim (\forall\, x \,/\, x - 2 = x)$
   Equivalencia: $\exists\, x \,/\, x - 2 \neq x$
3. Negación: $\sim [\exists\, y\text{: } \forall\, x\text{: } x.y \leq 2]$
   Equivalencia: $\forall\, y\text{: } \exists\, x \,/\, x.y > 2$
4. Negación: $\sim [\forall\, x\text{: } \exists\, y \,/\, (x + y = 2 \wedge y \leq x)]$
   Equivalencia: $\exists\, x\text{: } \forall\, y\text{: } (x + y \neq 2) \vee (y > x)$
5. Negación: $\sim [(\exists\, x \,/\, x + 7 > 1) \wedge (\forall\, x\text{: } x + 0 = x)]$
   Equivalencia: $(\forall\, x\text{: } x + 7 \leq 1) \vee (\exists\, x \,/\, x + 0 \neq x)$

6. Negación: $\sim [(\forall\ x: x = x) \rightarrow (\exists\ x / x^2 < x)]$
   Equivalencia: $(\forall\ x: x = x) \wedge \sim (\exists\ x / x^2 < x)$
   $\equiv (\forall\ x: x = x) \wedge (\forall\ x: x^2 \geq x)$

H. Halla el equivalente de la negación de:
1. Es de día y todos se han levantado.
2. Alguien viene o Melva es peruana.

Solución:

1. Simbólicamente: $p \wedge (\forall\ x: Q\ (x))$
   Negación: $\sim [p \wedge (\forall\ x: Q\ (x))]$
   Equivalencia: $\sim p \vee \sim [\forall\ x: Q\ (x)]$
   $\equiv \sim p \vee [\exists\ x / \sim Q\ (x)]$
   Se lee: "No es de día o alguien no se ha levantado"

2. Simbólicamente: $(\exists\ x / P\ (x) \vee q)$
   Negación: $\sim [\exists\ x / P\ (x) \vee q]$
   Equivalencia: $\sim [\exists\ x / P\ (x)] \wedge \sim q$
   $\equiv [\forall\ x: \sim P\ (x)] \wedge \sim q$
   Se lee: "Todos no vienen y Melva no es peruana"

5.4 Actividad de aprendizaje.

A. Si $P(x): 5x + 1 > 10$, y se tiene que $x = y$, obtenga una función proposicional P (y) equivalente a P (x).

B. Expresa en forma simbólica utilizando el cuantificador adecuado y niegue las siguientes proposiciones.
1. No existe ningún entero x tal que $x - 5 = -5$.
2. Algunos mamíferos son acuáticos.
3. Ningún conjunto es subconjunto propio del conjunto vacío.
4. Existe algún $x \in \mathbb{R}$ / x es un número irracional.

5. Para todo entero x, $x - x = 0$
6. Algunos x son profesionales.
7. Todos los x son estudiantes y empleados.
8. Algunos x trabajan y otros estudian.

C. Sean P(x) = x es par; Q(x) = x divide a 44; $x \in \mathbb{N}$.
Escribe literalmente:
1. $\exists\ x / P(x) \wedge Q(x)$
2. $\forall\ x: P(x) \rightarrow Q(x)$
3. $\forall\ x: [\sim P(x) \leftrightarrow Q(x)$
4. $\sim [\exists\ x / P(x) \rightarrow \sim Q(x)]$

D. Si $x, y \in \mathbb{N}$, determina el valor de verdad de:
1. $(\forall\ x: x^2 > x) \rightarrow (\forall\ x: x < 3x)$
2. $(\forall\ x: x^2 > x) \rightarrow (\exists\ x / x = x)$
3. $\forall\ x: \exists\ y: x / y = 1$
4. $(\exists\ x / x + 3 = 5) \rightarrow (\forall\ x: x + 1 \geq x)$
5. $\forall\ x: \forall\ y: x - y = 1$
6. $(\exists\ x / x - 1 > 2) \leftrightarrow (\forall\ x: x \geq x)$
7. $(\exists\ x / 2x - 4 = x) \wedge (\forall\ x: 2x - 5 < 5)$
8. $\exists\ x: \forall\ y: x.y = 1$

E. Dibuja diagramas de Venn – Euler que ilustren las siguientes proposiciones:
1. Es indudable que ningún deportista es no perseverante.
2. El cuadrado de todo número natural es natural.
3. No todos los ingenieros son químicos
4. Existen algunos pares que son menores que 10.
5. Es mentira que ningún agricultor no es técnico.
6. Ningún $x < 5$ es $x > 9$
7. Algunos no profesionales son no médicos.
8. Algunos reptiles no son anfibios.

F. Los elementos del conjunto A, son las raíces de la ecuación: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, con ellos, halla el valor de verdad de:

1. $[\forall\, x \in A: (\frac{1}{2})^{-1} \leq X^3 - 1] \rightarrow (\exists\, x \in A \,/\, x^2 - x = 2)$
2. $[\exists\, x \in A \,/\, (x^2)^6 = x] \wedge [\forall\, x \in A: \frac{1}{x} \leq (5 - 2x).x^{-2} + x^{-2}]$
3. $(\exists\, x \in A \,/\, x^3 + x^2 = 36) \leftrightarrow (\forall\, x \in A: \frac{2x + 4}{\sqrt{x} + 2} \leq \sqrt{x} - 2)$

G. Si $U = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -10 \leq x \leq 10\}$, y sean:

p: $\forall\, x \in U, \exists\, y \in U \,/\, (x + y = 5) \rightarrow (x + 1 = 6)$

q: $\forall\, x \in U, \forall\, y \in U: [x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)]$

r: $\forall\, x \in U, \exists\, y \in U \,/\, (2x + 1 = y) \leftrightarrow (x - 2 \leq y)$

Halla el valor de verdad de cada proposición y luego el de:

$$[r \wedge (p \,\underline{\vee} \sim q)] \rightarrow (\sim p \wedge q)$$

H. Escribe la siguiente proposición:
"$\forall\ \overline{MN}$ y $\forall$ punto P fuera de $\overline{MN}$, $\exists!\ \overline{QR}$, que contiene al punto P de tal forma que $\overline{QR} \,//\, \overline{MN}$"

I. Niega y halla el equivalente de:

1. $(\exists\, x \,/\, x > 3) \wedge (\forall\, y: y < 2)$
2. $\forall\, x: \forall\, y: \exists\, z \,/\, x + y = z$
3. $(\forall\, x: x = x) \rightarrow (\forall\, y: y \neq y)$
4. $(\exists\, x \,/\, x = 3) \vee (\forall\, y: y^2 > 2)$
5. $\forall\, x: \exists\, y: \forall\, z: [x > y \vee (x - y < y)]$
6. $(\exists\, x \,/\, x < 3) \leftrightarrow (\exists\, x \,/\, x \geq x)$
7. $(x \geq y) \leftrightarrow \sim (\exists\, x: \forall\, y: \frac{x}{y} \leq \frac{y}{x})$
8. $(\forall\, x: \exists\, y \,/\, x < y) \rightarrow \sim (\exists\, x \,/\, x > 3)$
9. $\sim (\forall\, x: \exists\, y: \exists\, z: \frac{x}{y} > z) \wedge \sim (\exists\, x: \forall\, y: \frac{x}{y} \neq x.y)$
10. $(\forall\, x: \exists\, y \,/\, x \neq y) \vee \sim (\forall\, x: \forall\, y: x \leq y)$.

J. Halla el equivalente de la negación:

1. Omar es estudioso luego todos lo quieren.
2. Todos somos patriotas y algunos serán congresistas.
3. Ofelia es mi amiga y todos la estiman.
4. Existe un único $x \in \mathbb{N}$ tal que $x^2 = 9$.
5. Los seres humanos no son perfectos.
6. No es el caso que algunos sean políticos.
7. Algunos hombres no son médicos o enfermeros.

5.5 Clave de Respuestas.

A. Aplicando la propiedad de sustitución para la igualdad:
"$x = y \rightarrow [P(x) \leftrightarrow P(y)]$"
Si $x = y$ $P(x)$: $5x + 1 > 0$ entonces $P(y)$: $5y + 1 > 0$
Es decir: $5x + 1 > 0 \leftrightarrow 5y + 1 > 0$

B. 2) "Algunos mamíferos son acuáticos"
Simbólicamente: "$\exists$ x / x es mamífero acuático"
Negación: "Ningún mamífero es acuático"
"$\forall$ x: x no es mamífero acuático"

4) "Existe algún $x \in \mathbb{R}$ / x es un número irracional"
Simbólicamente: "$\exists\, x \in \mathbb{R}$ / x es un número irracional"
Negación: "Ningún $x \in \mathbb{R}$ es un número irracional"
"$\forall\, x \in \mathbb{R}$: x no es un número irracional"

6) "Algunos x son profesionales"
Simbólicamente: "$\exists$ x / x es un profesional"
Negación: "Ningún x es un profesional"
"$\forall$ x: x no es un profesional"

8) "Algunos x trabajan y otros estudian"
Simbólicamente: "$\exists\, x \,/\, P(x) \wedge Q(x)$"
Negación: "Ningún x, trabajan y estudian"
$\sim [\exists\, x \,/\, P(x) \wedge Q(x)] \equiv \forall\, x \,/ \sim [P(x) \wedge Q(x)]$

C. 2) “Todo número natural, si es par entonces divide a 44”.

4) “No se cumple que, si existe un número natural que es par entonces no divide a 44” ≡ “Todo natural es par y divide a 44”.

D. 2) $(\forall\ x: x^2 > x) \rightarrow (\exists\ x / x = x)$

Si $x = 1$; $(1^2 > 1) \rightarrow (1 = 1)$

F $\boxed{V}$ V $\therefore$ Es Verdadero

4) $(\exists\ x / x + 3 = 5) \rightarrow (\forall\ x: x + 1 \geq x)$

Si $x = 2$; $(2 + 3 = 5) \rightarrow (2 + 1 \geq 2)$

V $\boxed{V}$ V $\therefore$ Es Verdadero

6) $(\exists\ x / x - 1 > 2) \leftrightarrow (\forall\ x: x \geq x)$

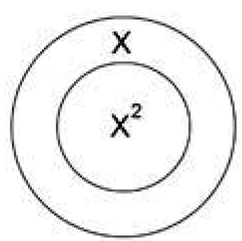
Si $x = 1$; $(1 - 1 > 2) \leftrightarrow (1 \geq 1)$

F $\boxed{F}$ V $\therefore$ Es Falso

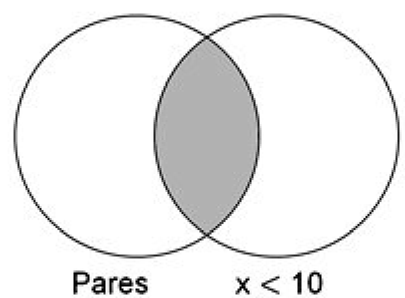
8) $\exists\ x: \forall\ y: x.y = 1$

Si $x = 1 \wedge y = 1$ se tiene $1(1) = 1$; pero no se cumple para todo valor $y \in \mathbb{N}$, $y > 1$. Por tanto, es falso.

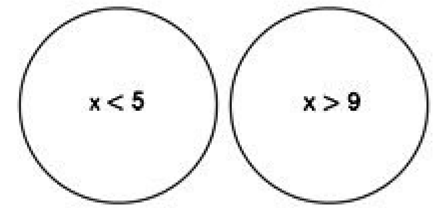
E. 2)



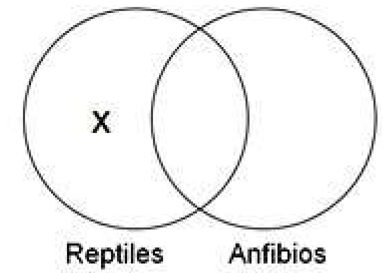
4)



6)



8)



F. 2) Hallando las raíces de la ecuación $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Por Ruffini:

	1	-6	11	-6
$x_1 = 1$		1	-5	6
	1	-5	6	$\boxed{0}$
$x_2 = 2$		2	-6	
	1	-3	$\boxed{0}$	
$x_3 = 3$		3		
	1	$\boxed{0}$		

De donde A = {1, 2, 3}
Luego, si $x = 1 \wedge x = 3$, tenemos:

$[1 \in A / (1^2)^6 = 1] \wedge 3 \in A: \{\frac{1}{3} \leq [5 - 2(3)]\ 3^{-2} + 3^{-2}\}$

$(1 = 1) \wedge (\frac{1}{3} \leq 0)$

V $\boxed{F}$ F $\therefore$ Es Falso

G-H: Quedan para el estudiante.

I. 2) Negación: $\sim (\forall x: \forall y: \exists z / x + y = z)$
Equivalencia: $(\exists x: \exists y: \forall z / x + y \neq z)$

4) Negación: $\sim [(\exists x / x = 3) \vee (\forall y: y^2 > 2)]$
Equivalencia: $\sim (\exists x / x = 3) \wedge \sim (\forall y: y^2 > 2)$
$\equiv (\forall x: x \neq 3) \wedge (\exists y / y^2 \leq 2)$

6) Negación: $\sim [(\exists x / x < 3) \leftrightarrow (\exists x / x \geq x)]$
Equivalencia: $[(\exists x / x < 3) \Delta (\exists x / x \geq x)]$

8) Negación: $\sim [(\forall x: \exists y / x < y) \rightarrow \sim (\exists x / x > 3)]$
Equivalencia: $(\forall x: \exists y / x < y) \wedge (\exists x / x > 3)$

10) Negación: $\sim [(\forall x: \exists y / x \neq y) \vee \sim (\forall x: \forall y: x \leq y)]$
Equivalencia: $\sim (\forall x: \exists y / x \neq y) \wedge (\forall x: \forall y: x \leq y)$
$\equiv (\exists x: \forall y / x = y) \wedge (\forall x: \forall y: x \leq y)$

J. 2) Simbólicamente: $[\forall x: P(x) \wedge \exists x / Q(x)]$
Negación: $\sim [\forall x: P(x) \wedge \exists x / Q(x)]$
Equivalencia: $\sim [\forall x: P(x)] \vee \sim [\exists x / Q(x)]$
$\equiv \exists x / \sim P(x) \vee \forall x: \sim Q(x)$
Se lee: “Algunos no son patriotas o todos no son congresistas”

4) Simbólicamente: “$\exists! x \in \mathbb{N} / x^2 = 9$”
Negación: $\sim (\exists! x \in \mathbb{N} / x^2 = 9)$
Equivalencia: $\forall x \in \mathbb{N}: x^2 \neq 9$
Se lee: “Hay más de un $x \in \mathbb{N}$ tal que $x^2 = 9$”

6) Simbólicamente: “$\sim \exists x / P(x)$”
Negación: $\sim [\sim \exists x / P(x)]$
Equivalencia: $\exists x / \sim P(x)$
Se lee: “Algunos no son políticos”

> ***“El trabajo hecho con gusto y con amor,***
> ***es siempre una creación original y único”***

LECCIÓN 6

ARGUMENTOS LÓGICOS.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Identificar argumentos y reconocer sus partes.
2. Reconocer y representar la estructura interna de un argumento.
3. Reconocer y diferenciar un argumento válido de uno falso o no válido.
4. Formalizar los argumentos efectuados en el lenguaje natural.
5. Analizar los argumentos formalizados.
6. Decidir mediante el método de tablas de verdad y método abreviado la validez o no validez de los argumentos formalizados.
7. Comprender y asimilar la prueba formal de validez o no validez de un argumento con términos cuantificacionales.
8. Demostrar por el método de los diagramas de Venn – Euler la validez o no validez de argumentos.
9. Aplicar las implicaciones notables y leyes lógicas al análisis y prueba de argumentos.

6.1 ARGUMENTO LÓGICO

Definición: Un **argumento lógico** es un razonamiento o inferencia en el que a partir de una serie de enunciados llamados **premisas**, se obtiene un resultado llamado **conclusión**.

a) Indicadores de premisa: Son términos que suelen anteceder a las premisas. Entre las más usuales tenemos:

"Además"

"Teniendo en cuenta que"

"Partiendo de"

"Considerando que"

"En vista que"

etc.

b) Indicadores de conclusión: Son términos que suelen anteceder a la conclusión. Entre las más usuales tenemos:

"Por tanto"

"Por lo tanto"

"Concluyo que"

"Se concluye que"

"Se establece que"

"Se deduce que"

"De ahí que"

"Se sique que"

etc.

c) Estructura de un argumento: Un argumento puede tener una o más premisas así como una o más conclusiones (El presente texto, por ser de nivel introductorio consideramos una sola o única conclusión).

- **Primera estructura:** Se presenta cuando tenemos una premisa y una conclusión.

Ejemplo: Dado el siguiente argumento:

"El agua esta fría, entonces el agua no está caliente."

Solución:

Lo primero que tenemos que hacer es identificar cuántos enunciados tiene. En este caso el argumento posee dos enunciados:

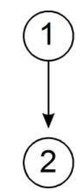
(1) [El agua esta fría,] entonces (2) [el agua no puede estar caliente.]

Identificando la (s) premisa (s) y la conclusión:

Premisa: El agua esta fría.

Conclusión: El agua no puede estar caliente.

Una vez identificada la premisa y la conclusión del presente argumento, pasamos a representar gráficamente su estructura interna:



- **Segunda estructura:** Se presenta cuando tenemos dos o más premisas y una conclusión puede derivarse de manera directa de cada una de las premisas con absoluta independencia de otros.

Ejemplo: Dado el siguiente argumento:

"Hoy es viernes, puesto que ayer fue jueves y mañana será sábado."

Solución:

Al igual que en el caso anterior, lo primero que tenemos que hacer es identificar cuántos enunciados tiene. En este caso el argumento posee tres enunciados, a saber.

(1) [Hoy es viernes,] puesto que (2) [ayer fue jueves] (3) [mañana será sábado]

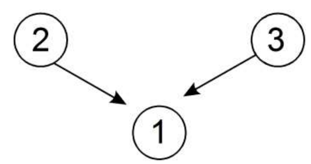
Identificando la (s) premisa (s) y la conclusión:

Premisa 1: Ayer fue jueves.

Premisa 2: mañana será sábado.

Conclusión: Hoy es viernes.

Aquí se observa que la conclusión puede derivarse o inferirse directamente de cada una de las premisas de manera independiente.



Representando gráficamente su estructura interna podemos observar como las premisas apoyan a la conclusión a través de flechas independiente.

- **Tercera estructura:** Se presenta cuando tenemos dos o más premisas y una conclusión pero a diferencia de la segunda estructura – la conclusión no puede derivarse de manera directa de cada una de las premisas con absoluta independencia de las otras sino que requiere que todas ellas la apoyen es simultáneo.

Ejemplo: Dado el siguiente argumento:

"Ofelia y Melva son las únicas hermanas de Rubén. Esta hermana no es Melva. De ahí que ésta hermana es Ofelia."

Solución:

Al igual que en el caso anterior, lo primero que tenemos que hacer es identificar cuántos enunciados tiene. En este caso el argumento posee tres enunciados:

(1) [Ofelia y Melva son las únicas hermanas de Rubén.] (2) [Esta hermana no es Melva] (3) De ahí que [ésta hermana es Ofelia]

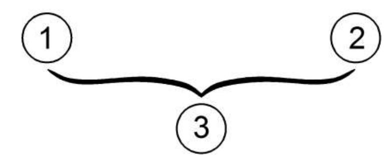
Identificando la (s) premisa (s) y la conclusión:

Premisa 1: Ofelia y Melva son únicas hermanas de Rubén.

Premisa 2: Esta hermana no es Melva.

Conclusión: Esta hermana es Ofelia.

En este argumento deducimos que la validez de la conclusión depende de ambas premisas. La representación gráfica de su estructura interna viene dado por:



En el gráfico se observa como las premisas se necesitan y/o apoyan recíprocamente para fundamentar la conclusión, por ello lo hacemos a través de llaves.

- **Cuarta estructura:** Se presenta cuando tenemos tres o más premisas y una conclusión, pero la conclusión puede derivarse de manera directa de por lo menos una de las premisas con absoluta independencia de la otras y a su vez puede también derivarse de dos o más premisas, pero no todas, actuando en conjunto.

Ejemplo: Dado el siguiente argumento:

"Todos los seres humanos son mortales. Héctor es un ser humano. Por tanto Héctor es mortal. Además se nos ha informado que Héctor acaba de morir."

Solución:

Al igual que en el caso anterior, lo primero que tenemos que hacer es identificar cuántos enunciados tiene. En este caso el argumento posee cuatro enunciados:

(1) [Todos los seres humanos son mortales.] (2) [Héctor es un ser humano] por tanto (3) [Héctor es mortal.]. Además (3) [se no ha informado que Héctor acaba de morir.]

Identificando las premisas y la conclusión:

Premisa 1: Todos los seres humanos son mortales.

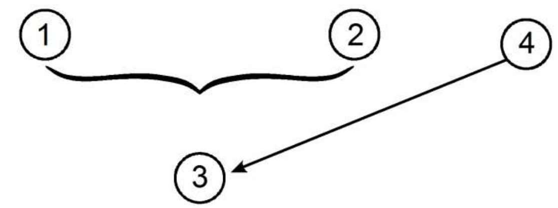
Premisa 2: Héctor es un ser humano.

Premisa 3: Héctor acaba de morir.

Conclusión: Héctor es mortal.

Nos damos cuenta que la validez de la conclusión depende de una sola premisa. Por ejemplo de la tercera premisa: "Héctor acaba de morir" nos basta para inferir que Héctor es mortal, puesto que únicamente los seres mortales mueren.

Una vez establecido el **modus operandi** del argumento, pasamos a representar de manera gráfica su estructura interna.



Finalmente este gráfico representa como las premisas apoyan a la conclusión a través de flecha independiente por el lado de la premisa de la cual se deriva de manera directa e independiente la conclusión, pero a su vez abarquemos mediante una llave las premisas que en conjunto permiten derivar la conclusión.

d) Validez de un argumento: Decimos que un argumento es válido si la implicación que tiene como hipótesis la conjunción de los datos o premisas y como conclusión la proposición que queremos demostrar, es una **Tautología.** Cuando un razonamiento no es válido se dice que es una **sofisma o falacia.**

OBSERVACIÓN 1: Las falacias son enunciados o razonamientos no válidos (pseudo razonamientos) que aparentemente son claros y además válidas, pero bien analizados, no lo son.

Las falacias se clasifican en dos grandes familias:

1. **Falacias formales:** Están referidos a las leyes de la lógica formal y constituyen fórmulas o esquemas de formas aparentemente correctas pero sobre las cuales un análisis lógico formal demuestra su no validez.

   Una falacia formal típica es la Falacia de Afirmación del consecuente.

2. **Falacias no formales:** Están referidos a un uso inadecuado del lenguaje natural para sustentar argumentos o en general expresar ideas y conceptos.

Las falacias no formales se dividen a su vez en dos grupos: Falacias de atinencia y Falacias de ambigüedad.

A continuación presentamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Identifica las premisas y la conclusión de los siguientes argumentos:

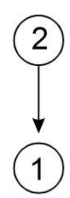
a) "Al hacer de las drogas un asunto criminal, de hecho hemos empeorado el problema. Si las despenalizamos, tendríamos solamente un grave problema de Salud Pública, un grave problema de corrupción y un grave problema de política exterior".

b) "… puesto que la reducción de sodio puede evitar el desarrollo de la hipertensión en algunas personas, y dado que una dieta alta en sales casi con certeza no es benéfica, reducir la sal en las comidas y reducir el consumo de bocadillos salados es probablemente una buena dieta".

Solución:

a) (1) [Al hacer de las drogas un asunto criminal, de hecho hemos empeorado el problema.] (2) [si las despenalizamos, tendríamos solamente un grave problema de Salud Pública, un grave problema de corrupción y un grave problema de política exterior.]

Esquematizando la estructura del argumento:



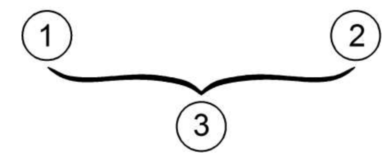
Así tenemos:

p1: Si las despenalizamos, tendríamos solamente un grave problema de Salud Pública, un grave problema de corrupción y un grave problema de política exterior.

Conclusión: Al hacer de la drogas un asunto criminal, de hecho hemos empeorado el problema.

b) … puesto que (1) [la reducción de sodio puede evitar el desarrollo de la hipertensión en algunas personas,] y dado que (2) [una dieta alta en sales casi con certeza no es benéfica,] (3) [reducir la sal en las comidas y reducir el consumo de bocadillos salados es probablemente una buena dieta.]

Esquematizando la estructura del argumento:



Así tenemos:

p1: La reducción de sodio puede evitar el desarrollo de la hipertensión en algunas personas.

p2: Una dieta alta en sales casi con certeza no es benéfica.

Conclusión: Reducir la sal en las comidas y reducir el consumo de bocadillos salados es probablemente una buena dieta.

Ejemplo 2: Formalice el siguiente razonamiento:
"Si llueve entonces habrá humedad. No hay humedad. Entonces no llovió"

Solución:

i) Simbolizando las proposiciones:

p: llueve

q: habrá humedad

ii) Simbolizando las premisas:

P_1: $p \rightarrow q$

P_2: $\sim q$

Conclusión: $\sim p$

iii) Formalizando el razonamiento:

$[(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$

Ejemplo 3: Formalice el siguiente argumento y luego determine, mediante la tabla de verdad, si es o no lógicamente válida:

"Si un número es múltiplo de 6, entonces es múltiplo de 3. 15 es múltiplo de 3. Por lo tanto; 15 es múltiplo de 6".

Solución:

i) Simbolizando las proposiciones:

P_1: Si un número es múltiplo de 6, entonces es múltiplo de 3.

P_2: 15 es múltiplo de 3.

Conclusión: 15 es múltiplo de 6.

ii) Simbolizando las premisas:

P_1: $p \to q$

P_2: q

Conclusión: p

iii) Formalizando el argumento:

$[(p \to q) \wedge q] \to p$

iv) Usando tabla de verdad:

p	q	$[(p \to q) \wedge q]$	$\to$	p
V	V	V	**V**	V
V	F	F	**V**	V
F	V	V	**F**	F
F	F	F	**V**	F

De donde, observamos que, no todos los valores de la matriz principal son verdaderos, entonces la proposición no es una Tautología. Por lo tanto, el argumento no es válido.

Unidad 1 / Lógica matemática

Ejemplo 4: Demuestra que el siguiente argumento es válido:

P_1: $p \to q$

P_2: $\sim q \vee r$

Conclusión: $p \to r$

Solución:

Forma 1: Usando tabla de verdad:

Tenemos que demostrar que la proposición.

$[(p \to q) \wedge (\sim q \vee r)] \to (p \to r)$

Es una tautología para determinar si el argumento es válido.

p	q	r	$[(p \to q)$	$\wedge$	$(\sim q \vee r)]$	$\to$	$(p \to r)$
V	V	V	V	**V**	V	**V**	**V**
V	V	F	V	**F**	F	**V**	**F**
V	F	V	F	**F**	V	**V**	**V**
V	F	F	F	**F**	V	**V**	**F**
F	V	V	V	**V**	V	**V**	**V**
F	V	F	V	**F**	F	**V**	**V**
F	F	V	V	**V**	V	**V**	**V**
F	F	F	V	**V**	V	**V**	**V**

Se observa que en la matriz principal todos los valores son verdaderos, entonces la proposición es una Tautología. Por lo tanto, el argumento es válido.

Forma 2: Usando leyes lógicas:

P_1: $p \to q$

P_2: $\sim q \vee r \equiv q \to r$ (ley del condicional)

Escribiendo en forma vertical:

P_1: $p \to q$
P_2: $q \to r$
Conclusión: $p \to r$

Se observa que le condicional es transitivo (ley del silogismo hipotético). Por lo tanto, el argumento es válido.

Ejemplo 5: Probar la validez o no del siguiente argumento:

"Si la circulación menor es del corazón a los pulmones, entonces la circulación mayor será del corazón a todo el organismo. Si las arterias pulmonares llevan sangre con CO_2, entonces las venas pulmonares llevan sangre oxigenada. La circulación menor es del corazón a los pulmones o las arterias pulmonares llevan sangre con CO_2. Por tanto, la circulación mayor es del corazón a todo el organismo o las venas pulmonares llevan sangre oxigenada".

Solución:

i) Simbolizando las proposiciones:

p: La circulación menor es del corazón a los pulmones.

q: La circulación mayor es del corazón a todo el organismo.

r: Las arterias pulmonares llevan sangre con CO_2.

s: Las venas pulmonares llevan sangre oxigenada.

ii) Simbolizando las premisas:

P_1: $p \to q$
P_2: $r \to s$
P_3: $p \lor r$
$\therefore\ q \lor s$

iii) Aplicando el Método Abreviado:

$[(p \to q) \land (r \to s) \land (p \lor r)] \to (q \lor s)$
V V V   V V V   V V V   V F V
error
V $\boxed{F}$ F

De donde:

$p \to q = V$
$r \to s = V$
$p \lor r = V$

Los valores de verdad de las variables proposicionales son:

$\boldsymbol{v}(p) = V$
$\boldsymbol{v}(q) = V$ y F (caso del método)
$\boldsymbol{v}(r) = V$
$\boldsymbol{v}(s) = V$ y F (caso del método)

El método se cumple. Por lo tanto el argumento es válido.

OBSERVACIÓN 2: La prueba de un argumento con términos cuantificacionales es de la misma naturaleza que la prueba en la lógica de inferencia.

A continuación describimos distintas posibilidades de combinación de proposiciones que nos permitirá analizar la relación entre verdad y falsedad de dichas proposiciones, además la validez y no validez de los razonamientos:

A1. Argumento no válido con premisas verdaderas y conclusión verdadera:

Algunos seres humanos son millonarios.
Algunos mamíferos son seres humanos.
Por tanto, algunos mamíferos son millonarios.

A2. Argumento no válido con premisas verdaderas y conclusión falsa:

Algunos perros son negros.
Algunos gatos son negros.

Por tanto, algunos gatos son perros.

A3. Argumento no válido con premisas falsas y conclusión verdadera:

Todos los felinos son negros.
Todos los felinos son gatos.

Por tanto, algunos gatos son negros.

A4. Argumento no válido con premisas falsas y conclusión falsa:

Todos los perros son negros.
Todos los gatos son negros.

Por tanto, todos los gatos son perros.

A5. Argumento válido con premisas verdaderas y conclusión verdadera:

Todos los peruanos son sudamericanos.
Algunos seres humanos son peruanos.

Por tanto, algunos seres humanos son sudamericanos.

A6. Argumento válido con premisas falsas y conclusión verdadera:

Todos los congresistas son menores de edad.
Todos los niños son congresistas.

Por tanto, todos los niños son menores de edad.

A7. Argumento válido con premisas falsas y conclusión falsa:

El agua se compone de sodio y cloro.
La luna es de queso.

Por tanto, la luna es de queso.

Ejemplo: Dado el argumento de A5, demuestra la validez del razonamiento:

Solución:

i) Simbolizando las premisas:

P_1: $\forall$ x: P (x) $\rightarrow$ S (x)

P_2: $\exists$ x / H (x) $\rightarrow$ P (x)

$\therefore$ $\exists$ x / H (x) $\rightarrow$ S (x)

Se lee: "Para todo x, si x es peruano entonces x es sudamericano. Algunos x, si x es un ser humano, entonces x es peruano. Por lo tanto, algunos x, si x es un ser humano, entonces x es sudamericano"

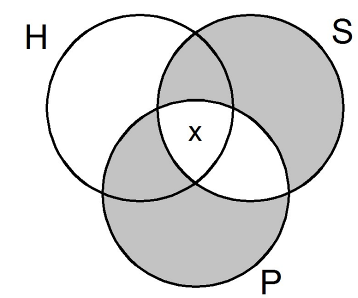
ii) Formalizando el argumento:

P_1: Todos los P son S.

P_2: Algunos H son P.

$\therefore$ Algunos H son S

Ilustrando mediante los diagramas de Venn – Euler:



iii) Aplicando reglas de la lógica cuantificacional.

1) P (Y) → S (Y) (de P_1 por EU)
2) H (Y) ∧ P (Y) (de P_2 por EE)
3) H (Y) (de (2) por simplificación)
4) S (Y) (de (1) y (3) por M. Ponens)
5) H (Y) ∧ S (Y) (de (3) y (4) por conjunción)
6) ∃ x / H (x) ∧ S (x) (de (5) por IE)

Con esto hemos demostrado que la conclusión si se deriva de las premisas por lo cual el argumento es válido.

Nota 1. Para la construcción de los diagramas de Venn – Euler para argumentos de dos o tres círculos (modo de Barbara y modo Darii) nos hemos atenido a las convenciones siguientes:

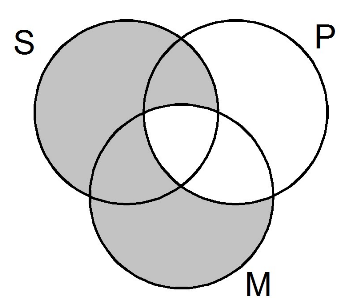
a) Para indicar falta de información sobre una clase (lógica de clases) dejamos en blanco el área que la representa;

b) Para negar la existencia de una clase sombreamos el área que la representa.

c) Para afirmar la existencia de una clase insertamos "x" en el área que la representa.

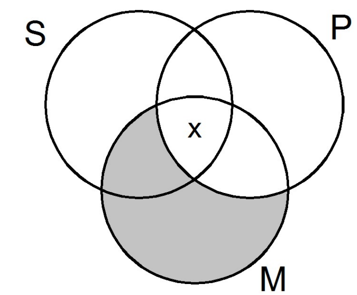
Por ejemplo:

i) Las dos premisas del **modo Barbara** son:
Todos los M son P
Todos los S son M
Según ello, dibujaremos el diagrama de Venn – Euler:



De acuerdo con el citado método, para indicar "Todos los M son P" se ha sombreado toda el área de M que se halla fuera de P; para indicar "Todos los S son M" se ha sombreado todo el área de S que se halla fuera de M.

ii) Las dos premisas de **modo Darii** son:
Todos los M son P
Algunos S son M
Según ello, dibujaremos el diagrama de Venn – Euler:



De acuerdo con el citado método, para indicar "Todos los M son P" se ha sombreado toda el área de M que se halla fuera de P; para indicar "Algunos S son M" se ha marcado con "x" el espacio en blanco donde S interseca con M.

Nota 2. La estrategia a seguir en una prueba de validez para un argumento en lógica cuantificacional es la siguiente:

1°. Formalización del argumento.

2°. Eliminación de los cuantificadores siguiendo las reglas de la lógica cuantificacional.

3°. Derivación de la conclusión utilizando tanto los principios de implicaciones notables como las reglas de equivalencia.

4°. Introducción de cuantificadores siguiendo las reglas respectivas.

Nota 3. La prueba de no validez consiste de probar que la conclusión propuesta no se deriva de las premisas dadas.

Dos son los métodos más comunes:

a) **Refutación por analogía:** Este método consiste en buscar un razonamiento estructuralmente idéntico al que se desea refutar pero que ponga en evidencia que la estructura lógica subyacente a dicho argumento no es válida.

Por ejemplo, tenemos el siguiente razonamiento:

Todos los demócratas son opositores de los republicanos.
Algunos delegados son opositores de los republicanos.

Por tanto, algunos delegado son demócratas.

b) **Refutación a través del cuadro de oposición:** Aquí la refutación está basada en relación lógica. Si podemos demostrar respecto a la conclusión del argumento o incluso a un enunciado que un enunciado o argumento lógicamente contradictoria con el primero es válida, se concluye que el primero no lo es. De ahí que, a manera de hipótesis, se trata del enunciado contradictorio para derivar de él la negación del enunciado primitivo.

Por ejemplo:

Sea nuestra conclusión o enunciado primitivo: "Todos los hombres son inmortales".

El enunciado lógicamente contradictoria pero ya formalizada:

(1) $H(y) \wedge \sim I(y)$

Ahora se intenta derivar la negación del enunciado original.

(2) $\exists x / H(x) \wedge \sim I(x)$ (de (1) por IE)
(3) $\exists x / \sim [\sim H(x) \vee I(x)]$ (de (2) por Morgan)
(4) $\exists x / \sim [H(x) \rightarrow I(x)]$ (de (3) por condicional)
(5) $\sim \forall x: H(x) \rightarrow I(x)$ (de (4) por neg. Cuantif.)

De este modo hemos probado que de la hipótesis lógicamente contradictoria si se deriva la negación de la conclusión o enunciado original. Con ello queda demostrado la invalidez del enunciado original.

6.2 Implicaciones Notables

Las implicaciones notables representan argumentos sencillo que la mente humana reconoce fácilmente. La verificación de estas implicaciones también se pueden usando los diagramas de Venn – Euler.

A continuación escribimos las implicaciones notables:

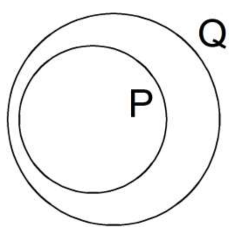
a) Principio de desligamiento (MODUS PONENS):

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

Forma Clásica:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ \therefore\ q \end{array}$$

Forma Diagrama de Venn – Euler:



Este principio indica: "Si se afirma el antecedente de una premisa condicional, se concluye en la afirmación del consecuente".

Ejemplo:

P_1: Si hace calor, entonces el agua de la piscina está caliente.
P_2: Hace calor.

Por tanto: El agua de la piscina está caliente.

Aplicando el principio, este razonamiento es válido.

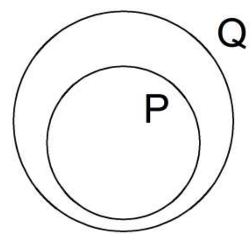
b) Principio de Contraposición (MODUS TOLLENS):

$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

Forma Clásica:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{\sim q} \\ \therefore\ \sim p \end{array}$$

Forma Diagrama de Venn – Euler:



Este principio indica: “Si se niega el consecuente de una premisa condicional, se concluye en la negación del antecedente”.

Ejemplo:

P_1: Si Ofelia estudió, entonces aprobó Bioquímica.
P_2: Ofelia no aprobó Bioquímica.

Por tanto: Ofelia no estudió.

Aplicando el principio, este razonamiento es válido.

Unidad 1 / Lógica matemática

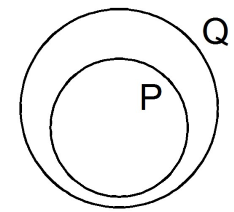
c) Principio de Simplificación:

$[(p \wedge q) \rightarrow p] \vee [(p \wedge q) \rightarrow q]$

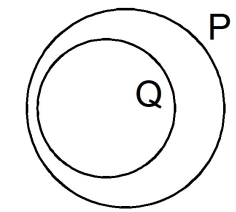
Forma Clásica:

$$\begin{array}{l} \underline{p \wedge q} \\ \therefore\ p \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{l} \underline{p \wedge q} \\ \therefore\ q \end{array}$$

Forma Diagrama de Venn – Euler:



o



Este principio indica: “Que de una premisa conjuntiva se puede concluir en cualquiera de sus miembros”.

Ejemplo:

P_1: Si Omar es médico y Liliana es profesora.

Por tanto: Omar es médico.

Aplicando el principio, este razonamiento es válido.

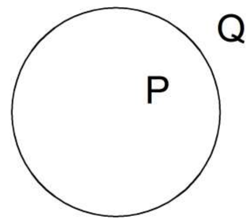
d) Principio de Inferencia Equivalente:

$[(p \leftrightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

Forma Clásica:

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ \underline{p} \\ \therefore\ q \end{array}$$

Forma Diagrama de Venn – Euler:



Este principio indica: "Si uno de los miembros de la premisa bicondicional es verdadero, entonces el otro miembro es verdadero".

Ejemplo:

P_1: 4 - 4 = 0 si, y sólo si 4 = 4
P_2: 4 - 4 =0

Por tanto: 4 - 4 = 0

Aplicando el principio, este razonamiento es válido.

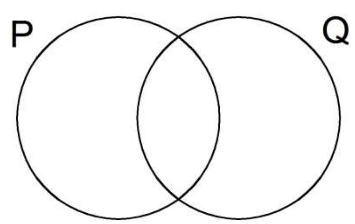
e) Principio de Silogismo Disyuntivo (MODUS TOLLENS PONENS):

$\{[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q\} \quad \vee \quad \{[(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow p\}$

Forma Clásica:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\sim p} \\ \therefore \; q \end{array} \qquad \text{o} \qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\sim q} \\ \therefore \; p \end{array}$$

Forma Diagrama de Venn – Euler:



Este principio indica: "Si se niega uno de los miembros de una premisa disyuntiva, se concluye en la afirmación del otro miembro".

Ejemplo:

P_1: 15 es número par o múltiplo de 5
P_2: 15 no es par

Por tanto: 15 es múltiplo de 5.

Aplicando el principio, este razonamiento es válido.

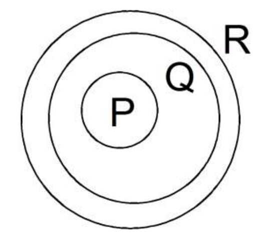
f) Principio del Silogismo Hipotético (SH):

$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

Forma Clásica:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{q \rightarrow r} \\ \therefore \; p \rightarrow r \end{array}$$

Forma Diagrama de Venn – Euler:



Este principio indica: "Que el condicional es transitivo".

Ejemplo:

P_1: Si se levanta aire húmedo, entonces refrescará.
P_2: Si refresca, entonces se formarán nubes.

Por tanto: Si se levanta aire húmedo, entonces se formarán nubes.

Aplicando el principio, este razonamiento es válido.

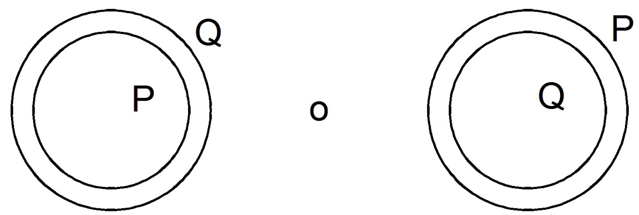
g) Principio de Adición:

$[p \rightarrow (p \vee q)] \quad \vee \quad [q \rightarrow (p \vee q)]$

Forma Clásica:

$$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore\ p \vee q \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{l} q \\ \hline \therefore\ p \vee q \end{array}$$

Forma Diagrama de Venn – Euler:



Este principio indica: “Que una disyunción está implicada por cualquiera de sus miembros”.

Ejemplo:

P_1: Ciro Alegría escribió “La serpiente de oro”.

Por tanto: Escribió: “La serpiente de oro” o fue un gran poeta.

Nota: Existen otros principios de igual importancia que los expuestos anteriormente y sólo lo nombraremos a continuación:

* **Principio de la transitividad simétrica:**

$[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \rightarrow (p \leftrightarrow r)$

* **Principio del absurdo:**

1) $[p \rightarrow (q \wedge \sim q)] \rightarrow \sim p$
2) $[\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)] \rightarrow p$

* **Principio de conjunción:**

$(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$

* **Principio del Dilema Constructivo (DC):**

$\{[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \wedge (p \vee r)\} \rightarrow (q \vee s)$

* **Principio del Dilema Destructivo (DD):**

$\{[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \wedge (\sim q \vee \sim s)\} \rightarrow (\sim p \vee \sim r)$

Observación: El presente texto sólo se remite a usar el **Método de demostración directa:** Método de la tabla de verdad, método abreviado y método por las leyes del álgebra de proposiciones.

6.3 Ejercicios Resueltos.

A. Identifica las premisas y la conclusión de los siguientes argumentos:

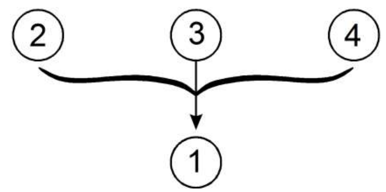
1. “Aun cuando la heroína resultaba ser idéntica a la morfina en términos de los efectos que tiene sobre los pacientes, tiene la ventaja de ser mucho más fácil de inyectarse. La droga es 50 veces más soluble que la morfina y cuando uno tiene un paciente muy enflaquecido con poca masa muscular y poca grasa, una inyección es extremadamente dolorosa. Cinco cm^3 de morfina es una cucharada y ya no hay donde ponerla. El equivalente de heroína es tan pequeño que se puede administrar a cualquier persona”.

Solución:

Identificando las premisas y conclusión:

Aun (1) [cuando la heroína resultaba ser idéntica a la morfina en términos de los efectos que tiene sobre los pacientes, tiene la ventaja de ser mucho más fácil de inyectarse.] (2) [La droga es 50 veces más soluble que la morfina y cuando uno tiene un paciente muy enflaquecido con poca masa muscular y poca grasa, una inyección es extremadamente dolorosa.] (3) [Cinco cm^3 de morfina es una cucharada y ya no hay donde ponerla.] (4) [El equivalente de heroína es tan pequeño que se puede administrar a cualquier persona.]

Esquematizando la estructura del argumento:



De donde:

P_1: La droga es 50 veces más soluble que la morfina y cuando uno tiene un paciente muy enflaquecido con poca masa muscular y poca grasa, una inyección es extremadamente dolorosa.

P_2: Cinco cm^3 de morfina es una cucharada y ya no hay donde ponerla.

P_3: El equivalente de heroína es tan pequeño que se puede administrar a cualquier persona.

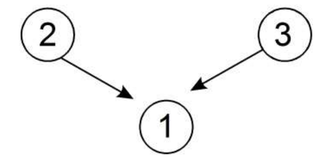
Conclusión: Cuando la heroína resultaba ser idéntica a la morfina en términos de los efectos que tiene sobre los pacientes, tiene la ventaja de ser mucho más fácil de inyectarse.

2. "José nunca tuvo una suma considerable de dinero, pues en ningún momento fue un hombre rico y a su muerte dejó un patrimonio pequeño".

Solución:
Identificando las premisas y conclusión:

(1) [José nunca tuvo una suma considerable de dinero.]
(2) [en ningún momento fue un hombre rico] y
(3) [a su muerte dejó un patrimonio pequeño.]

Esquematizando la estructura del argumento:



De donde:

P_1: En ningún momento fue un hombre rico.

P_2: A su muerte dejó un patrimonio pequeño.

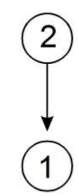
Conclusión: José nunca tuvo una suma considerable de dinero.

3. "¿Amas la vida?" "Entonces, no malgastes el tiempo, porque es el elemento del que está hecha la vida".

Solución:
Identificando las premisas y conclusión:

¿Amas la vida? Entonces, (1) [no malgastes el tiempo], porque (2) [es el elemento del que está hecha la vida].

Esquematizando la estructura del argumento:



De donde:

P_1: El tiempo es el elemento del que está hecha la vida.

Conclusión: No malgastes el tiempo.

B. Identifica la falacia que se está cometiendo en cada uno de los siguientes enunciados:

1. "Señor, mi esposo merece ese aumento ya que con lo que usted le paga apenas si nos alcanza para alimentar a nuestros tres hijos, por no hablar de los gastos de vivienda y servicios básicos. Además nuestro hijo más pequeño Danielito, quien sólo tiene tres añitos, necesita de una operación".

Solución:

La falacia se comete cuando se desea demostrar que el esposo merece ese aumento ya que están basados en la necesidad de dinero que están **(argumento por la misericordia)**. Lo lógico sería más bien demostrar que el esposo es un buen trabajador que con su esfuerzo contribuye a la productividad y buena marcha de la empresa y que por lo tanto merece que se le aumente el sueldo.

2. "Bien ateo, tú me dices que te demuestre la existencia de Dios y lo haré. Como tú sabes, Dios es lo más perfecto que puede ser pensado. Pero si únicamente existiera fuera de nuestra mente: Por lo tanto Dios debe existir".

Solución:

Este razonamiento – Parafraseo de la famosa aprueba **Ontológica** de la existencia de Dios usada por San Anselmo en el siglo XI – comete la falacia de **Petición de Principio** puesto que parte de que el ateo acepta por lo menos la existencia de Dios en la propia mente, cuando es justamente eso – La existencia de Dios, sea en la mente o fuera de ella – lo que hay que demostrar al ateo pues éste no cree en la existencia de Dios (se incluye la existencia mental).

C. Formalice los siguientes razonamientos:

1. "Si llueve y hace calor, las plantas crecen. Las plantas no crecen. Por tanto, no llueve y no hace calor".

Solución:

i) Simbolizando las proposiciones:

p: llueve

q: hace calor

r: las plantas crecen

ii) Simbolizando las premisas:

P_1: $(p \wedge q) \rightarrow r$

P_2: $\sim r$

Conclusión: $\sim p \vee \sim q$

iii) Formalizando el razonamiento:

$\{[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge \sim r\} \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

2. "Mi padre me alaba sólo si yo puedo estar orgulloso de mi mismo. Me desempeño con éxito en el deporte o no puedo estar orgulloso de mi mismo. Si estudio mucho, no puedo desempeñarme con éxito en el deporte. Luego si mi padre me alaba, entonces no estudio mucho".

Solución:

i) Simbolizando las proposiciones:

p: Mi padre me alaba

q: puedo estar orgulloso de mi mismo

r: Me desempeño con éxito en el deporte

s: estudio mucho

ii) Simbolizando las premisas:

P_1: $p \rightarrow q$

P_2: $r \vee \sim q$

P_3: $s \rightarrow \sim r$

Conclusión: $p \rightarrow \sim s$

iii) Formalizando el razonamiento:

$\{[(p \to q) \wedge (r \vee \sim q)] \wedge (s \to \sim r)\} \to (p \to \sim s)$

3. “x > y ó x < 6. Si x > y entonces x > 4. Si x > 4 entonces x = 5, y x < 7. Si x < 6 entonces x = 5, y, x < 7. x < 7, y, x = 5 entonces z > x ó y < z. si x > y entonces no es verdad que, y < z ó z > x. Por lo tanto x < 6”.

Solución:

i) Simbolizando las proposiciones:

p: x > y t: x < 7

q: x < 6 u: z > x

r: x > 4 v: y < z

s: x = 5

ii) Simbolizando las premisas:

P_1: $p \vee q$

P_2: $p \to r$

P_3: $r \to (s \wedge t)$

P_4: $q \to (s \wedge t)$

P_5: $(t \wedge s) \to (u \wedge v)$

P_6: $p \to \sim (v \vee u)$

Conclusión: q

iii) Formalizando el razonamiento:

$\{(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge [r \to (s \wedge t)] \wedge [q \to (s \wedge t)] \wedge$

$[(t \wedge s) \to (u \wedge v)] \wedge [p \to \sim (v \vee u)]\} \to q$

D. Determina si los siguientes argumentos son o no válidos:

1. P_1: Si un número es la cuarta potencia de un número natural, entonces su última cifra es 0, 1, 5 ó 6.
   P_2: 2243 (su última cifra no es 0, 1, 5 ó 6)

   Conclusión: 2243 no es la cuarta potencia de un número natural.

Solución:

Escribimos los datos en forma simbólica:

P_1: $p \to q$

P_2: $\sim q$

Conclusión: $\sim p$

La proposición a analizar es:

p	q	$[(p \to q)$	$\wedge$	$\sim q]$	$\to$		$\sim p$	
V	V	V	F	F	**V**		F	
V	F	F	F	V	**V**		F	
F	V	V	F	F	**V**		V	
F	F	V	V	V	**V**		V	

La proposición es una Tautología, por lo tanto el argumento es válido.

2. “Omar alcanza 13 puntos en el examen o alcanza 14 puntos. Si Omar alcanza 13 puntos entonces no obtiene el certificado de bueno. Si alcanza 14 puntos entonces no obtiene el certificado de bueno. Si Omar estudia, obtiene el certificado de bueno. Por lo tanto, Omar no estudia”.

Solución:

i) Simbolizando las proposiciones:

p: Omar alcanza 13 puntos

q: Omar alcanza 14 puntos

r: Obtiene certificado bueno

s: Omar estudia

ii) Simbolizando las premisas:

P_1: $p \vee q$

P_2: $p \rightarrow \sim r$

P_3: $q \rightarrow \sim r$

P_4: $s \rightarrow r$

Conclusión: $\sim s$

iii) Aplicando el método abreviado:

$$\underbrace{\{[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow \sim r)] \wedge [(q \rightarrow \sim r) \wedge (s \rightarrow r)]\}}_{V} \underset{\boxed{F}}{\rightarrow} \underbrace{\sim s}_{F}$$

De donde:

$p \vee q = V$

$p \rightarrow \sim r = V$

$q \rightarrow \sim r = V$

$s \rightarrow r = V$

Los valores de verdad de las variables proposicionales son:

$$\{[\underbrace{(\overset{V}{p} \vee \overset{F}{q})}_{V} \wedge \underbrace{(\overset{V}{p} \rightarrow \sim \overset{F}{r})}_{\text{error}}] \wedge [\underbrace{(\overset{F}{q} \rightarrow \sim \overset{F}{r})}_{V} \wedge \underbrace{(\overset{V}{s} \rightarrow \overset{V}{r})}_{V}]\} \underset{\boxed{F}}{\rightarrow} \underset{F}{\sim s}$$

Es decir:

$v\,(p) = V$

$v\,(q) = F$

$v\,(r) = F$ y V (caso del método)

$v\,(s) = V$

Por tanto, el argumento es válido.

Unidad 1 / Lógica matemática

3. P_1: Si 3 es impar, entonces $3 + 5 \neq 8$
   P_2: 7 no es primo ó $3 + 5 = 8$
   P_3: 7 es un número primo

   Conclusión: 3 es un número par.

Solución:

Sean:

p: 3 es un número impar

q: $3 + 5 = 8$

r: 7 es un número primo

Escribiendo el argumento y utilizando las propiedades usadas:

P_1: $p \rightarrow \sim q \equiv q \rightarrow \sim p$ (Ley del condicional)

P_2: $\sim r \vee q \equiv r \rightarrow q$ (Ley del condicional)

P_2: r

Conclusión: $\sim p$

Ordenando tendríamos:

P_3: r

P_2: $r \rightarrow q$

P_1: $q \rightarrow \sim p$

Conclusión: $\sim p$

Por lo tanto, el argumento es válido.

E. Para el conjunto de premisas, halla una conclusión, tal que le argumento sea válido y que cada premisa sea necesaria para la conclusión:

P_1: Ningún estudiante es perezoso

P_2: Rubén es artista

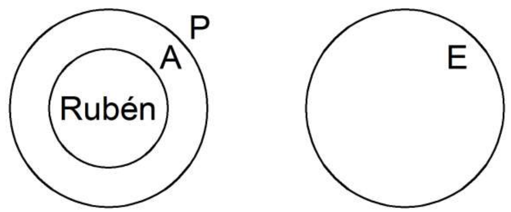
P_3: Todos los artistas son perezosos

Solución:

Sean:

A = Conjunto de artistas
P = conjunto de perezosos
E = Conjunto de estudiantes

Usando diagrama de Venn – Euler, tenemos:



Deducimos:

Por P_3: Se tiene que el conjunto de artistas es subconjunto de los perezosos.
Por P_1: Se tiene que el conjunto de los perezosos y de los estudiantes son disjuntos.
Por P_2: Rubén pertenece al conjunto de los artistas.

Por tanto:

"Rubén no es estudiante", es la conclusión del argumento.

F. Demuestra que el siguiente razonamiento es válido:

"Esta ley será aprobada en esta sesión si, y solo sí es apoyada por la mayoría. Es apoyada por la mayoría o el alcalde se opondrá a ella. Si el alcalde se opondrá a ella, entonces será pospuesta en las deliberaciones del Concejo. Por tanto esta ley será aprobada en esta sesión o será propuesta en las deliberaciones del Concejo".

Solución:

i) Simbolizando las proposiciones:

p: Esta ley será aprobada en esta sesión.
q: Es apoyada por la mayoría.
r: El alcalde se opondrá.
s: Será propuesta en las deliberaciones del Concejo.

ii) Simbolizando las premisas:

P_1: $p \leftrightarrow q$
P_2: $q \vee r$
P_3: $r \rightarrow s$
Conclusión: $p \vee s$

iii) Aplicando **Implicaciones notables** para demostrar que $p \vee s$ es la conclusión que hace al argumento válido:

(1) $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ bicondicional (P_1)
(2) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv \sim q \vee p$ condicional / absorción
(3) $\sim q \vee p \equiv q \rightarrow p$ condicional
(4) $p \vee s$ Silogismo disyuntivo (P_2, P_3 (3))

También se puede demostrar aplicando el **método** abreviado:

Formalizando:

$$\{[\underbrace{(p \leftrightarrow q)}_{\substack{F \quad F \\ V}} \wedge \underbrace{(q \vee r)}_{\substack{F \quad V \\ V}}] \wedge \underbrace{(r \rightarrow s)}_{\substack{V \quad F \\ \text{error}}}\} \rightarrow \boxed{F} \underbrace{(p \vee s)}_{\substack{F \quad F \\ F}}$$

De donde:

$v(p) = F$
$v(q) = F$

$\boldsymbol{v}\ (r) = \text{V}$

$\boldsymbol{v}\ (s) = \text{V y F}$ (caso del método)

Por tanto, el razonamiento es válido.

G. Con las siguientes premisas, deducir "*p*":

P_1: $\sim p \rightarrow q$

P_2: $q \rightarrow \sim r$

P_3: r

Solución:

Con P_2 y P_3:

$$\begin{array}{ll} & q \rightarrow \sim r \\ & \underline{r \qquad\quad} \\ (1) & \therefore \sim q \qquad \text{(Modus Tollens)} \end{array}$$

Con P_1 y (1):

$$\begin{array}{l} \sim p \rightarrow q \\ \underline{\sim q \qquad\quad} \\ \therefore\ p \qquad \text{(Modus Tollens)} \end{array}$$

H. Demostrar: "$x^2 = 9 \vee x^2 > 9$"; a partir de las siguientes premisas:

P_1: $x = 3 \vee x = 4$

P_2: $x = 3 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$

P_3: $x = 4 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$

P_4: $x^2 - 7x + 12 = 0 \rightarrow x > 2$

P_5: $x^2 < 9 \rightarrow x \ngtr 2$

P_6: $x^2 \nless 9 \rightarrow (x^2 = 9 \vee x^2 > 9)$

Solución:

Simbolizamos las proposiciones:

P_1: $p \vee q$

P_2: $p \rightarrow r$

P_3: $q \rightarrow r$

P_4: $r \rightarrow s$

P_5: $t \rightarrow \sim s$

P_6: $\sim t \rightarrow (u \vee w)$

Aplicando **Implicaciones notables:**

(1)	r	Silogismo Disyuntivo	(P_1, P_2, P_3)	$x^2 - 7x + 12 = 0$
(2)	s	Modus Ponens	(P_4(1))	$x > 2$
(3)	$\sim t$	Modus Tollens	(P_5(2))	$x^2 \nless 9$
(4)	$(u \vee w)$	Modus Tollens	(P_6(3))	$(x^2 = 9 \vee x^2 > 9)$

I. Demostrar: $\sim (x = 5 \wedge y = 4)$; a partir de las siguientes premisas:

P_1: $y \neq 3$

P_2: $x + y = 8 \rightarrow y = 3$

P_3: $x + y = 8 \vee x \neq 5$

Solución:

Simbolizamos las proposiciones:

P_1: $\sim p$

P_2: $q \rightarrow p$

P_3: $q \vee \sim r$

Aplicando **Implicaciones notables:**

(1) $\sim q$ Modus Tollens (P$_2$, P$_1$) $x + y \neq 8$
(2) $\sim r$ Modus Tollens Ponens (P$_3$, (1)) $x \neq 5$
(3) $\sim r \vee t$ Adición (2) $x \neq 5 \vee y \neq 4$
(4) $\sim (r \wedge \sim t)$ Equivalencia, Morgan (3) $\sim (x = 5 \wedge y = 4)$

J. Dado el argumento: "Todas las criaturas agresivas son vistas con desconfianza. Todas las víboras son criaturas agresivas. Luego, todas las víboras son vistas con desconfianza".

Demuestre la validez del argumento aplicando reglas de la lógica cuantificacional.

Solución:

i) Simbolizando las premisas:

P_1: $\forall$ x: C (x) $\rightarrow$ D (x)
P_2: $\forall$ x: V (x) $\rightarrow$ C (x)
$\therefore$ $\forall$ x: V (x) $\rightarrow$ D (x)

Se lee: "Para todo x, si x es una criatura agresiva, entonces x es vista con desconfianza. Para todo x, si x es una víbora, entonces x es una criatura agresiva. Por lo tanto, para todo x, si x es una víbora, entonces x es vista con desconfianza".

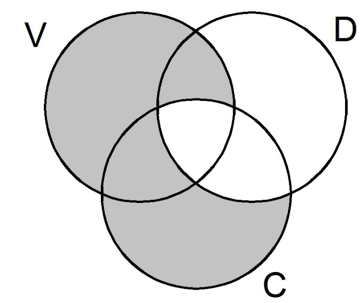
ii) Formalizando el argumento:

P_1: Todos los C son D
P_2: Todos los V son C
$\therefore$ Todos los V son D

P_1: Todas las criaturas agresivas son vistas con desconfianza.
P_2: Todas las víboras son criaturas agresivas.

Por tanto: Todas las víboras son vistas con desconfianza.

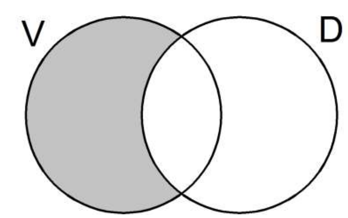
Ilustrando mediante los diagramas de Venn – Euler:



iii) Aplicando reglas de la lógica cuantificacional:

(1) C (x) $\rightarrow$ D (x) (de P_1 por EU)
(2) V (x) $\rightarrow$ C (x) (de P_2 por EU)
(3) C (x) $\rightarrow$ D (x) (de (2) y (3) por SH)
(4) $\forall$ x: V (x) $\rightarrow$ D (x) (de (3) por IU)

De este modo hemos demostrado que el argumento es válido, ya que las premisas dadas si se deriva la conclusión propuesta. También se puede resumir en el siguiente diagrama:



6.4 Actividad de Aprendizaje.

A. Identifica las premisas y la conclusión de los siguientes argumentos:

1. "Mentir es parte del desarrollo normal, lo mismo que decir la verdad. La habilidad para mentir es un logro humano, una de esas habilidades que nos colocan aparte de las demás especies".

2. “Los individuos competentes están en libertad de tomar sus decisiones en cuanto a tratamiento médico, no así los incompetentes. Por tanto, la capacidad y la libertad están inextricablemente unidas”.
3. “Si una persona dice, amo a Dios y odio a mi hermano, está mintiendo: porque si no ama a su hermano, a quién ha visto, ¿cómo puede amar a Dios a quién no ha visto?”.
4. “El Dr. Oliver Wendell Holmes dijo una vez que la clave de la longevidad era tener una enfermedad crónica incurable y cuidarse de ella. Aun ahora, 150 años después, esto funciona. Si uno tiene una artritis crónica, probablemente uno tomará cierto número de aspirinas la mayoría de días de su vida, lo cual reduce el riesgo de morir de una trombosis coronaria. Cuando uno está crónicamente enfermo también es menos probable que maneje un automóvil, o escale montañas, o se caiga de las escaleras, por cargar una pila de libros que deben ser acomodados, o que fume demasiado o beba en exceso”.
5. “El pensamiento es una función del alma inmortal del hombre. Dios ha dado un alma inmortal a cada hombre y mujer, pero no a otros animales o a las máquinas. Por lo tanto, ninguna máquina o animal puede pensar”.
6. “Decir que yo creo en los niños reprimidos equivale a decir que las tundas son esenciales de alguna manera a su adecuada educación. Yo no soy de esa opinión, por tanto, no creo en los niños reprimidos”.
7. “El que ama no desconoce a Dios, porque Dios es amor”.
8. “Me he opuesto a la pena de muerte durante toda mi vida. No veo evidencias de su valor disuasivo y pienso que hay formas mejores y más eficaces para enfrentar los crímenes violentos”.
9. “Puesto que no hay enfermedades mentales, no puede haber tratamiento para ellas”.

10. “**Pregunta:** Dr. Koop ¿Por qué el gobierno necesita intervenir en el tratamiento de los infantes minusválidos?
    Respuesta: El Acta de Rehabilitación de 1973 afirma que es ilegal que cualquier institución que recibe ayuda federal discrimine a cualquier persona debido a su raza, credo, color, religión, origen étnico o incapacidad física. Nosotros tenemos evidencias suficientes de que muchos niños son privados de sus derechos civiles al ser tratados de manera diferente a la forma en que son tratados los niños que son minusválidos”.
11. “Destruir un libro es casi matar a un hombre; quien mata a un hombre mata a un ser de razón, imagen de Dios; pero quién destruye un buen libro, mata a la razón misma”.
12. “Puesto que el hombre es esencialmente racional, la constante reaparición de la filosofía es la historia del conocimiento humano debe tener su explicación en la estructura de la razón humana”.
13. “El nivel de motivación del empleado determina la cantidad de esfuerzo ejercido en el trabajo. La cantidad de esfuerzo ejercido en el trabajo es uno de los factores que determina la productividad. De ahí que el nivel de motivación del empleado incida en la productividad de éste”.
14. “Solo en una sociedad razonable tolerante puede florecer la desobediencia civil, esto significa que debemos esperar más de ella en una sociedad justa, especialmente porque una sociedad más justa es más susceptible de tolerar los puntos de vista radicales”.
15. “Partiendo de su referente básico, la naturaleza del raciocinio humano, muchos investigadores de la IA encuentran la lógica como demasiado formal y limitada, y perciben que los procesos de razonamiento abarcan un aspecto mucho más amplio que el análisis lógico deductivo”.

16. “Calentar una pieza de material es equivalente a incrementar la energía de movimiento de las partes constituyentes de esa pieza, sean átomos, electrones o cualesquiera otras partículas. En un material caliente, los átomos o electrones realizan todo tipo de movimientos, oscilaciones, trayectoria rectas o etc. Mientras mayor es la temperatura, más alta es la energía de los movimientos. Así, la temperatura es equivalente a energía”.

B. Señale que falacia de atinencia que se comete en cada uno de los siguientes enunciados:

1. “Hoy me toca a mí remar, después de todo es mi bote”.
2. “Las tesis económicas que el Ministro de Economía sostiene son mentira porque es un neoliberal y los neoliberales son unos ladrones y mentirosos”.
3. “Es cierto que no hemos podido demostrar que el acusado es culpable, sin embargo es también cierto que éste no ha demostrado que es inocente. Concluyo, pues, en que el acusado debe ser culpable”.
4. “La mejor prueba que Dios existe es que hasta ahora nadie ha podido demostrar que Dios no existe”.
5. “Yo no quise robar, pero las circunstancias me empujaron a ello: tengo mi madre enferma, cinco hijos que atender y a mi esposa embarazada, el sueldo que ganaba apenas si alcanzaba para comer ¿qué otra cosa podría haber hecho?”.
6. “La mejor prueba de que los seres humanos son mortales es que Sócrates – un ser humano – ha fallecido. A su vez la mejor prueba de que Sócrates – un ser humano – ha fallecido es que los seres humanos son mortales”.
7. “Hoy tuve un día pésimo. Todo comenzó cuando me caí de la cama; ésa fue la causa de todas mis desgracias ya que fue lo primero que hice”.

C. Señale que falacia de ambigüedad se comete en cada uno de los siguientes enunciados:

1. “Como un año no es nada y mi hijo cumple mañana un año, entonces mi hijo no cumplirá nada”.
2. “No debemos hablar mal de nuestros amigos”.

D. Determina si los argumentos son o no válidos:

1. “El glaucoma no tratado es la causa principal de una ceguera progresiva sin dolor. Se dispone de métodos para la detección oportuna y el tratamiento efectivo. Por esta razón, la ceguera por glaucoma crónico es especialmente trágica”.
2. “Si florecen las flores, entonces es primavera. Si no es primavera, entonces no llueve mucho. Por tanto si florecen las flores, entonces no llueve mucho”.
3. “Los enfermeros y los médicos son profesionales. No todas las personas son profesionales. Por tanto, algunas personas no son enfermeros o médicos”.
4. “Si la ballena es un mamífero, entonces toma oxígeno del aire. Si toma oxígeno del aire, entonces no necesita branquias. La ballena es un mamífero y vive en el océano. Por lo tanto la ballena no necesita branquias”.
5. “Me voy a no ser que me inviten a almorzar. Pero si no me voy, entonces tendré que llamar por teléfono a casa, y dejar recado de que no me esperen. Me invitan a almorzar. Por tanto, tendré que dejar recado de que no me esperen”.
6. “Si Omar tiene hinchados los ganglios de la ingle, entonces tiene peste bubónica. Siempre que Liliana tiene aumento de volumen en la glándula tiroides, por consiguiente tiene bocio. A menos que Omar tenga hinchados los ganglios de la ingle, Liliana tiene aumento de volumen en la glándula tiroides. Por tanto es

innegable que Omar tiene peste bubónica o también que Liliana tiene bocio”.

7. “Si éste es un buen libro vale la pena leerlo. La matemática es fácil, o este libro no vale la pena leerlo. Pero la matemática no es fácil. Por lo tanto éste es un buen libro”.
8. “Llueve o el campo está seco. Si llueve entonces jugaremos dentro. Si el campo está seco, jugaremos fútbol. Por lo tanto jugaremos dentro o jugaremos fútbol”.
9. “La investigación de los fenómenos naturales está más allá del alcance de la ciencia. Por tanto, la ciencia no puede probar ni refutar la existencia de Dios”.
10. “Si, no ocurre que, un objeto flota en el agua entonces es menos denso que el agua; entonces se puede caminar sobre el agua. No se puede caminar sobre el agua. Si un objeto es menos denso que el agua, entonces puede desplazar una cantidad de agua igual a la de su propio peso, entonces el objeto flota en el agua. Por tanto, un objeto flotará en el agua sí y sólo si es menos denso que el agua”.
11. “Si la batería del automóvil está en buen estado, los focos deberían encender (al menos que estén también en mal estado). Pero los focos no encienden, y parecen estar bien. Por tanto, la batería del automóvil no está en buen estado”.
12. “Alguien tiene amigos sí, sólo si los trata como personas. Pero si alguien trata como persona a sus amigos, entonces tiene que respetar sus diferencias. Por tanto, si alguien no respeta las diferencias, entonces no tiene amigos”.
13. “Si el gobierno disminuye el gasto público, aumenta el desempleo a corto plazo. Si el gobierno no disminuye el gasto público, aumenta la inflación. El gobierno disminuye el gasto público o no lo disminuye. Si aumenta el desempleo a corto plazo o aumenta

la inflación, hay intranquilidad social y crisis económica. Por tanto, hay crisis económica”

14. “Liliana es profesional sí, y sólo si es graduada universitaria. Ocurre que Liliana es profesora. Por tanto, si Liliana es profesora entonces es graduada universitaria”.
15. “La luz no está encendida, sí y sólo si no hay alguien en la casa o los de la casa han salido a pasear. Si los de la casa han salido a pasear entonces han ido al circo. De ahí que, si la luz no está encendida, los de la casa han salido a pasear si han ido al circo”.
16. “Hay inflación y desempleo. Si hay inflación, entonces la gente se queja y hay huelgas. Por consiguiente hay huelgas”.
17. “Si Liliana toma el bus, entonces no llega a su cita si el bus va con retraso. Liliana no debería ir a su casa si no llega a su cita y se siente deprimida. Si Liliana no consigue trabajo, entonces se siente deprimida y debe ir a su casa. Por tanto, si Liliana toma el bus, entonces consigue el trabajo si el bus está retrasado”.

E. Formalice los siguientes argumentos aplicando reglas de la lógica cuantificacional y luego efectúe una prueba de validez o no validez:

1. “Todos los hombres son racionales. Ningún delfín es racional. Por tanto, ningún delfín es un hombre”.
2. “Los hostales son baratos pero sucios. Además algunos hostales son sórdidas. Por lo tanto algunas cosas son baratas”.
3. “Todos los médicos son impacientes. Algunos médicos son sordos. Por lo tanto algunos sordos son impacientes”.
4. “Todas las novelas son divertidas. Ningún poema es una novela. Por lo tanto ningún poema es divertido”.

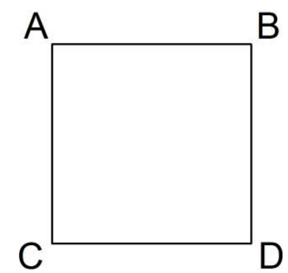
F. Demuestre por el método de los diagramas de Venn – Euler la validez o no validez de cada una de los siguientes argumentos:

1. “Todos los universitarios no son profesionales. Luego, algunos profesionales son universitarios”.
2. “Ningún obrero desocupado es millonario, por lo tanto algunos millonarios no son obreros ocupados”.
3. “Todos los estudiantes son aplicados. Laura es estudiante. Laura es bailarina. Por lo tanto, algunas bailarinas son aplicadas”.
4. “Algunos diplomáticos no son descorteses. Por lo tanto, algunos corteses son diplomáticos”.
5. “Todas las medicinas son caras. Por lo tanto, todos los jarabes, si son medicinas, son caras”.
6. “Ninguna flor es fea. Todas las hierbas son feas. Por tanto ninguna hierba es una flor”.
7. “Todos los cetáceos son animales acuáticos, por consiguiente algunos mamíferos no son animales acuáticos, en vista de que algunos mamíferos no son cetáceos”.
8. “Todos los árboles son verde. Todos los pinos son árboles. Luego, todos los pinos con verdes”.
9. “Todos los peces son acuáticos. Algunas truchas son peces. Luego, algunas truchas son acuáticas”.
10. “Ningún cantante es miope. Algunos chimbotanos son cantantes. Por tanto algunos chimbotanos no son miopes”.

G. Dados los argumentos:

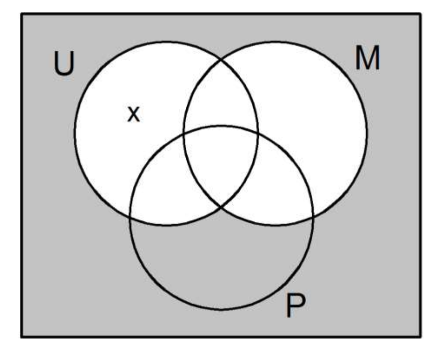
1. “Escribe un argumento válido que demuestre que el número 224 es divisible entre 4. Toma como hipótesis la proposición: “Si los dos últimos dígitos de un número son divisibles entre 4, entonces el número es divisible entre 4”.

2. Demuestra que el cuadrado ABCD es un rectángulo.



H. Para cada conjunto de premisas, halla una conclusión tal que el argumento sea válido y tal que cada premisa sea necesaria para la conclusión:

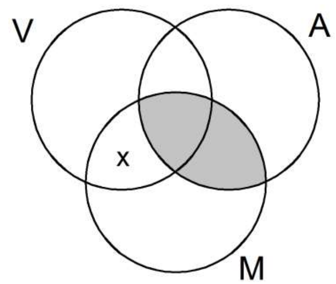
1. P_1: Si un hombre es soltero, es infeliz.
   P_2: Si un hombre es infeliz, muere joven.
2. P_1: Todos los abogados son ricos.
   P_2: Los poetas son caprichosos.
   P_3: Vicente es abogado.
   P_4: Ningún caprichoso es rico.
3. Dado el siguiente diagrama de Venn – Euler:



Donde:

U = Universitarios
M = Médicos
P = Profesores

4. Del diagrama de Venn – Euler:



Donde:

V = Animales que vuelan
A = Aves
M = Murciélagos

I. Aplica implicaciones notables y leyes lógicas en el análisis de:

1. Con las siguientes premisas, deducir: $\sim t$

   P_1: $r \rightarrow \sim t$

   P_2: $s \rightarrow r$

   P_3: s

2. Con las siguientes premisas, deducir: $(q \vee r)$

   P_1: $\sim p \rightarrow (q \vee r)$

   P_2: $(s \vee t) \rightarrow \sim p$

   P_3: $(s \vee t)$

3. Con las siguientes premisas, deducir: $\sim p$

   P_1: $r \rightarrow \sim s$

   P_2: r

   P_3: $\sim s \rightarrow q$

   P_4: $q \rightarrow p$

4. Demuestra que: x = 1; a partir de las siguientes premisas:

   P_1: $\sim (z < 3 \vee x > y) \wedge y = 2$
   P_2: $x \not< y \vee x = 1$
   P_3: $(x > z) \rightarrow (x > y)$
   P_4: $(x \not> z) \rightarrow (x < y)$

5. Demuestra: $(y \not< 4) \wedge (x < y)$; a partir de las siguientes premisas:

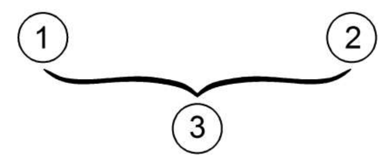
   P_1: $(x > y) \vee (x < 4)$
   P_2: $(x < 4) \rightarrow [(x < y) \wedge (y \not< 4)]$
   P_3: $(x > y) \rightarrow (x = 4)$
   P_4: $x \neq 4$

6. Demuestra: $(x < y) \wedge (y = 6)$; a partir de las siguientes premisas:

   P_1: $(x < y) \leftrightarrow (y > 4)$
   P_2: $(y = 6) \leftrightarrow (x + y = 10)$
   P_3: $(y > 4) \wedge \sim (x + y \neq 10)$

6.4 Clave de Respuestas.

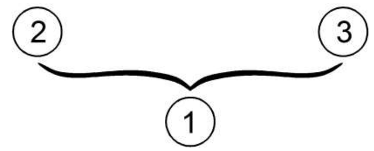
A. 2) (1) [Los individuos competentes están libres de tomar sus decisiones en cuanto a tratamiento médico;] (2) [no así los competentes]. Por tanto; (3) [La capacidad y la libertad están inextricablemente unidas.]



Premisas: 1 y 2
Conclusión: 3

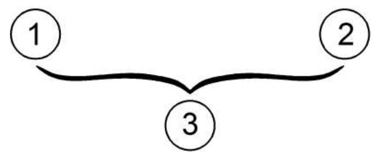
4) El Dr. Oliver Wendell Holmes dijo una vez que (1) [La clave de la longevidad era tener una enfermedad crónica incurable y cuidarse de ella. Aun ahora, 150 años después, esto funciona]. (2) [Si uno tiene artritis crónica, probablemente uno tomará cierto número de aspirinas la mayoría de los días de su vida, lo cual reduce el

riesgo de morir de una trombosis coronaria]. (3) [Cuando uno está crónicamente enfermo también es menos probable que maneje un automóvil, o escale montañas, o se caiga de las escaleras, por cargar una pila de libros que deben ser acomodados, o que fume demasiado o beba en exceso].



Premisas: 2 y 3
Conclusión: 1

6) (1) [Decir que yo creo en los niños reprimidos equivale a decir que las tundas son esenciales de alguna manera a su adecuada educación]. (2) [Yo no soy de esa opinión, por tanto]; (3) [No creo en los niños reprimidos].



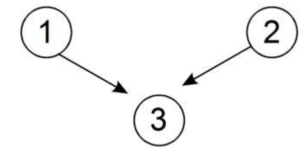
Premisas: 1 y 2
Conclusión: 3

8) (1) [Me he opuesto a la pena de muerte durante toda mi vida]. (2) [No veo evidencias de su valor disuasivo y pienso que hay formas mejores y más eficaces para enfrentar los crímenes violentos].

Premisas: 2
Conclusión: 1

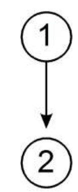
Unidad 1 / Lógica matemática

10) **Pregunta:** Dr. Koop ¿Por qué? (1) [El gobierno necesita intervenir en el tratamiento de los infantes minusválidos]
Respuesta: (2) [El Acta de Rehabilitación de 1973 afirma que es ilegal que cualquier institución que recibe ayuda federal discrimine a cualquier persona debido a su raza, credo, color, religión, origen étnico o incapacidad física]. (3) [Nosotros tenemos evidencias suficientes de que muchos niños son privados de sus derechos civiles al ser tratados de manera diferente a la forma en que son tratados los niños que son minusválidos].



Premisas: 1 y 2
Conclusión: 3

12) Puesto que (1) [el hombre es esencialmente racional,] (2) [La constante reaparición de la filosofía en la historia del conocimiento humano debe tener su explicación en la estructura de la razón humana].



Premisas: 1
Conclusión: 2

14) (1) [En una sociedad justa no puede pagarse lo mismo a todas las personas], puesto que: (2) [las aptitudes y esfuerzos individuales varían notablemente], y porque (3) [el bien común resulta mejor servido con las desigualdades sistemáticas de recompensa.]

$$\underbrace{\text{②} \qquad\qquad \text{③}}_{\text{①}}$$

Premisas: 2 y 3
Conclusión: 1

16) (1) [Calentar una pieza de material es equivalente a incrementar la energía de movimiento de las partes constituyentes de esa pieza, sean átomos, electrones o cualesquiera otras partículas]. (2) [En un material caliente, los átomos o electrones realizan todo tipo de movimientos, oscilaciones, trayectorias rectas, etc.] (3) [Mientras mayor es la temperatura, más alta es la energía de los movimientos]. Así; (4) [la temperatura es equivalente a energía.]

$$\underbrace{\text{①} \qquad \text{②} \qquad \text{③}}_{\text{④}}$$

Premisas: 1, 2 y 3
Conclusión: 4

B. 2) Se comete la falacia del argumento contra el hombre porque en vez de refutar las tesis económicas del Ministro mediante argumentos económicos, se las intenta refutar atacándolo y calumniándolo.

4) Se comete la falacia del argumento por la ignorancia debido a que del hecho de no haberse podido probar la no existencia de Dios, se establece la existencia de Dios.

6) Se comete la falacia de círculo vicioso porque se da por sentado que la mejor prueba de que los seres humanos son mortales es la mortalidad de uno de éstos seres aludiendo a la mortalidad de los seres humanos; argumento circular pues vuelve al inicio

C. 2) El enunciado se interpreta en el sentido que es malo hablar mal de nuestras amistades, es correcto. Pero si se interpreta en el sentido de que podemos hablar mal de aquellos que no son nuestros amigos entonces se comete la falacia de énfasis.

D. 2) Formalizando el argumento:

$[(p \to q) \land (\sim q \to \sim r)] \to (p \to \sim r)$

Usando tabla de verdad:

p	q	r	$[(p \to q)$	$\land$	$(\sim q \to \sim r)]$	$\to$	$(p \to \sim r)$
V	V	V	V	**V**	V	**F**	**F**
V	V	F	V	**V**	V	**V**	**V**
V	F	V	F	**F**	F	**V**	**F**
V	F	F	F	**F**	V	**V**	**V**
F	V	V	V	**V**	V	**V**	**V**
F	V	F	V	**V**	V	**V**	**V**
F	F	V	V	**F**	F	**V**	**V**
F	F	F	V	**V**	V	**V**	**V**

Por tanto, el argumento es no válido.

4) Formalizando el argumento:

$\{[(p \to q) \land (q \to \sim r)] \land (p \land s)\} \to \sim r$

Aplicando el Método Abreviado:

$\{[(p \to q) \land (q \to \sim r)] \land (p \land s)\} \to \sim r$

$V\ V\ V\ V\ \ \underbrace{V\ V\ VF}_{\text{error}}\ \ V\ V\ V\ V\ \ \boxed{F}\ VF$

Por lo tanto, el argumento es válido.

6) Sean:

p: Omar tiene hinchados los ganglios

q: Omar tiene peste bubónica

r: Liliana tiene aumento de volúmenes en las glándulas tiroides

s: Liliana tiene bocio

Formalizando el argumento:

$\{[(p \to q) \wedge (r \to s)] \wedge (p \vee r)\} \to (q \vee s)$

Aplicando el Método Abreviado:

$\{[(p \to q) \wedge (r \to s)] \wedge (p \vee r)\} \to (q \vee s)$

$\underbrace{V\ V\ V}_{\text{error}}\ V\ F\ V\ F\ \ V\ \ V\ V\ F\ \boxed{F}\ F\ F\ F$

Por lo tanto, el argumento es válido.

8) Simbolizando las proposiciones:

p: llueve

q: El campo está seco

r: Jugaremos dentro

s: Jugaremos fútbol

Formalizando el argumento:

$\{[(p \vee q) \wedge (p \to r)] \wedge (q \to s)\} \to (r \vee s)$

Usando tabla de verdad:

p	*q*	*r*	*s*	{[(*p* ∨ *q*)	∧ (*p* → *r*)]	∧ (*q* → *s*)}	→	(*r* ∨ *s*)
V	V	V	V	V	**V**	V	**V**	**V**
V	V	V	F	V	**V**	F	**V**	**V**
V	V	F	V	V	**F**	F	**V**	**V**
V	V	F	F	V	**F**	F	**V**	**F**
V	F	V	V	V	**V**	V	**V**	**V**
V	F	V	F	V	**V**	V	**V**	**V**
V	F	F	V	V	**F**	F	**V**	**V**
V	F	F	F	V	**F**	F	**V**	**F**
F	V	V	V	V	**V**	V	**V**	**V**
F	V	V	F	V	**V**	F	**V**	**V**
F	V	F	V	V	**V**	V	**V**	**V**
F	V	F	F	V	**V**	F	**V**	**F**
F	F	V	V	F	**F**	F	**V**	**V**
F	F	V	F	F	**F**	F	**V**	**V**
F	F	F	V	F	**F**	F	**V**	**V**
F	F	F	F	F	**F**	F	**V**	**F**

Se observa que la matriz principal, todos los valores son verdaderos, entonces la proposición es una Tautología. Por lo tanto, el argumento es válido.

10) Simbolizando las proposiciones:

p: Un objeto flota en el agua

q: Es menos denso que el agua

r: Se puede caminar sobre el agua

s: Puede desplazar una cantidad

Formalizando el argumento:

$\{[(\sim (p \to q) \to r) \land \sim r] \land [(q \to s) \land (s \to p)]\} \to (p \leftrightarrow q)$

Aplicando el Método Abreviado:

$$\{[(\sim (p \to q) \to r) \land \sim r] \land [(q \to s) \land (s \to p)]\} \to (p \leftrightarrow q)$$
$$\text{F F V V V F V VF V } \underbrace{\text{V V F}}_{\text{error}} \text{ V F V F } \boxed{\text{F}} \text{ F F V}$$

Por tanto, el argumento es válido.

12) Formalizando el argumento:

$[(p \leftrightarrow q) \land (p \to r)] \to (\sim r \to \sim p)$

Usando tabla de verdad:

p	q	r	$[(p \leftrightarrow q) \land (p \to r)] \to (\sim r \to \sim p)$						
V	V	V	V	V	V	**V**		V	
V	V	V	V	F	F	**V**		F	
V	V	F	F	F	V	**V**		V	
V	V	F	F	F	F	**V**		F	
V	F	V	F	F	V	**V**		V	
V	F	V	F	F	V	**V**		V	
V	F	F	V	V	V	**V**		V	
V	F	F	V	V	V	**V**		V	

La proposición es una Tautología. Por tanto el argumento es válido.

14) Formalizando el argumento:

$[(p \leftrightarrow q) \land r] \to (r \to q)$

Usando tabla de verdad:

p	q	r	$[(p \leftrightarrow q) \land r] \to (r \to q)$						
V	V	V		V		**V**		V	
V	V	V		F		**V**		V	
V	V	F		F		**V**		F	
V	V	F		F		**V**		V	
V	F	V		F		**V**		V	
V	F	V		F		**V**		V	
V	F	F		V		**V**		F	
V	F	F		F		**V**		V	

La proposición es una Tautología. Por tanto el argumento es no válido.

16) Formalizando el argumento:

$\{(p \land q) \land [p \to (r \land s)] \to s$

Aplicando el Método Abreviado:

$$\{(p \land q) \land [p \to (r \land s)] \to s$$
$$\text{V V V V V V } \underbrace{\text{V V F}}_{\text{error}} \boxed{\text{F}} \text{ F}$$

Por lo tanto el argumento es válido.

E. 2) Formalizando:

P_1: ∀ x: H (x) → [B (x) ∧ S (x)]
P_2: ∃ x / H (x) ∧ M (x)
―――――――――――――
∴ ∃ x / B (x) → S (x)

Efectuando la prueba:

(1) $H(y) \rightarrow M(y)$ (de P_2 por EE)
(2) $H(y) \rightarrow [B(y) \rightarrow S(y)]$ (de P_1 por EU)
(3) $H(y)$ (de (1) por Simp.)
(4) $B(y) \rightarrow S(y)$ (de (2) y (3) por Mod. Ponens)
(5) $\exists x / B(x) \rightarrow D(x)$ (de (4) por IE)

Con esto hemos demostrado que la conclusión sí se deriva de las premisas. Por tanto el argumento es válido.

4) Formalizando:

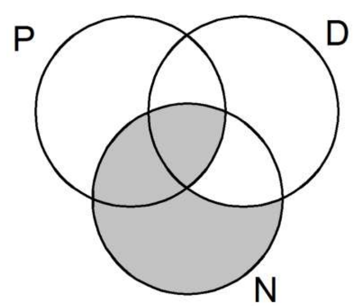
P_1: $\forall x: N(x) \rightarrow D(x)$
P_2: $\exists x / P(x) \wedge D(x)$

$\therefore \exists x / P(x) \wedge V(x)$

Todos los N son D
Ningún P es D

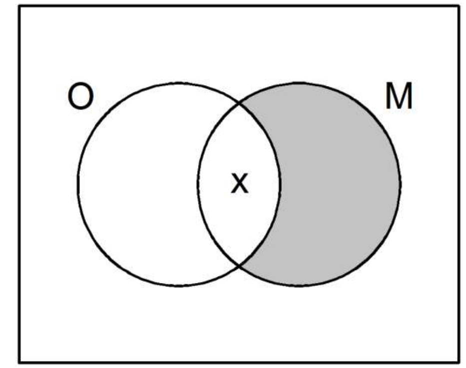
$\therefore$ Ningún P es D

En el Diagrama de Venn – Euler se prueba mecánicamente la no validez del argumento:



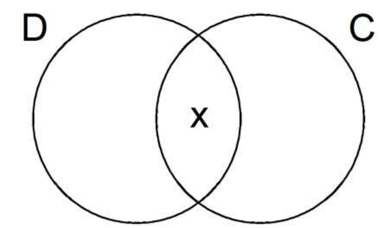
La prueba formal queda para el estudiante.

F. 2)



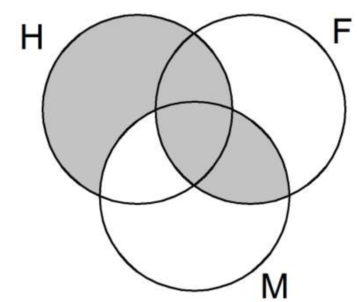
$\therefore$ Argumento no válido.

4)



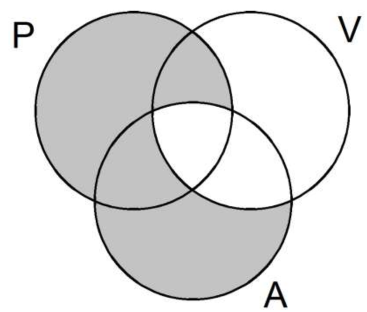
$\therefore$ Argumento válido.

6)



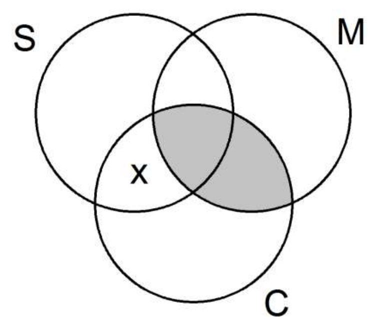
$\therefore$ Argumento válido.

8)



∴ Argumento válido.

10)



∴ Argumento válido.

G. 2) Del gráfico:

P_1: Si una figura es elemento de los cuadrados, entonces es una figura de los rectángulos.

P_2: La figura es un cuadrado

Conclusion: La figura es un rectángulo.

Simbolizando:

P_1: $p \rightarrow q$

P_2: p

$\therefore\ q$

Formalizando:

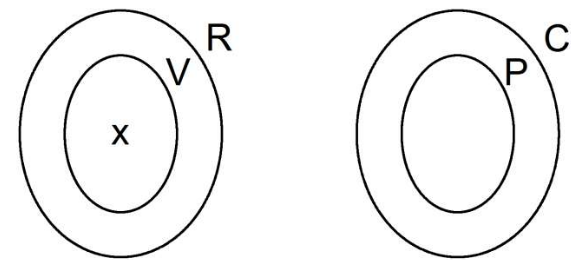
$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

Usando tabla de verdad:

p	q	$[(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$p]$	$\rightarrow$		q
V	V		F		**V**		V
V	F		F		**V**		F
F	V		F		**V**		V
F	F		F		**V**		F

La proposición es una Tautología. Por tanto el argumento es válido.

H. 2) Del gráfico:



Donde:

R = Ricos
V = Vicente
C = Caprichoso
P = Poetas

Conclusión: "Vicente no es poeta".

4) Conclusión: "Algunos animales que vuelan no son aves"

> ***"Si he podido ver más allá que los demás, es porque me he parado en los hombros de un gigante".***

LECCIÓN 7

CIRCUITOS LÓGICOS.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Diagramar circuitos lógicos usando la técnica más adecuada de los circuitos a conmutadores.
2. Simplificar circuitos lógicos usando el álgebra de circuitos, álgebra de Boole y leyes de la lógica.
3. Aplicar los circuitos lógicos en resolución de problemas de la vida cotidiana.

7.1 Circuitos lógicos

Definición: Un circuito lógico es la representación gráfica de un esquema lógico formal.

Son comunes dos tipos de circuitos lógicos: Los circuitos a conmutadores y los circuitos a compuertas. Ambos tienen aplicaciones prácticas en la informática (diseño de lenguaje de programación así como es la inteligencia artificial) y en la electrónica (diseño de circuitos eléctricos). Nosotros nos centraremos en los circuitos a conmutadores.

a) Circuitos a conmutadores: Un circuito a conmutador es un circuito que tiene interruptores que permiten el paso de la corriente o la interrupción de la corriente.

En este caso, para diseñar los circuitos eléctricos se usa la siguiente notación:

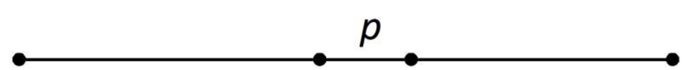
El **1** indica "pasa corriente".
El **0** indica "no pasa corriente".

De manera que en circuitos se usa como notación:

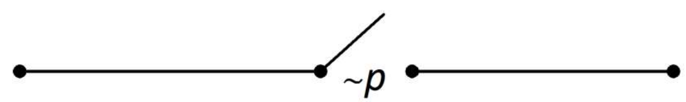
El **1** en lugar de **V.**
El **0** en lugar de **F.**

b) Diseño de circuitos a conmutadores: Cualquier proposición de lógica proposicional puede simbolizarse como un circuito con una entrada de corriente, un interruptor y una salida de corriente. A continuación representaremos las proposiciones compuestas en forma de circuitos eléctricos (Álgebra de circuitos):

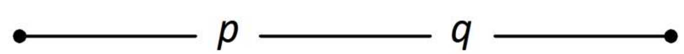
Dada la proposición: p:



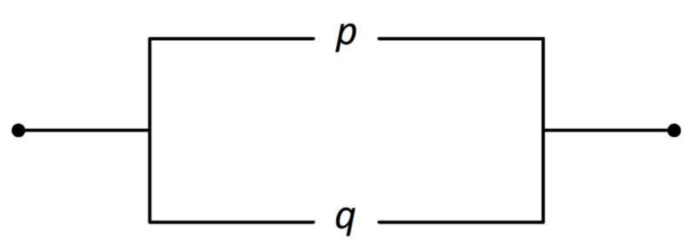
La negación: $\sim p$:



Conjunción: $\boldsymbol{p \wedge q}$ viene a ser un circuito en **serie:**

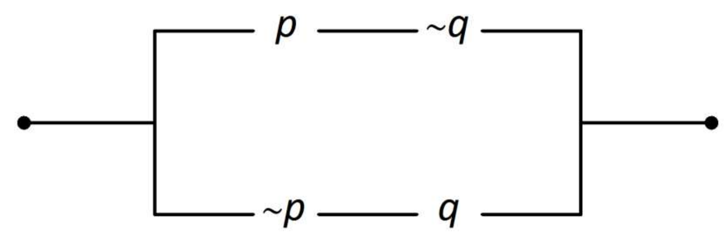


Disyunción inclusiva o débil: $\boldsymbol{p \vee q}$ viene a ser un circuito en **paralelo:**

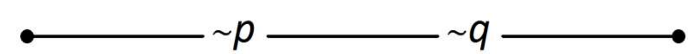


Disyunción exclusiva o fuerte: $\boldsymbol{p \veebar q} \equiv \sim (\boldsymbol{p \leftrightarrow q}) \equiv (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$.

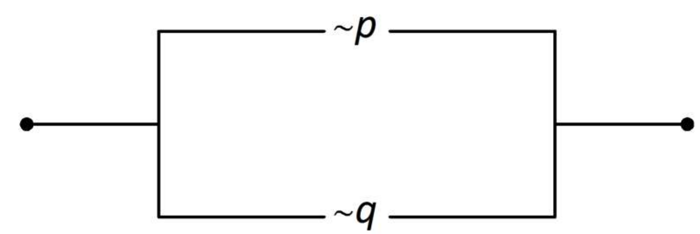
Su circuito es:



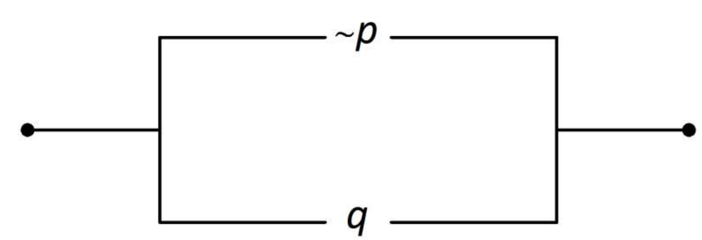
Negación conjuntiva: $\boldsymbol{p \downarrow q} \equiv \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$



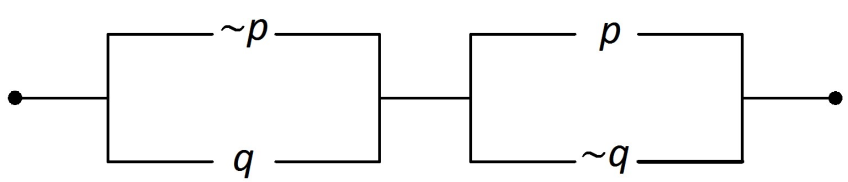
Negación Alternativa: $\boldsymbol{p \,/\, q} \equiv \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$



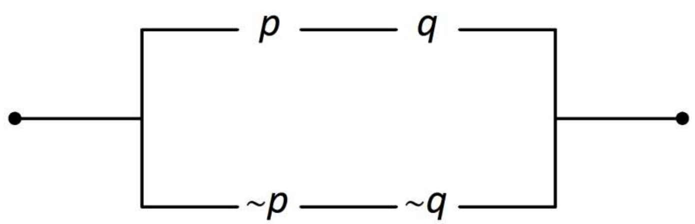
Condicional: $\boldsymbol{p \rightarrow q} \equiv \sim p \vee q$



Bicondicional: $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q} \equiv (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$

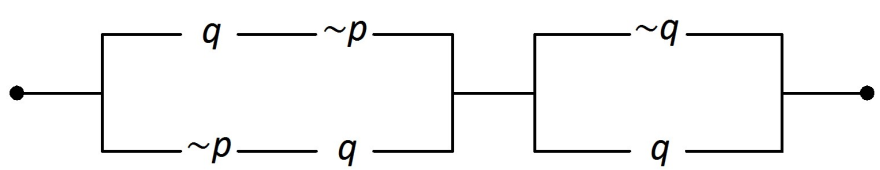


También: $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q} \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

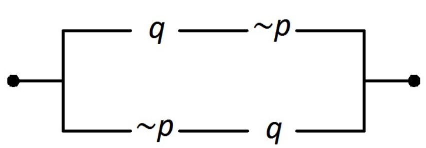


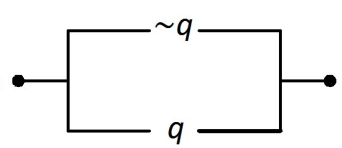
A continuación desarrollaremos algunos ejemplos haciendo uso del álgebra de circuitos, álgebra de Boole y leyes de la lógica.

Ejemplo 1. Halla el circuito más simple equivalente a:



Solución: Sean:

A = 

B = 

Por bloques: $A \wedge B$

Donde:

$A = (q \wedge \sim p) \vee (\sim p \wedge q)$

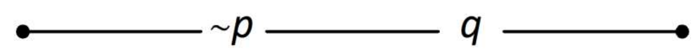
$A = \sim p \wedge q$ (Por ley de idempotencia)

$B = \sim q \vee q = V$ (Por complementos inversos)

$B = 1$

Luego: $A \wedge B = (\sim p \wedge q) \wedge 1 \equiv \sim p \wedge q$

El circuito equivalente es:



Ejemplo 2. Halla el circuito más simple de: $\sim (p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge \sim p)$

Solución:

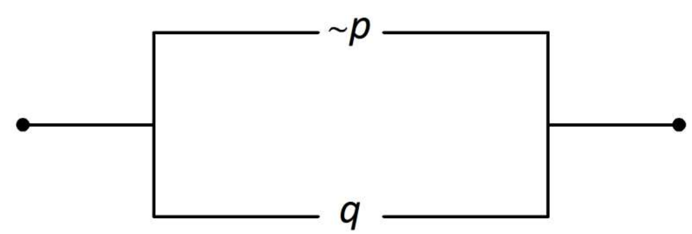
$\sim (p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge \sim p) \equiv (p \rightarrow q) \vee (q \wedge \sim p)$ (Ley del condicional)

$\equiv (\sim p \vee q) \vee (q \wedge \sim p)$ (Ley del condicional)

$\equiv \sim p \vee [q \vee (q \wedge \sim p)]$ (Asociativa)

$\equiv \sim p \vee q$ (Por absorción)

El circuito más simple es:



Ejemplo 3. Simplifica: $[(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \vee q] \wedge \sim q$

Solución: Usando el álgebra de circuitos y leyes de la lógica:

$[(p + q') + (p' . q) + q] . q'$

$\equiv (p + q')q' + (p' . q)q' + qq'$ (Distributiva)

$\equiv pq' + q'q' + p' . (qq') + qq'$ (Distributiva y Asociativa)

$\equiv pq' + q' + p' . (0) + 0$ (Complementación)

$\equiv q'(p + 1)$ (Distributiva)

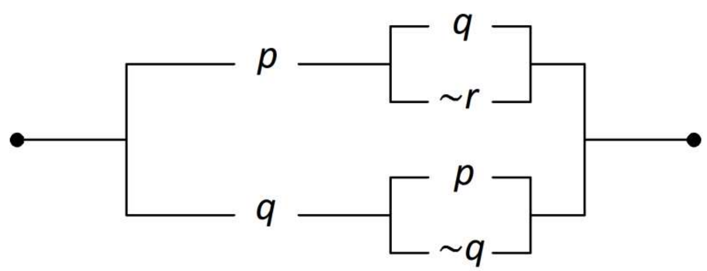
$\equiv q'(1)$ (Identidad o elementos neutros)

$\equiv q'$ (Identidad o elementos neutros)

$\equiv \sim q$

$\therefore [(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \vee q] \wedge \sim q \equiv \sim q$

Ejemplo 4. Simplifica el circuito:



Solución: Poniendo en simbología de lógica proposicional:

$[p \wedge (q \vee \sim r)] \vee [q \wedge (p \vee \sim q)]$

Llevando al Álgebra de Booole:

$[x.(y + z')] + [y.(x + y')]$

$\equiv [xy + xz'] + [yx + yy']$ (Distributiva)

$\equiv (xy + xz') + (yx + 0)$ (Complementación)

$\equiv (xy + xz') + yx$ (Ley con 1 y 0)

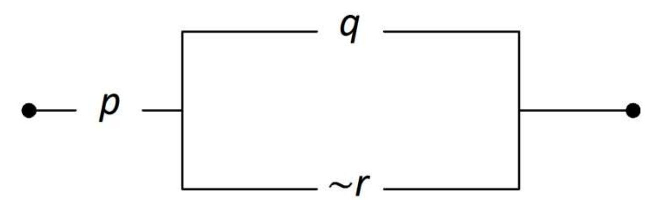
$\equiv (xy + xy) + xz'$ (Asociativa)

$\equiv xy + xz'$ (Idempotencia)

$\equiv x(y + z')$ (Distributiva)

$\equiv p \wedge (q \vee \sim r)$

El circuito más simplificado es:



Ejemplo 5. Dos personas juegan en cierto casino, y cada una tiene una moneda que la lanzan simultáneamente, si las dos monedas coinciden, gana la primera y si salen diferentes, gana la segunda. Representa los casos mediante circuitos eléctricos.

Solución: Considerando los casos:

C = cara S = sello

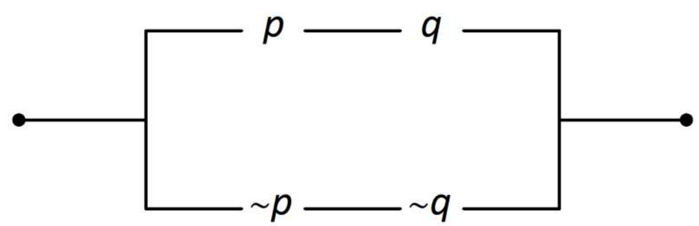
1ra.	2da.	Casos
C	C	gana 1era.
C	S	gana 2da.
S	C	gana 2da.
S	S	gana 1era.

Usando conjunciones básicas:

i) Cuando gana la primera:

$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

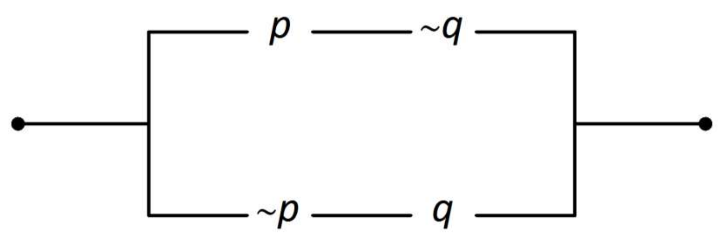
Su circuito eléctrico es:



ii) Cuando gana la segunda:

$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

Su circuito eléctrico es:



c) Los circuitos a compuertas:

Un circuito digital es un circuito electrónico cuyas entradas y salidas sólo pueden tomar dos niveles distintos de tensión. Desde el punto de vista del diseño, estos niveles se representan como 1 (verdadero) ó 0 (falso).

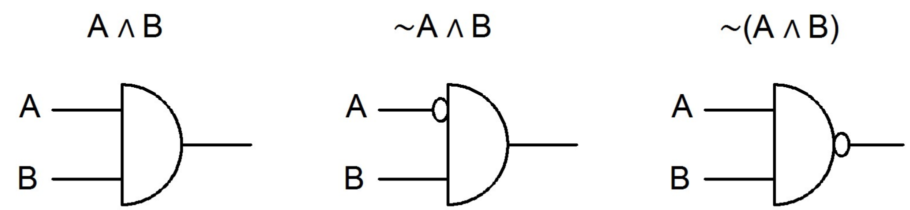
Un circuito combinacional se caracteriza por ser un sistema sin memoria: el valor de las salidas en cada instante depende sólo del valor de las entradas en ese momento.

Un circuito de estas características puede representarse analíticamente, mediante una función booleana, o gráficamente, mediante un diagrama de puertas lógicas. En estos diagramas se representan las entradas, las salidas, las operaciones o puertas lógicas y sus conexiones.

Son dos sistemas los que utilizaremos para representa a los circuitos lógicos mediante compuertas y estos son: el Sistema ASA y el Sistema ISO, cada uno de ellos con diferentes diseños de compuertas, sin embargo con similar estructura lógica para un mismo esquema molecular.

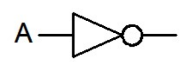
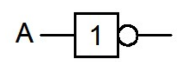
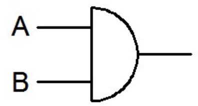
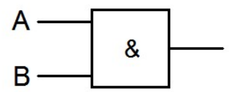
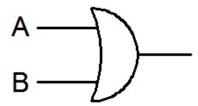
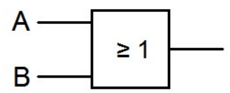
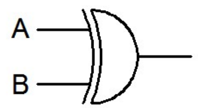
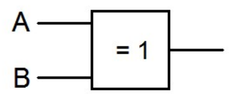
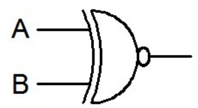
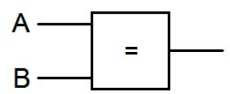
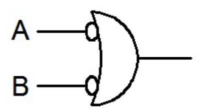
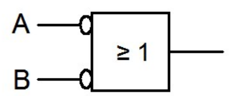
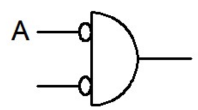
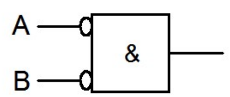
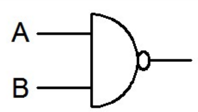
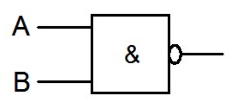
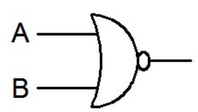
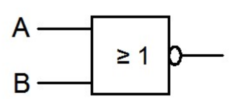
El diseño de circuitos mediante compuertas lógicas nos da la ventaja de representar negaciones internas así como externas.

Por ejemplo:



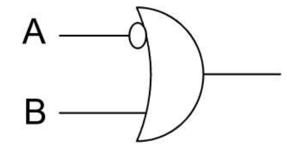
A continuación te presentaremos un Cuadro Resumen de las compuertas lógicas usadas en el desarrollo de este capítulo.

CUADRO DE RESUMEN DE COMPUERTAS LÓGICAS

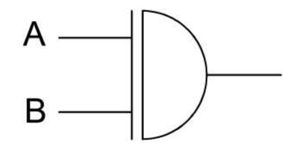
Fórmula Lógica	Sistema ASA	Sistema ISO	Operador
~A			Not
A ∧ B			And
A ∨ B			Or
A ⊻ B			Xor
A ↔ B			Nxor
A / B			
A / B			
A / B			Notand
~(A ∨ B)			Notor

Nota:

No existe una compuerta específica para el **implicador** por lo que es necesario utilizar su equivalencia, es decir, (A → B) ≡ (~ A ∨ B) por lo que la compuerta que lo representa, en Sistemas ASA, es:

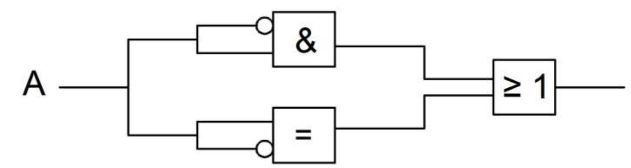


La compuerta lógica correspondiente a la **biimplicación**, en el Sistema Asa, además de la compuerta expuesta en el Cuadro Resumen, también puede ser representada por:



Mientras que en los circuitos a conmutadores la misma variable se escribe las veces que sea necesario, en los circuitos a compuertas sólo se hace una vez. Por ejemplo, para la fórmula:

(~ A ∧ A) ∨ (A ≡ ~ A), su circuito, en Sistema ISO, es:



Ejemplo 1:

Dada la fórmula lógica:

$$\sim (A \wedge \sim B) \rightarrow (\sim A \vee B)$$

El circuito que la representa, en Sistema ASA, es:

Solución:

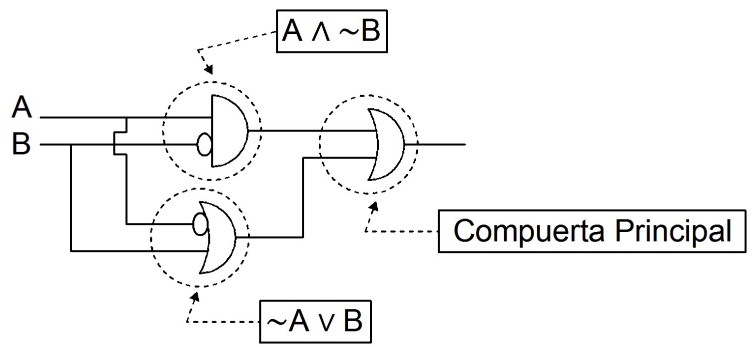
1° Determine si cada uno de los conectores tienen representación mediante compuertas lógicas. En caso contrario utilice alguna equivalencia.

Para este caso, el conector principal (→) no tiene compuerta Lógica que lo represente por lo que utilizamos su equivalencia:

$$(A \wedge \sim B) \vee (\sim A \vee B)$$

2° Identifique la compuerta principal y las compuertas secundarias. En este caso la compuerta principal es un disyuntor incluyente y las secundarias son una conjunción y otra disyunción incluyente, respectivamente.

3° Trazamos el circuito, de acuerdo a lo descrito anteriormente. En este caso, tenemos:



Ejemplo 2:

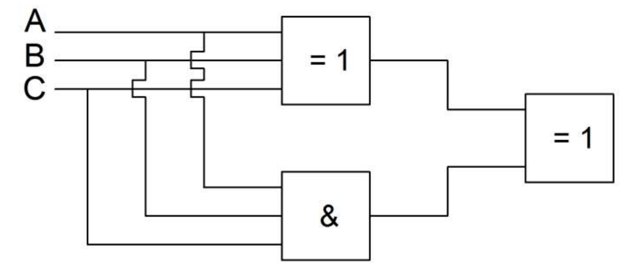
Dada la fórmula lógica:

$$(A \underline{\vee} B \underline{\vee} C) \underline{\vee} (A \wedge B \wedge C)$$

En el Sistema ISO, el circuito que la representa es:

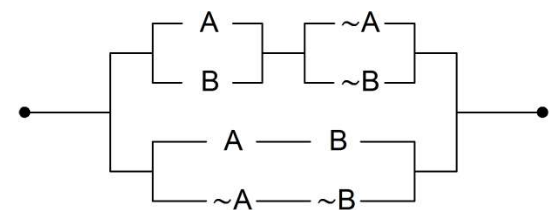
Unidad 1 / Lógica matemática

Solución:



Ejemplo 3:

Dado el circuito lógico:



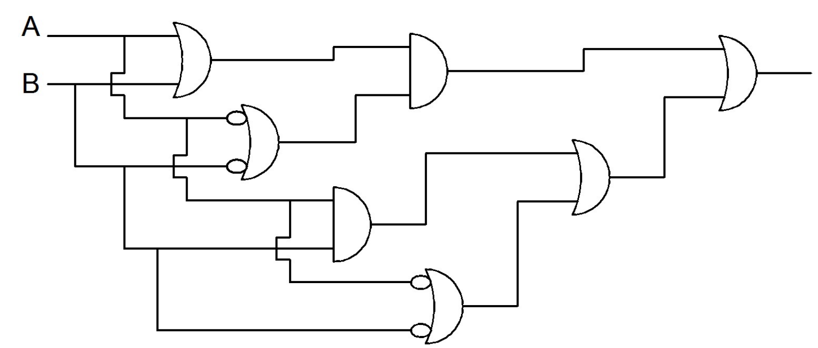
Trace el circuito equivalente en Sistema ASA.

Solución:

1° Leemos el circuito a conmutadores. En este caso tenemos:

$$[(A \vee B) \wedge (\sim A \vee \sim B)] \vee [(A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)]$$

2° Identificamos la compuerta principal y las compuertas Secundarias, luego trazamos el circuito a compuertas ASA. En este caso tenemos:



7.2 Ejercicios Resueltos.

A. Construya el circuito más simple de:

$$(q \vee r) \vee \{[(p \wedge q) \vee r)] \wedge (r \vee \sim q)\}$$

Solución:

Simplificando:

$$(q \vee r) \vee \{[(p \wedge q) \vee r)] \wedge (r \vee \sim q)\}$$

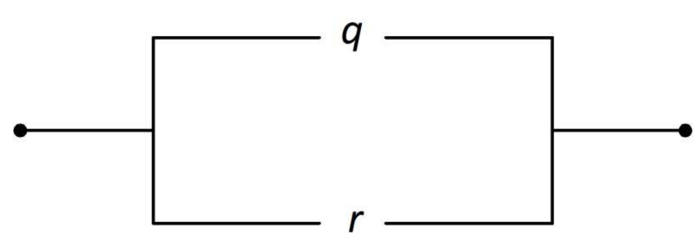
$\equiv \{(q \vee r) \vee [(p \wedge q) \vee r)]\} \wedge \{(q \vee r) \vee (r \vee \sim q)\}$ (Distributiva)

$\equiv \{(q \vee r) \vee [(q \vee r) \wedge (p \vee r)]\} \wedge \{(q \vee \sim q) \vee r\}$ (Asociativa)

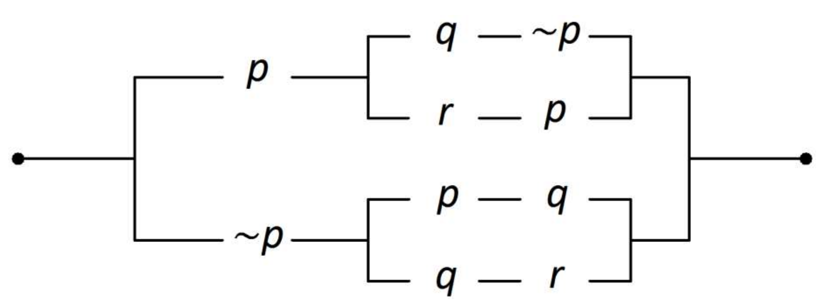
$\equiv \{(q \vee r) \vee V$ (Complementos)

$\equiv \{(q \vee r)$ (Identidad)

El circuito es:



B. Simplificar el circuito dado mediante el Álgebra de circuitos:



Solución:

Colocando en simbología de lógica proposicional:

$$\{p \wedge [(q \wedge \sim p) \vee (r \wedge p)]\} \vee \{\sim p \wedge [(p \wedge q) \vee (q \wedge r)\}$$

Llevando al Álgebra de Boole:

$$x.[(yx') + (zx)] + x'.[(xy) + (yz)]$$

$\equiv x.[(x'y) + (xz)] + x'.[(xy) + (yz)]$ (Conmutativa)

$\equiv [(xx')y + (xx)z] + [(xx')y + (x'yz)]$ (Asociativa)

$\equiv [(0)y + (xz)] + [(0)y + (x'yz)]$ (Complementación)

$\equiv xz + x'yz$ (Ley con 1 y 0)

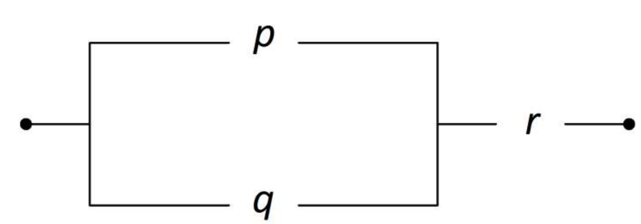
$\equiv (x + x'y)z$ (Distributiva)

$\equiv [(x + x').(x + y)]z$ (Distributiva)

$\equiv [1.(x + y)]z$ (Complementación)

$\equiv (x + y)z$

El circuito simple es:



C. Sea "s" una proposición que corresponde a la siguiente tabla:

p	q	s
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

y "r" la proposición más simplificada, equivalente a:

$[(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim q] \wedge \sim q$

¿Cuál es el circuito más sencillo, equivalente al que resulta de conectar en paralelo los circuitos correspondientes a "$\sim r$" y a "s"?

Solución:

La tabla correspondiente a "s" es: $s \equiv p \,\Delta\, q \equiv (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$

Como "r" equivale a:

$r \equiv [(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim q)] \wedge \sim q$

$\equiv [(\sim p \vee q) \leftrightarrow \sim q)] \wedge \sim q$

$\equiv \{[(\sim p \vee q) \rightarrow \sim q)] \wedge [\sim q \rightarrow (\sim p \vee q)]\} \wedge \sim q$

$\equiv \{[\sim (\sim p \vee q) \vee \sim q)] \wedge [q \vee (\sim p \vee q)]\} \wedge \sim q$

$\equiv \{[(p \wedge \sim q) \vee \sim q)] \wedge [q \vee (q \vee \sim p)]\} \wedge \sim q$

$\equiv [\sim q \wedge (q \vee \sim p)] \wedge \sim q$

$\equiv (\sim q \wedge \sim q) \wedge (q \vee \sim p)$

$\equiv \sim q \wedge (q \vee \sim p)$

$\equiv (\sim q \wedge q) \vee (\sim q \wedge \sim p)$

$\equiv \sim q \wedge \sim p$

$r \equiv \sim (p \vee q)$

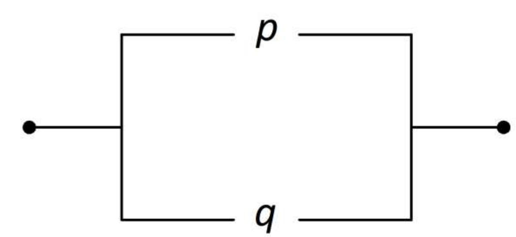
Como se pide el circuito más sencillo equivalente al que resulta de conectar en paralelo a "$\sim r$" y "s", hacemos:

$\sim r \vee q \equiv \sim [\sim (p \vee q)] \vee [(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)]$

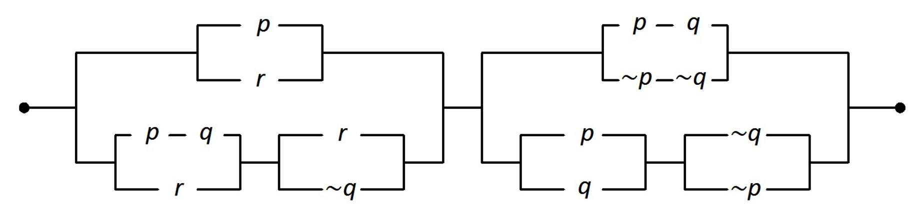
$\equiv (p \vee q)] \vee [(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)]$

$\equiv p \vee q$

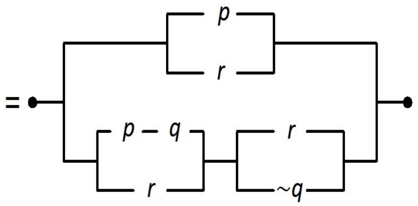
El circuito más sencillo viene dado por:

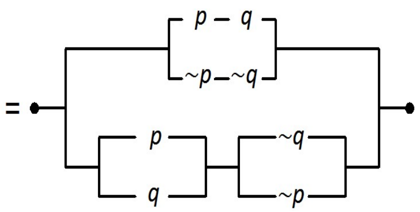


D. Diseñar el circuito lógico más simple equivalente a:



Solución: Sean:

A = 

B = 

Por bloques: A ∧ B

Donde:

$$A \equiv (p \vee r) \vee \underbrace{\{[(p \wedge q) \vee r] \wedge (r \vee \sim q)\}} \equiv (p \vee r) \vee r \equiv p \vee r$$

$$r \vee [(p \wedge q) \wedge \sim q]$$

$$r \vee [p \wedge \underbrace{(q \wedge \sim q)}_{F}]$$

$$\underbrace{r \vee F}_{r}$$

$$B \equiv [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \vee [(p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)]$$

$$\equiv [(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)] \vee [(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)]$$

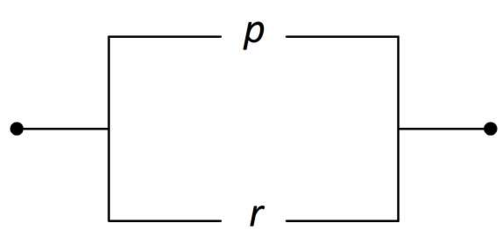
$$\equiv \sim [\sim (p \wedge q) \wedge (p \vee q)] \vee (p \Delta q)$$

$$\equiv \sim (p \Delta q) \vee (p \Delta q)$$

$$\equiv T$$

Luego, $A \wedge B \equiv (p \vee r) \wedge T \equiv p \vee r$

El circuito equivalente:



7.3 Actividad de Aprendizaje.

A. Construya el circuito más simple de:

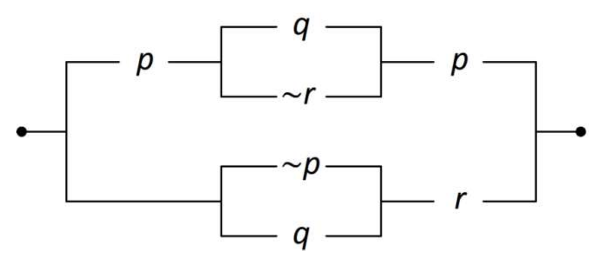
1. $[(\sim p \wedge q) \wedge (p \wedge \sim q)] \vee [(q \wedge \sim p) \vee \sim p]$
2. $[(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)]$
3. $[q \rightarrow \sim (q \leftrightarrow r)] \rightarrow [\sim (q \veebar p)]$
4. $[p \vee (\sim p \wedge q)] \vee [(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q)]$
5. $q \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge \sim (r \veebar \sim p)]$

B. Simplifica y luego construya el circuito equivalente a:

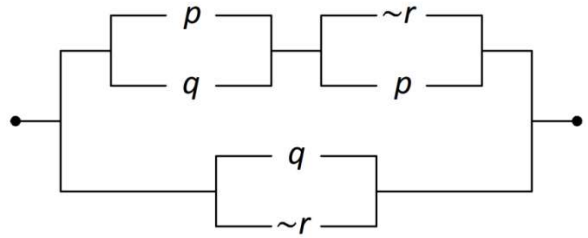
1. $(x + y).(x' + y).(x + y')$
2. $xy + yz + xy'z + yz' + xy'z'$
3. $(x'y' + yz)(x'y' + xz + yz)$
4. $\{[(x + y').y.(x' + y')] + (x'yz)\}.(x'y + yx)$
5. $(xy + x'y + xy') + (x + x'y)$

C. Simplifica los siguientes circuitos:

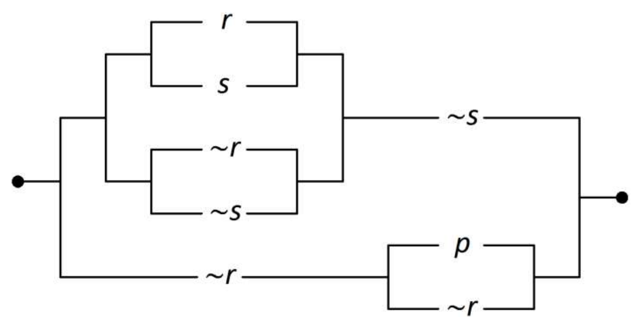
1.



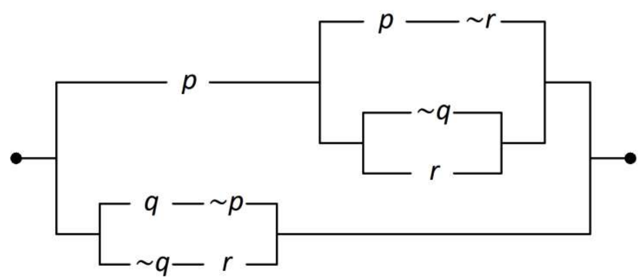
2.



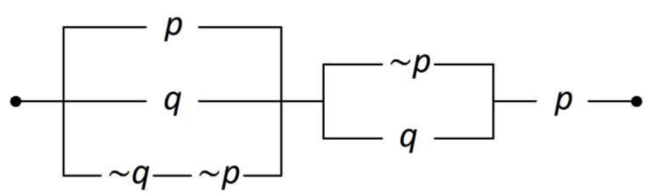
3.



4.



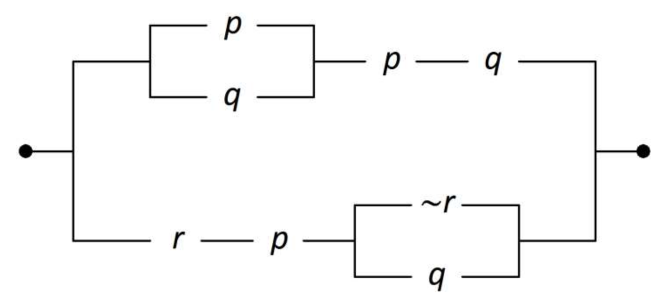
5.



Unidad 1 / Lógica matemática

D. Resuelva los siguientes problemas:

1. Un comité de tres personas desea emplear un circuito eléctrico para registrar votaciones mayoritarias simples y secretas. Construya un circuito que controle tales votaciones con sólo cinco interruptores, de modo que cada miembro del comité pueda accionar (cerrar) el interruptor asignado para decir SI con su voto o no accionar (mantenerlo abierto) el interruptor asignado para decir NO con su voto, y que se encienda una señal si la mayoría de los miembros del comité vota afirmativamente. (No se admiten abstenciones).
2. Si el costo de cada llave en la instalación mostrada es de S/. 10.00 ¿En cuánto se rendirá el costo de esta instalación si se reemplaza este circuito por uno equivalente más simple?



3. La señora Iglesias dice a su hija: acudirás a la fiesta si cumples las siguientes reglas:
   1° En toda la fiesta que no uses anteojos y debes usar falda larga.
   2° Si usas anteojos y falda larga en la misma fiesta, entonces no debes usar aretes.
   3° Si usas aretes o no usas anteojos, entonces no debes usar falda larga.

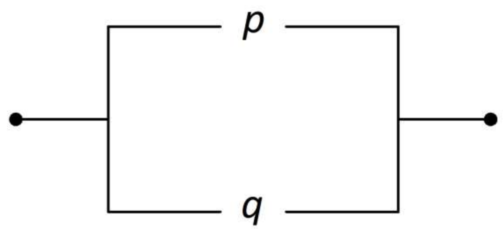
   La señorita Liliana está de acuerdo, pero algo confusa, y acude al profesor Gustavo para que simplifique el texto anterior. ¿Cuál es la orden simplificada?

7.4 Clave de Respuestas.

A. 2) Llevando al Álgebra de Boole:

$$
\begin{aligned}
xy + x'y + xy' &\equiv y(x + x') + xy' && \text{(Distributiva)}\\
&\equiv y.1 + xy' && \text{(Complementación)}\\
&\equiv y + xy' && \text{(Ley con 1 y 0)}\\
&\equiv (y + x)(y + y') && \text{(Distributiva)}\\
&\equiv (y + x).1 && \text{(Complementación)}\\
&\equiv x + y \equiv p \vee q && \text{(Conmutativa)}
\end{aligned}
$$

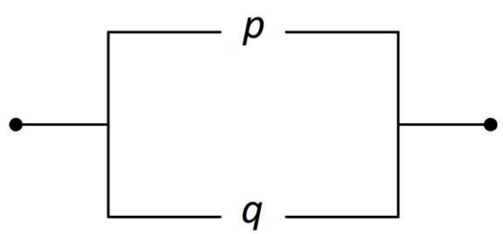
El circuito es:



4) Llevando al Álgebra de Boole:

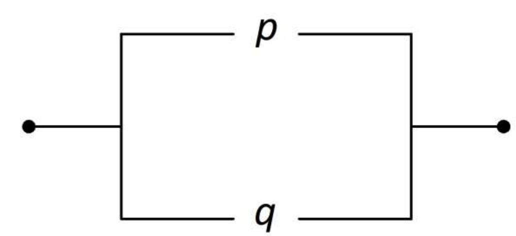
$$
\begin{aligned}
(x + x'y) + (x + y)(x' + y) &\equiv (x + x')(x + y) + (y + x)(y + x') && \text{(Distrib.)}\\
&\equiv 1(x + y) + [y + (xx')] && \text{(Compl.)}\\
&\equiv 1(x + y) + (y + 0) && \text{(Compl.)}\\
&\equiv (x + y) + y && \text{(Ley 1 y 0)}\\
&\equiv x + (y + y) && \text{(Asociat.)}\\
&\equiv x + y \equiv p \vee q && \text{(Idempot.)}
\end{aligned}
$$

El circuito es:



B. 2)
$$
\begin{aligned}
xy + yz + xy'z + yz' + xy'z' &\equiv xy + xy'(z + z') + y(z + z')\\
&\equiv xy + xy'(1) + y(1)\\
&\equiv xy + xy' + y\\
&\equiv x(y + y') + y\\
&\equiv x(1) + y\\
&\equiv x + y \equiv p \vee q
\end{aligned}
$$

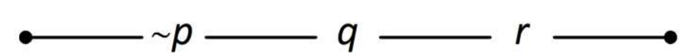
El circuito es:



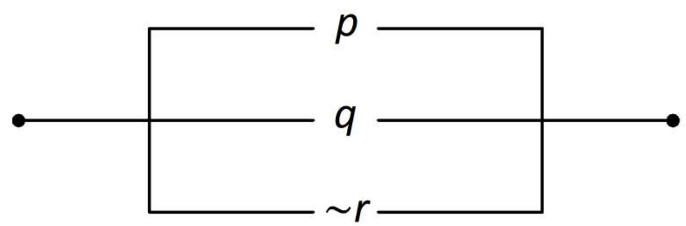
4) $\{[(x + y').y.(x' + y')] + (x'yz)\}.(x'y + yx) \equiv$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \{(xy + yy')(xy)' + (x'yz)\}.(x'y + yx)\\
&\equiv \{(xy + 0)(xy)' + (x'yz)\}.(x'y + yx)\\
&\equiv [(xy)(xy)' + (x'yz)].(x'y + yx)\\
&\equiv [0 + (x'yz)].(x'y + yx)\\
&\equiv (x'yz).(x'y + yx)\\
&\equiv (x'yz.x'y) + (x'yz.yx)\\
&\equiv (x'yz) + (0.yz)\\
&\equiv x'yz + 0\\
&\equiv x'yz \equiv \sim p \wedge q \wedge r
\end{aligned}
$$

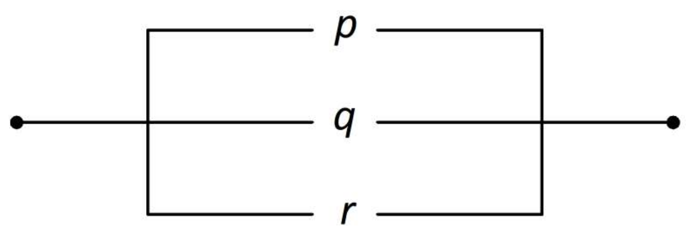
El circuito es:



C. 2)



4)



D. 2) Pasando a la forma lógica:

$[(p \vee q) \wedge p \wedge q] \vee [r \wedge p \wedge (\sim r \vee q)] \equiv$

$\equiv \{[(p \vee q) \wedge p] \wedge q]\} \vee \{[r \wedge (\sim r \vee q)] \wedge p\}$ (Asociativa)

$\equiv (p \wedge q) \vee [(r \wedge q) \wedge p]$ (Absorción)

$\equiv (p \wedge q) \vee [(p \wedge q) \wedge r]$ (Asociativa)

$\equiv p \wedge q$ (Absorción)

El circuito equivalente más simple es:

Por lo tanto, el costo de la instalación se reduce a:

2 x 10 = S/. 20.00

"Puede que te decepciones si fallas, pero estarás perdido si no lo intentas".

EXÁMENES DE LA PRIMERA UNIDAD

PRIMERA AUTOEVALUACIÓN

I. ¿Cuál de los siguientes enunciados es una proposición? En caso afirmativo, diga si es simple, compuesta o abierta.

1. Lima es la capital del Perú.
2. El color azul es el más bonito.
3. El teorema es de Godel.
4. Cierra la puerta.
5. ¡Fuego!
6. 5 es un número primo.
7. El metro cúbico es una unidad de superficie.
8. El río que cruza el Santa.
9. x es un número par.
10. x es un día de la semana.

II. Indica el valor de verdad o el conjunto solución de cada proposición.

1. El cuadrado de 7 es 48.
2. x es un número primo del 1 al 40.
3. Ayer fue Lunes por lo tanto hoy es Martes.
4. Liliana y Omar son hermanos.
5. Aceptaré el trabajo únicamente si me pagan lo que les pedí.
6. x es divisor de 24.
7. Melva estuvo ayer en casa.
8. x es múltiplo de 6.
9. No es tarde.

10. El valor se mide por la cantidad de trabajo acumulado y la cantidad de trabajo acumulado se mide a través de la cantidad del esfuerzo realizado entre el tiempo transcurrido.

III. Considera las proposiciones:

p: La fiebre es riesgosa.

q: La fiebre generalmente es causada por una infección interna.

r: Programar nuestras actividades de trabajo no es importante.

s: Programar nuestras actividades de trabajo es positivo.

Simboliza y halla el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

1. La fiebre es riesgosa puesto que es causada por una infección interna.
2. Programar nuestras actividades de trabajo es positivo pero no importante.
3. No es cierto que la fiebre sea riesgosa ya que no es causada por una infección interna.
4. La fiebre no es riesgosa o no es causada por una infección interna.
5. Programar actividades de trabajo es positivo e importante.
6. No es cierto que no programar actividades de trabajo sea negativo cada vez que es importante.

IV. Da la negación de cada proposición simple y su valor de verdad, en cada caso de una proposición abierta da el conjunto solución, $x \in \mathbb{N}$.

1. x es un número primo, $x < 10$.
2. La suma de los ángulos de un triángulo es 180°.

Unidad 1 / Lógica matemática

3. x es un número par.
4. El metro cúbico es una unidad de superficie.
5. x es el cuadrado de un número natural menor que 40.
6. 3829 es divisible entre 7.

V. Dados:

p = Proposición verdadera.

q = Proposición falsa.

r = Proposición verdadera.

Encuentra el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

1. $p \to q$
2. $p \wedge r$
3. $\sim p \wedge \sim q$
4. $\sim (p \vee q)$
5. $p \leftrightarrow q$
6. $r \to q$
7. $(r \wedge q) \vee p$
8. $p \vee q$
9. $(p \wedge q) \leftrightarrow (r \vee p)$
10. $\sim p \leftrightarrow \sim q$

VI. Dadas las proposiciones:

p: x > 7

q: x > 9

U: {1, 2, 3, 4, 5,…,16}

1. Haz la conjunción y forma el conjunto solución.
2. Haz la disyunción y forma el conjunto solución.
3. Haz la implicación ($p \rightarrow q$) y da el valor de verdad.
4. Haz la implicación ($q \rightarrow p$) y da el valor de verdad.
5. Haz la negación de la disyunción (usa ley de Morgan) y forma el conjunto solución.
6. Haz la negación de la conjunción (usa la ley de Morgan) y forma el conjunto solución.

VII. Elabora una tabla de verdad de las siguientes proposiciones y diga si es Tautológica, Contingente o Contradictoria:

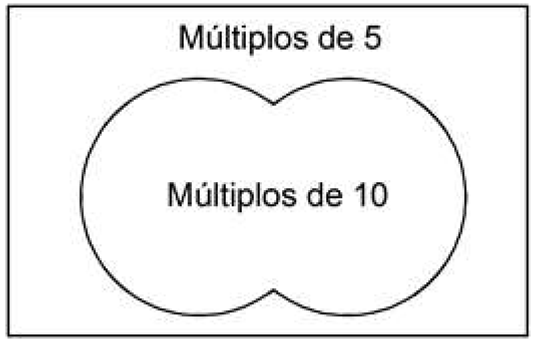
1. $\sim (\sim p \wedge \sim q)$
2. $(p \vee q) \wedge \sim (p \vee q)$
3. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$
4. $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee q)$
5. $\sim [q \vee (p \rightarrow q)]$
6. $\{[(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)] \rightarrow q\} \rightarrow p$

VIII. Dada la implicación, haz la recíproca y la contrarrecíproca, y a continuación el valor de verdad de cada una:

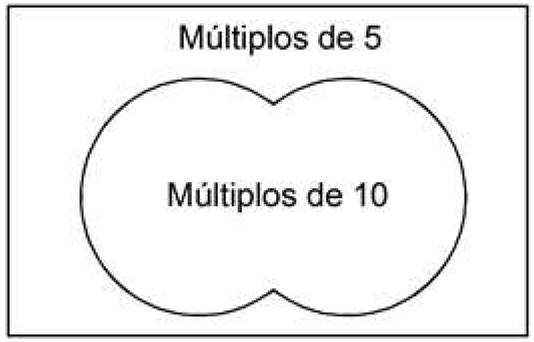
1. Si un número se puede dividir entre 6, entonces es un número par.
2. Si un número es menor que 10, entonces es menor que 15.

IX. Haz una implicación de acuerdo con el diagrama que sea verdadera:

1.

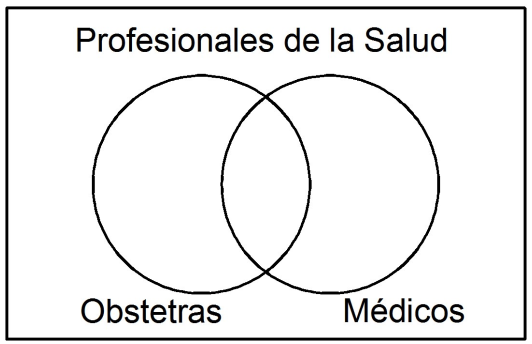


2.



3.

4.



X. Dadas las proposiciones:

p: x es divisible entre 6.

q: x es divisible entre 2 y 3.

Indica la bicondicional y haz un diagrama de Venn – Euler.

Unidad 1 / Lógica matemática

SEGUNDA AUTOEVALUACIÓN

I. Señala el valor de verdad o el conjunto solución de cada proposición:

1. No es cierto que 4 es mayor que 12.
2. 35 es múltiplo de7.
3. Si $x < 7$, entonces $x < 4$, $x \in \mathbb{N}$.
4. Si 81 es el cuadrado de 9, entonces 8 es el cubo de 3.
5. Un número es primo si, y sólo si es divisible solamente entre sí mismo y la unidad.
6. No todo número natural es par.
7. Algunos pares son primos.
8. Ningún par es múltiplo de 3.
9. x es el cuadrado de un número natural menor que 40.
10. x es un número compuesto, $x \in \mathbb{N}$.

II. Da la negación de cada proposición y su valor de verdad. En caso de una proposición abierta, da el conjunto solución.

1. $\sqrt[3]{27} = -3$
2. Los números que no son menores que 10.
3. x no es múltiplo de 3, entonces es múltiplo de 6, $x \in \mathbb{N}$.
4. $x < 7$ o $x \geq 4$, $x \in \mathbb{N}$.
5. x no es múltiplo de 3 y $x \leq 5$.
6. $2 < x < 5$, $x \in \mathbb{N}$.

III. Dados las proposiciones:

p: Ofelia estudia Biología en Acuicultura.

q: Ofelia es buen estudiante.

r: Ofelia tiene buenos libros.

1. Escribe literalmente: a) $(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim r$ b) $p \vee (\sim q \rightarrow r)$
2. Expresa en forma simbólica:
   a) Ofelia será buen estudiante a menos que tenga buenos libros, pero de todas maneras estudiará Biología en Acuicultura.
   b) Si Ofelia no estudia Biología en Acuicultura y es buen estudiante, implica que no tiene buenos libros.

IV. Enuncia las siguientes implicaciones en forma equivalente:

1. Un polígono tiene 5 lados sólo si es pentágono.
2. Si una figura es un cuadrado, entonces es un paralelogramo.
3. Si x = 3, entonces $x^3 = 27$.

V. Da un contraejemplo que muestre la falsedad de las siguientes implicaciones:

1. Si x es primo, entonces x es impar.
2. Si x es divisor de 12, entonces x es múltiplo de 2.

VI. Dada las proposiciones:

p: x es el cuadrado de un número natural.

q: x es múltiplo de 4.

U: {1, 2, 3, 4, 5,…, 20}.

1. Haz la disyunción y el conjunto solución.
2. Haz la conjunción y el conjunto solución.
3. Haz la implicación ($p \rightarrow q$) e indica el valor de verdad.
4. Haz la contrarrecíproca de la implicación e indica el valor de verdad.
5. Haz la negación de la disyunción y elabora el conjunto solución.

6. Haz la negación de la conjunción y elabora el conjunto solución.
7. Haz la doble implicación e indica el valor de verdad.
8. Haz la negación de la proposición p y elabora el conjunto solución.

VII. Se sabe que p y q; q t son falsos, entonces cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas:

1. $\sim [p \wedge (\sim q \vee \sim p)]$
2. $[\sim p \vee (q \wedge \sim t)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge \sim (p \wedge t)]$

VIII. Identifica la(s) premisa(s) y la conclusión de cada uno de los siguientes argumentos:

1. Destruir un libro es casi como matar a un hombre; quién mata a un hombre mata a un ser de razón, imagen de Dios; pero quien destruye un buen libro, mata a la razón misma.
2. Puesto que la felicidad consiste en la paz del espíritu, y puesto que la paz durable del espíritu depende de la confianza que tengamos en el futuro, y puesto que la confianza se basa en la ciencia que debemos tener acerca de la naturaleza de Dios y el alma, se sigue que la ciencia es necesaria para la verdadera felicidad.

IX. Demuestra que las dos proposiciones siguientes son equivalentes:

1. $[\sim (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim r)] \equiv \{[p \wedge (p \vee \sim r)] \wedge (\sim q)\}$
2. $\sim (p \rightarrow q) \equiv [(p \vee q) \wedge \sim q]$

X. Simplifica:

1. $[(\sim p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$
2. $\sim \{[(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge (\sim p \vee q))]\} \rightarrow \sim (p \vee q)$
3. $\{[(p \rightarrow (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (q \rightarrow r)]\} \vee \{[p \wedge q \wedge (p \vee q)] \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]\}$

TERCERA AUTOEVALUACIÓN

I. Da la solución o el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

1. 371 es divisible entre 3 y 7.
2. Si un número es divisible entre 3, entonces es divisible entre 6.
3. x^2 es par si, y sólo si, x es par.
4. x es múltiplo de 3 ó 4.
5. x es divisor de 7 y 8, $x \in \mathbb{N}$.
6. Si **a** divide a **b** y **a** divide a la suma de **a** y **c**, entonces **a** divide a **c**.

II. Simboliza y dibuja un diagrama de Venn – Euler que ilustre las siguientes proposiciones:

1. Ningún $x < 3$ es $x > 9$.
2. Existen algunos pares que son menores que 10.
3. Todos los menores que 6 son menores que 8.
4. Si x es múltiplo de 4, entonces x es impar.
5. Todos los rectángulos y todos los rombos son paralelogramos.
6. Algunos hombres no son médicos o enfermeros.
7. No todos los médicos son cardiólogos.
8. Algunos estudiantes de Enfermería son varones.

III. Sean:

p = el deltoides es un músculo del tórax.

q = el risomio es un músculo de la cara.

Simbolizar:

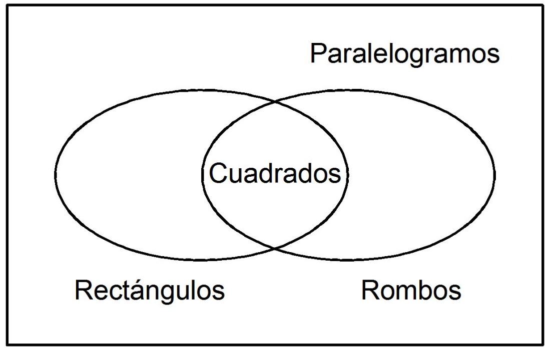
1. Es inadmisible que, el deltoides es un músculo del tórax y el risomio es un músculo de la cara.

2. No ocurre que, el risomio es un músculo de la cara, incluso el deltoides es un músculo del tórax.

IV. Use cuantificadores y efectúa la negación de:

1. Los enfermeros y los médicos son profesionales de la salud.
2. Todos los números reales son enteros.
3. Algunos triángulos son rectángulos.
4. Cuando menos un natural, si es par entonces no divide a 44.
5. Sólo los enfermeros tienen el cuidado del paciente.

V. Escribe cinco proposiciones con cuantificadores de acuerdos con el diagrama siguiente:



VI. Halla el equivalente de la negación de:

1. $\forall x: \forall y: \exists z / x + y = z$
2. $\forall x: [P(x) \wedge Q(y)]$
3. $\forall x: \exists y: \forall z: (x > y \;\; \vee \;\; x - y < y)$
4. $(\exists x: x = 3) \vee (\forall y: y^2 > 2)$
5. $(\exists x: x < 3) \leftrightarrow (\exists x: x \geq x)$

VII. Determina si los siguientes argumentos son o no válidos:

1. "Todos los hombres son racionales. Ningún delfín es racional. Por tanto, ningún delfín es un hombre".
2. "El glaucoma no tratado es causa principal de una ceguera progresiva sin dolor. Se dispone de métodos para la detección oportuna y el tratamiento efectivo. Por esta razón, la ceguera por glaucoma crónico es especialmente trágica".
3. "La investigación de los fenómenos naturales está más allá del alcance de la ciencia. Por tanto, la ciencia no puede probar ni refutar la existencia de Dios".
4. "todos los médicos son impacientes. Algunos médicos son sordos. Por tanto algunos sordos son impacientes".

VIII. Aplica implicaciones notables y leyes lógicas en el análisis de:

1. Con las siguientes premisas, deducir: $\sim p$.

   P_1: $r \rightarrow q$

   P_2: r

   P_3: $\sim s \rightarrow q$

   P_4: $q \rightarrow p$

2. Demuestra $x = 1$; a partir de las siguientes premisas:

   P_1: $\sim (z < 3 \;\; \vee \;\; x > y) \wedge y = 2$

   P_2: $x \not< y \;\; \vee \;\; x = 1$

   P_3: $(x > z) \rightarrow (x > y)$

   P_4: $(x \not> z) \rightarrow (x < y)$

Unidad 1 / Lógica matemática

IX.

1. Construya el circuito más simple de:

   a) $[(\sim p \wedge q) \wedge (p \wedge \sim q)] \vee [(q \wedge \sim p) \vee \sim p]$

   b) $q \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge \sim (r \veebar \sim p)]$

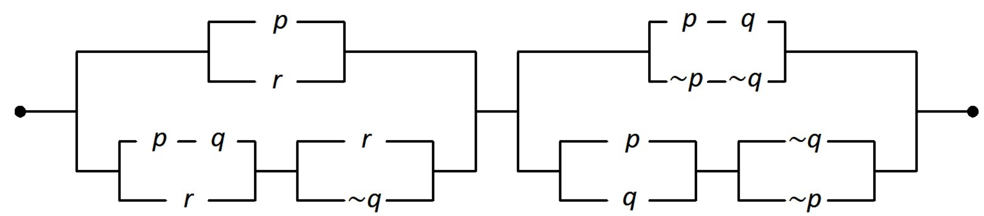
2. Simplifica y luego construya el circuito equivalente a:

   a) $(x + y).(x' + y).(x + y')$

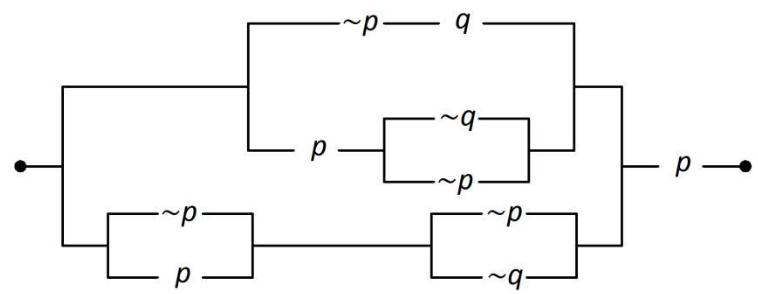
   b) $(xy + x'y + xy') + (x + x'y)$

X. Simplifica los siguientes circuitos:

1.



2.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS DE UNIDAD

1. COPY, Irving. 1981. Introducción a la Lógica. Buenos Aires. EUDEBA.
2. CHÁVEZ, Alejandro. 2001. Introducción a la Lógica. Lima. Imprenta Chávez.
3. FERRATER, José y Hugges LEBLANC. 1999. Lógica Matemática. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.
4. KATAYAWA, Roberto. 2003. Introducción a la Lógica. Lima: Universidad Ricardo Palma.
5. LAZARO, Moisés. 2005. Lógica y Teoría de Conjuntos. Lima: Editorial MOSHERA S.R.L.
6. PISCOYA, Luis. 1997. Lógica. Lima: Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
7. REDMOND, Walter. 1999. Lógica Simbólica para todos. México: Universidad Veracruzana.
8. ROSALES, Diógenes y Oscar TRELLES. 1999. Introducción a la Lógica. Lima. Pontificia Universidad Católica del Perú.
9. SUPPES, Patrick. 1969. Introducción a la Lógica Simbólica. México: Compañía Editorial Continental.
10. SUPPES, Patrick y Shirley HILL. 1999. Introducción a la Lógica Matemática. México. Editorial Reverté.