1 Antiderivadas

DEFINICIÓN: una función F, se denomina antiderivada de f en un intervalo I, si F'(x) = f(x) $\forall x \in I$.

Ejemplo

Sea $\underbrace{F(x) = x^2}_{Antiderivada} \Rightarrow F'(x) = 2x = f(x)$

$G(x) = x^2 + 8 \Rightarrow G'(x) = 2x = f(x)$

$H(x) = x^2 - 30 \Rightarrow H'(x) = 2x = f(x)$

$J(x) = x^2 + k \Rightarrow J'(x) = 2x = f(x)$

TEOREMA:Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, la antiderivada de más general de f en I es:

F(x) + C

En donde C es una constante arbitraria.

Ejemplo

1. $F(x) = -\cos x \Rightarrow F'(x) = senx = f(x)$

   Entonces la derivada de $senx$ es $-\cos x$

2. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} \Rightarrow F'(x) = x^2$

   Entonces la derivada de $f(x) = x^2$ es $\dfrac{x^3}{3}$

Tabla de fórmulas de antidiferenciación

FUNCIÓN	ANTIDERIVADA PARTICULAR
C f (x)	C F(x)
f (x) + g (x)	F(x) + G(x)
x^n ($n \neq -1$)	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	lnx
e^x	e^x
Cos x	Sen x
Sen x	- cos x
Sec^2x	Tg x
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$sen^{-1}x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$tg^{-1}x$

PROBLEMA

Una partícula, o punto material, se mueve en línea recta y su aceleración esta expresado por $a(t)=6t+4$. Su velocidad inicial es $v(0)=-6\ cm/seg$ y su desplazamiento inicial, $s(0)=9cm$. Determinar su función de posición.

Solución

$$
\begin{aligned}
a(t) &= v'(t) \\
&= 6t+4 \\
v(t) &= 3t^2+4t+C \\
v(0) &= -6 \\
v(t) &= 3t^2+4t-6 \\
v(t) &= s'(t) = 3t^2+4t-6 \\
&= s(t) = t^3+2t-6t+C_1 \\
s(0) &= 9m \Rightarrow s(t) = t^3+2t^2-6t+9
\end{aligned}
$$

INTEGRAL INDEFINIDA

La integral indefinida de f (x) es el conjunto de antiderivadas de f (x), esto es.

$$\int f(x)dx = (F(x)+C) \text{ donde } F'(x) = f(x)$$

Observación:

1. $\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = f(x)$
2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$
3. $\int f'(x)dx = f(x)+c$
4. $\int d(f(x)) = f(x)+c$

PROPIEDADES:

Si f y g son funciones que admiten antiderivadas en I, entonces lo mismo sucede con $f \pm g$, kf donde k es constante y se tiene:

a) $\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

b) $\int \left[kf(x) \right] dx = k\int f(x)\,dx$, k = constante

INTEGRACIÓN INMEDIATA MEDIANTE TABLAS

1	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$
2	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$
3	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + c, \quad (a \neq 0)$
4	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + c \quad (a \neq 0)$
5	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{a+x}{a-x} \right\rvert + c \quad (a \neq 0)$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+a} \right\rvert + c \quad (a \neq 0)$
7	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsen \frac{x}{a} + c = -\arccos \frac{x}{a} + c_1 \quad (a > 0)$
8	$\int e^x dx = e^x + c$
9	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0)$
10	$\int sen\, x\, dx = -\cos x + c$
11	$\int \cos x\, dx = senx + c$
12	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
13	$\int \frac{dx}{sen^2 x} = -ctgx + c$
14	$\int \frac{dx}{senx} = \ln\left\lvert tg\frac{x}{2} \right\rvert + c = \ln\lvert \csc x - ctgx \rvert + c$
15	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \right\rvert + c = \ln\lvert tgx + \sec x \rvert + c$
16	$\int senh\, x\, dx = \cosh x + c$
17	$\int \cosh x\, dx = senhx + c$
18	$\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + c$
19	$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + c$

Ejemplo

$\int (e^x - 2x^2 + x)\, dx$

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

1. INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE.

   Se basa en el método de derivación de la función compuesta.

   Se desea calcular $\int f(x)dx$, donde $f : I \to \mathbb{R}$

   $\Rightarrow$ Sea $x = \varphi(t)$ tal que $\varphi : J \to I$, $\varphi'(t) \neq 0,\ \forall t \in J$ si la función $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt, t \in J$ admite una función primitiva G en J, esto es

$$G'(t) = g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t), \forall t \in J$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int f(x)\,dx &= \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \\ &= \int g(t)\,dt \\ &= G(t) + C\end{aligned}$$

$$\int f(x) = G(\varphi^{-1}(x)) + C$$

   EJEMPLO

   Calcular:

   a) $\int x(2x+5)^{10}\,dx$

   b) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

   c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$

   d) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$

   e) $\int \frac{5e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

   f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

2. TRINOMIOS CUADRADOS

   Tipo: $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx$

   EJEMPLOS

   a) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

   b) $\int \frac{dx}{x^2+2x}$

   c) $\int \frac{x\,dx}{x^2-7x+13}$

   d) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$

3. INTEGRALES DE TIPO $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$ completando cuadrados en el trinomio de segundo grado, esta integral se reducirá a una de las integrales principales:

a) $\int \sqrt{a^2-x^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} arc\,sen \frac{x}{a} + c$

b) $\int \sqrt{x^2+a}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2} \ln(x+\sqrt{x^2+a}) + c$

EJEMPLO

a) $\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx$

4. INTEGRACIÓN POR PARTES

u y v funciones definidad derivables en el intervalo I, por la regla de la diferencial del producto se tiene:

$$d(u.v) = udv + vdu \text{, de donde}$$

$$udv = d(uv) - vdu$$

Integrando miembro a miembro

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Observación

:Se elige u generalmente (no siempre) a aquellos que se simplifican con la derivación como: x^n ($n \in \mathbb{N}$), lnx, arc senx, arctgx etc.

EJEMPLO

Calcular:

a) $\int \ln x\,dx$

b) $\int x^2 \ln x\,dx$

c) $\int x arctg^2 x\ dx$

d) $\int \frac{(x^2 - sen^2 x)dx}{x - senx\cos x + x\cos x - senx}$

e) Si $f''(x) = -a\,f(x)$ y $g''(x) = b\,g(x)$ donde a y b son constantes encontrar la integral $\int f(x) g''(x)\,dx$

5. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES.

Dados dos polinomios P(x) y Q(x) racionales con coeficientes reales; f(x) es una función racional si es el cociente de dos polinomio racionales, esto es, si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde Q(x) $\neq 0$.

Si el grado del numerador es mayor que la del denominador se divide, con la intención de tener una expresión mixta. Al descomponer el polinomio reducido en fracciones parciales, se puede presentar los siguientes casos:

a)

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x-b)}$$

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)(x-b)}=\frac{(x-b)A}{(x-a)}+\frac{(x-a)B}{(x-b)}$$

$$P_1(x)=(x-b)A+(x-a)B$$

$$P_1(x)=(x+b)A+(x+a)B$$

$$P_1(x)=x^2+(bA+aB)x+(bA+aB)$$

Luego mediante polinomios idénticos se determina las constates A y B, sabiendo a demás que a y b son números conocidos.

Ejemplo:

Calcular la integral: $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$

Solución

Como se puede apreciar $\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$ es una fracción racional propia. Se procede a expresar dicha fracción racional en fracciones parciales.

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+3)}+\frac{C}{(x-4)}$$

$$2x^2+41x-91=(x+3)(x-4)A+(x-1)(x-4)B+(x-1)(x+3)C$$

$$2x^2+41x-91=(x^2-x-12)A+(x^2-5x+4)B+(x^2+2x-3)C$$

b)

6. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

a) INTEGRALES DE TIPO: $\int sen^m x\cos^n xdx$ …………….(*)

Donde m y n son números enteros.

1) cuando $m = 2k + 1$ es un número impar y positivo, se supone

$$-\int sen^{2k}x\cos^n xd(\cos x)=-\int(1-\cos^2 x)^k\cos^n xd(\cos x)\,.$$

De forma análoga se procede cuando n es un número impar positivo.

Ejemplo

$$\int sen^{10}x\cos^3 x dx = \int sen^{10}x(1-sen^2x)d(senx)$$

$$= \frac{sen^{11}x}{11} - \frac{sen^{13}x}{13} + c$$

Si n es impar positivo se procede de manera similar, es decir, se factoriza cosxdx y se Se expresa los cosenos restantes en función de senos usando la identidad $\cos^2 x = 1 - sen^2 x$

2) Cuando m y n son números pares y positivos, la expresión subintegral …(*) se transforma valiéndose de las fórmulas:

$$sen^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$= senx\cos x = \frac{1}{2}sen2x$$

Al efectuar las operaciones se obtienen términos que contienen potencias pares e impares de cos2x. Los términos que tienen las potencias impares, se integran teniendo en cuenta el caso 1). Los términos que tienen las potencias pares, se reducen de nuevo, usando sucesivamente las fórmulas indicadas.

Ejemplo

$$\int \cos^2 3x\, sen^4 3x\, dx$$

b) INTEGRALES DE TIPO $\int tg^m \sec^n x\, dx, \int ctg^m \csc^n x\, dx$

1) Si m es un entero impar positivo. Se factoriza tagx secx (o ctgx cscx dx); y se expresa las tangentes restantes en términos de secx mediante la identidad: $tg^2 u = \sec^2 u - 1$ o $ctg^2 u = \csc^2 u - 1$

Ejemplo

Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{tg^3 x}{\sec^4 x} dx$

b) $\int ctg^5 x$

2) Si n es un entero impar positivo.

Se factoriza $\sec^2$x dx o $\csc^2$x y el resto de las secantes o cosecantes, se transforma en términos de tgx o ctgx usando la identidad: $\sec^2 x = 1 + tg^2 x$ o $\csc^2 x = 1 + ctg^2 x$

Ejemplo

Calcular las siguientes integrales.

a) $\int tg^{\frac{3}{2}} x \sec^4 x\, dx$

b) $\int \csc^4 x\, dx$

c) INTEGRALES DE LA TIPO

$$\int sen(mx)\cos(nx)dx, \int sen(mx)sen(nx)dx, \int \cos(mx)\cos(nx)dx,$$

Para el cálculo de estas integrales se usan las fórmulas:

$$sen(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[sen(m-n)x + sen(m+n)x\right]$$

$$sen(mx)sen(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$$

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]$$

Ejemplo:
Calcular las siguientes integrales:

a) $\int sen2x\cos 3x dx$

b) $\int \cos 3x \cos 4x dx$

c) $\int sen^3 3x tg3x dx$

d) $\int \frac{sen^4 x + \cos^4 x}{sen^2 x - \cos^2 x} dx$

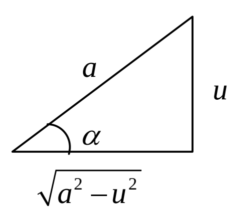
7. INTEGRALES POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Las integrales de la forma $\int R(x, \sqrt{px^2+qx+r})\,dx$ donde R es una función racional en las variables x y $\sqrt{px^2+qx+r}$, se pued4e simplificar por medio de una sustitución trigonométrica adecuada.

El trinomio px^2+qx+r, completando cuadrados, puede ser escrito como:

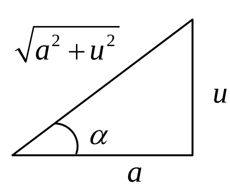
u^2+a^2 o u^2-a^2 o a^2-u^2 donde a es una constante.

a) Si el trinomio tiene la forma a^2-u^2, mediante la sustitución $u = a\,sen\,\alpha$, $a>0$ se elimina el radical, pues, $\sqrt{a^2-u^2} = a\cos\alpha$. También se tiene que $du = a\cos\alpha\, d\alpha$. Se puede regresar a la variable original *u*, utilizando el triángulo siguiente:



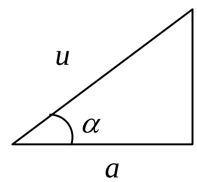
$$sen\,\alpha = \frac{u}{a}$$

b) Si el trinomio tiene la forma a^2+u^2, mediante la sustitución $u = a\,tg\,\alpha$, $a>0$ se elimina el radical, pues, $\sqrt{a^2+u^2} = a\sec\alpha$. También se tiene que $du = a\sec^2\alpha\, d\alpha$. Se puede regresar a la variable original *u*, utilizando el triángulo siguiente:



$$tg\,\alpha = \frac{u}{a}$$

c) Si se tiene la forma $u^2 - a^2$, mediante la sustitución $u = a\sec\alpha$, $a > 0$ se elimina el radical, pues, $\sqrt{u^2 - a^2} = a\,tg\,\alpha$. También se tiene que $du = a\sec\alpha\, tg\alpha\, d\alpha$. Se puede regresar a la variable original *u*, utilizando el triángulo siguiente:



$\sqrt{u^2 - a^2}$ $\qquad$ $\sec\alpha = \dfrac{u}{a}$

Ejemplo

1) Calcular $I = \int \sqrt{9 - x^2}\, dx$

2) Calcular $I = \int \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 - 9}}\, dx$

3) Calcular $\int \dfrac{x^5 dx}{(3 - x^2)^4}$

8. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES IRRACIONALES: La estrategia para resolver esta clase de integrales es hacer un adecuado cambio de variable y expresarlo en una combinación lineal de funciones elementales.

a) INTEGRALES DE TIPO: $\int R(x)\left[x,\left(\frac{a+bx}{c+dx}\right)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}},....\left(\frac{a+bx}{c+dx}\right)^{\frac{\alpha_k}{\beta_k}}\right]dx$, donde R(x) es una función racional que depende de x, $\frac{\alpha_1}{\beta_1}...\frac{\alpha_k}{\beta_k}$ son racionales, tomemos $n=m.cm\left[\beta_1,\beta_2,...,\beta_k\right]$, luego haciendo un cambio de variable $\frac{a+bx}{c+dx}=t^n$, luego despejando x, se tiene: $x=\frac{t^nc-a}{b-dt^n}$ finalmente $dx=\frac{(bc-ad)nt^{n-1}}{(b-dt^n)}dt$

Se tiene por lo tanto que R(x) es una función racional en la variable de t.

Ejemplo

Calcular $J=\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})}$

Solución

Se tiene los exponentes fraccionarios $\frac{1}{2},\frac{1}{4}$, entonces $m.c.m.(2,4)=4$, luego haciendo un cambio de variable adecuado $x=t^4$ y diferenciando tenemos $dx=4t^3dt$ reemplazando en la integral en cuestión se tiene: $J=\int\frac{4t^3dt}{t^2(1+t)}=\int\frac{4tdt}{1+t}=\int\left(4-\frac{4}{t+1}\right)dx$

$$=4t-4\ln\left|t+1\right|+c$$

$$=4x^{\frac{1}{4}}-4\ln\left|x^{\frac{1}{4}}+1\right|+c$$

b) INTEGRALES DE TIPO: $\int\frac{dx}{\left(x-a\right)^n\sqrt[n]{px^2+qx+r}},\ n\in\mathbb{N}$

Para resolver integrales de este tipo se hace un cambio de variable haciendo $x-a=\frac{1}{t}$ donde $dx=\frac{dt}{t^2}$.

Ejemplo:

Calcular: $I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2+x+4}}$

Solución

Haciendo la sustitución $x=\frac{1}{t}$

$$\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{4}{t^2}+\frac{1}{t}+4}}=-\int\frac{tdt}{\sqrt{4t^2+t+4}}=-\int\frac{\frac{1}{8}(8t+1)-\frac{1}{8}}{\sqrt{4t^2+t+4}}dt$$

$$=-\frac{1}{8}\int\frac{8t+1}{\sqrt{4t^2+t+4}}dt+\frac{1}{8}\int\frac{dt}{\sqrt{(2t+\frac{1}{4})^2+\frac{63}{16}}}$$

$$=-\frac{1}{4}\sqrt{4t^2+t+4}+\frac{1}{2\sqrt{63}}\ln\left|2t+\frac{1}{4}+\sqrt{4t^2+t+4}\right|+c$$

$$=-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4+4x^2+x}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{63}}\ln\left|\frac{8+x}{4x}+\frac{\sqrt{4x^2+x+4}}{x}\right|+c$$

c) INTEGRALES DE TIPO: $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

En este caso R es una función racional en las variables x,y $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Una integral de esta forma puede ser calculada usando las sustituciones de Euler,. Estas sustituciones permite transformar el integrando en una función racional de una variable t. Se presentan 3 casos:

Caso 1. Si $c\geq 0$, haciendo el cambio de variable $\sqrt{ax^2+bx+c}=bx+\sqrt{c}$ se obtiene, elevando al cuadrado, $ax^2+bx+c=t^2x^2+2\sqrt{c}tx+c$ de donde $x\left[x\left(a-t^2\right)-2\sqrt{c}t+b\right]=0$.

En esta última ecuación, despreciando la solución x = 0, se obtiene $x=\varphi(t)$ que es una función racional de t y $dx=\varphi'(t)dt$ donde $\varphi'(t)$ es también una función racional de t, por lo tanto $$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=\int R(\varphi(t),t\varphi+\sqrt{c})\varphi'(t)dt$$

donde el integrando del segundo miembro es una función racional en la variable t.

Ejemplo.

Calcular $J=\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2+x+1}}$

Solución

Haciendo $y=\sqrt{2x^2+x+1}=tx+1$ obtenemos, elevando al cuadrado, $2x^2+x=t^2x^2+t\,x$ despreciando la solución x = 0, se tiene:

$$x=\frac{2t-1}{2+t},dx=\frac{2(t^2-t+2)}{2-t^2}dt,y=\frac{t(2t-1)}{2-t^2}+1=\frac{t^2-t+2}{2-t^2}$$

Haciendo el reemplazo y simplificando, se tiene:

$$J=\int\frac{2dt}{2t-1}=\ln|2t-1|+c$$

$$=\ln\left|\frac{2\sqrt{2x^2+x+1}-2-x}{x}\right|+c$$

Caso 2 Si $a\geq 0$, haciendo la sustitución $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t$ elevando al cuadrado, obtenemos: $ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}\,tx+t^2$ de donde $bx+c=2\sqrt{a}\,tx+t^2$ de esta ecuación se obtiene que x y x' son fracciones racionales de t. Sustituyendo $x=\varphi(t)$ y $dx=\varphi'(t)\,dt$ en la integral se obtiene:

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=\int R\left(\varphi(t),\sqrt{a}\,\varphi(t)+t\right)\varphi'(t)dt$$

Y el integrando de la integral del segundo miembro es una función racional en la variable t.

Ejemplo

Calcular $I=\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

Solución

Haciendo $y=\sqrt{x^2+x+1}=x+t$ elevando al cuadrado se obtiene $x^2+x+1=x^2+2tx+t^2$ de donde $x=\dfrac{t^2-1}{1-2t}, dx=2\left[\dfrac{-t^2+t-1}{(1-2t)^2}\right]dx,\ y=\dfrac{-t^2+t-1}{1-2t}$ por lo tanto, reemplazando estos valores en I y simplificando se tiene:

$$I=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}-x+1}\right|+c$$

Caso III Si el trinomio ax^2+bx+c tiene dos raíces reales r y s. En este caso la sustitución es: $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-r)$ elevando al cuadrado se obtiene $ax^2+bx+c=a(x-r)(x-a)=t^2(x-r)^2$ cancelando el factor $x-r$, se obtiene: $a(x-s)=t^2(x-r)$ el cual determina que x, x' e y son funciones racionales de t y por ende el nuevo integrando.

Ejemplo

Calcular $I=\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-3x+2}}$

Solución

Como $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$, reemplazamos

$y=\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{(x-2)(x-1)}=t(x-1)$

Elevando al cuaderno y simplificando el factor x – 1, queda:

$$x-2=t^2(x-1)$$

De aquí se obtiene $x=\dfrac{2-t^2}{1-t^2}, dx=\dfrac{2tdt}{(1-t^2)^2},\ y=\dfrac{t}{1-t^2}$

Luego

$$I=-2\int\frac{dt}{t^2-2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+c$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2(x-1)}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2(x-1)}}\right|+c$$

d) INTEGRALES DE LAS DIFERENCIAS BINOMIAS: $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ donde *m*, *n*, *p* son números racionales.

Condiciones de Chebichev. La integral puede expresarse por medio de una combinación finita de funciones elementales únicamente en los tres casos siguientes:

1) cuando *p* es número entero;
2) cuando $\frac{m+1}{n}$ es número entero. Aquí se emplea la sustitución $a+bx^n=z^s$, donde *s* es divisor de la fracción *p*:
3) Cuando $\frac{m+1}{n}+p$ es un número entero. En este caso se emplea la sustitución $ax^{-n}+b=z^s$.

Ejemplo

Hallar $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$

Solución

Se tienen que $m=-\frac{1}{2}$; $n=\frac{1}{4}$; $p=\frac{1}{3}$; $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2$, por lo que se tiene el segundo caso de integrabilidad conocida.

La sustitución

$1+z^{\frac{1}{4}}=s^3$ se tiene $x=(z^3-1)^4; dx=12z^2(z^3-1)^3dz$ reemplazando se tiene:

$I=\int z^{-\frac{1}{2}}(t+z^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}dz=12\int\frac{z^3(z^3-1)^3}{\left(z^3-1\right)^2}dz$

$=12\int\left(z^6-z^3\right)dz=\frac{12}{7}x^7-3x^4+c$ donde

$z=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$

Integrar por el método de fracciones parciales los siguientes:

1. $\int \frac{x+1}{(x+2)(x-1)}dx$

2. $\int \frac{2x-3}{(2x+3)(3x-1)}dx$

3. $\int \frac{(-5x+3)}{(x-\frac{1}{2})(x+\frac{3}{4})}dx$

4. $\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}dx$

5. $\int \frac{x+7}{(x-3)(x+2)^3}dx$

6. $\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}$

7. $\int \frac{x^2-6x+8}{x^2+2x+5}dx$

8. $\int \frac{x^3-3x+3}{x^2+x-2}dx$

9. $\int \frac{x^2-6x+8}{x^2+2x+5}dx$

10. $\int \frac{dx}{x^3+1}$

11. $\int \frac{dx}{x^3-1}$

12. $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x^2-4x+3)}$

13. $\int \frac{dx}{x(x^{69}+1)^3}$

14. $\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}dx$
Sugerencia: Hacer x + 2 = z

15. $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$

16. $\int \frac{4x^3+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}dx$

17. $\int \frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2}dx$

18. $\int \frac{(4x^2+2x+8)}{x(x^2+2)^2}dx$

19. $\int \frac{dx}{x^5+1}$

¿Es cierto que 1 = -1?
Observe, analice y responda si es cierto que 1 = -1
Sea $\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dx}{-x} = \int \frac{d(-x)}{(-x)}$ $\Rightarrow$ integrando ambos miembros se tiene ln(x) = ln(-x) luego aplicando antilogaritmos se tiene x = -x como x $\neq 0$ simplificando x se tiene que 1 = -1 ¿no? ¿por qué?

9.
10.

2 Integral definida

Sean m y n dos números enteros tales que $m \le n$ y f una función definida para cada $i \in \mathbb{Z}$ con $m \le i \le n$.

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + ... + f(n)$$

Ejemplo:

$$\sum_{i=2}^{5} f(i) = \sum_{i=2}^{5} i^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

Observación:

$\sum_{i=m}^{n} f(i)$ tiene $n - m + 1$ sumandos

$\sum_{i=1}^{n} f(i)$ tiene n sumandos.

Propiedades:

1) $\sum_{i=m}^{n} c = (n-m+1)c$, c = constante.

2) $\sum_{i=m}^{n} \left[f(i) \pm g(i) \right] = \sum_{i=m}^{n} f(i) \pm \sum_{i=m}^{n} g(i)$

3) $\sum_{i=m}^{n} \left[f(i) - f(i-1) \right] = f(n) - f(m-1)$ (Propiedad telescópica)

4) $\sum_{i=m}^{n} \left[f(i+1) - f(i-1) \right] = f(n+1) + f(n) - f(m) - f(m-1)$ Propiedad telescópica

EJEMPLO

Calcular el valor de $\sum_{i=5}^{400} \left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1} + 4 \right)$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \sum_{i=5}^{400} \left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1} \right) + \sum_{i=5}^{400} 4 &= \sqrt{400} - \sqrt{5-1} + (400-5+1)4 \\ &= 20 - 2 + (369)4 \\ &= 1\,602 \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN:

1) $\sum_{i=1}^{n} c = cn$

2) $\sum_{i=1}^{n}\left[f(i)\pm g(i)\right]=\sum_{i=1}^{n}f(i)\pm\sum_{i=1}^{n}g(i)$

3) $\sum_{i=1}^{n}\left[f(i)-f(i-1)\right]=f(n)-f(0)$

4) $\sum_{i=1}^{n}\left[f(i+1)-f(i-1)\right]=f(n+1)+f(n)-f(1)-f(0)$

EJERCICIOS

1) Si $a>0$, hallar una fórmula para $\sum_{i=1}^{n}a^i$

SOLUCIÓN

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a^i-a^{i-1}\right)=a^n-a^0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{aa^i-a^i}{a}=a^n-1$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(a^i-1\right)}{a}a^i=a^n-1\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}a^i=\frac{a(a^n-1)}{(a-1)}$$

2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{(4k-3)(4k+1)}$

SOLUCIÓN

$$\frac{4}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{A}{(4k-3)}+\frac{B}{(4k+1)}$$

$$4=(4k+1)A+(4k-3)B$$

$$k=3/4\Rightarrow 4=\left[4\left(\frac{3}{4}\right)+1\right]A$$

$$4=4A\ \Rightarrow A=1$$

$$k=-\frac{1}{4}\Rightarrow 4=\left[4\left(-\frac{1}{4}\right)-3\right]B$$

$$B=-1$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{(4k-3)(4k+1)}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{A}{4k-3}+\frac{B}{4k+1}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k-3}\right)$$

$$f(k)=\frac{1}{4k+1},\quad f(k-1)=\frac{1}{4k-3}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k-3}\right)=\frac{1}{4n+1}-1$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k-3}\right)=-\left(\frac{1-4n-1}{4n+1}\right)$$

$$=\frac{4n}{4n+1}$$

3) $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}$

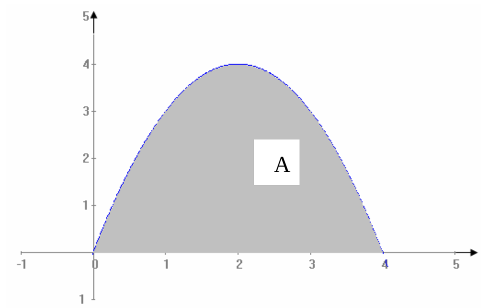
4) Determinar la fórmula para $\sum_{k=1}^{n} senkx$

5) $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2 + k}} \right)$

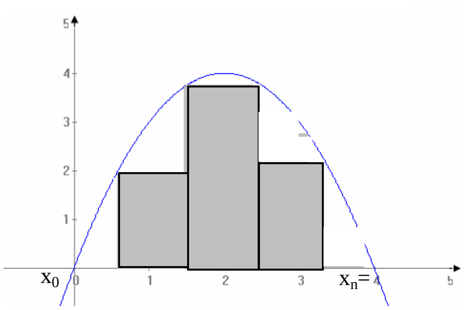
INTEGRAL DEFINIDA

TEMA: ***Calculo de áreas.***

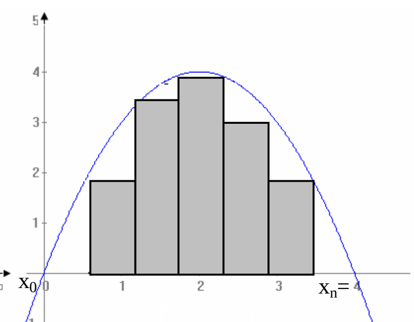
Se tiene el área A siguiente



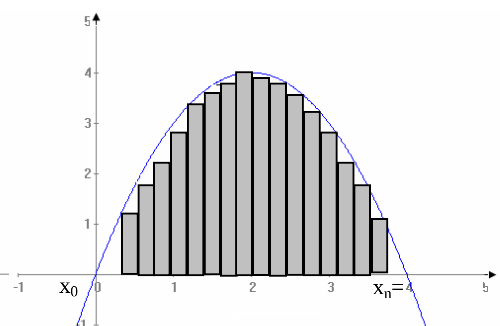
¿Cuál de las siguientes áreas cubiertas por rectángulos se aproxima al área A?



(a)



(b)



(c)

Rta:…………………………………………..

¿Qué significa esto?
Rta:…………………………………………………………………………………………………
………

Si llamamos Δx i y a la altura $f(x_i)$ para un rectángulo i, se tendrá: como área $A_1 = \Delta x_1 f(x_1)$, $A_2 = \Delta x_2 f(x_2)$, $A_3 = \Delta x_3 f(x_3)$ respectivamente para el gráfico de(a), de la misma manera para (b) y para (c), luego se obtiene lo siguiente:
La suma del área de los rectángulos de (a) estará dado por

$$A_1 + A_2 + A_3 = \Delta x_1 f(x_1) + \Delta x_2 f(x_2) + \Delta x_3 f(x_3)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \Delta x_i \, f(x_i)$$

La suma del área de los rectángulos de (b) estará dado por

$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = \Delta x_1 \, f(x_1) + \Delta x_2 \, f(x_2) + \Delta x_3 \, f(x_3) + \Delta x_4 \, f(x_4) + \Delta x_5 \, f(x_5)$

$$= \sum_{i=1}^{5} \Delta x_i \, f(x_i)$$

Análogamente para el área de la figura (c), la suma del área de rectángulos se aproxima al área bajo la curva, de lo que podemos concluir que:

A medida que Δx es más pequeño las áreas de los rectángulos tienden a aproximarse al área bajo la curva; luego podemos decir:

$$A = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \, f(x_i)$$ o equivalentemente

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \, f(x_i)$$ ……………….(*) (n = Número de intervalos)

Observación:

- Así como hemos considerado áreas dentro de la curva (suma inferior), también se pueden considerar áreas que estén por encima de la misma (suma superior).
- A la expresión (*) se le conoce como *suma de Rieemann* si el límite existe.
- $$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \, f(x_i) = \int_a^b f(x)\, dx$$ (en nuestro ejemplo $x_0 = a$ y $x_n = b$)
- Es posible calcular áreas mediante integrales; pero primero trataremos la integral definida para poder aplicarlo posteriormente en el cálculo de áreas.

A continuación estudiaremos la integral definida de una función f, donde está permitido el considerar que f pueda ser negativa en parte o en todo el intervalo $[a,b]$. Esta integral nos ayudará a simplificar los cálculos laboriosos al hallar áreas.

Definición:

La integral definida de f, desde x = a hasta x = b, se escribe: $\int_a^b f(x)\,dx$, y se define como:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i\, f(x_i)}$$

Donde: f es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y x_i es un punto cualesquiera del intervalo $[a,b]$

Límite superior

Límite inferior

$$\int_a^b \overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{integrando}}\ dx}^{\text{elemento de integracion}}$$

Propiedades de la integral definida.

1. Si f es integrable en I, entonces es integrable en cualquier subintervalo de I.
2. Si f es continua y f(x) ≥ 0 en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ puede interpretarse como el área de la región limitada por la curva y = f(x), el eje y las líneas x = a y x = b.
3. Para $\int_a^b f(x)\,dx$, hemos supuesto que a < b. Ahora definimos los casos en que a > b o a = b

   Si a > b, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ = - $\int_b^a f(x)\,dx$

   Si a = b, tenemos $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
4. $\int_b^a k\ f(x)\,dx = \text{k}\int_b^a f(x)\,dx$
5. $\int_b^a \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int_b^a f(x)\,dx \pm \int_b^a g(x)\,dx$
6. Si f es continua sobre un intervalo I y a, b y c están en I, entonces:

   $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$
7. Si f es integrable en un intervalo I y f(x) ≥ 0, $\forall x \in I$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
8. Si *f* y *g* son funciones integrables en *I* y $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in I$, entonces

   $$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_b^a g(x)\,dx$$
9. Si f es integrable en *I* y que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in I$, entonces

   $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$
10. Si f es integrable en *I*, entonces $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_b^a \left|f(x)\right| dx$

TEOREMA DE VALOR INTERMEDIO PARA INTEGRALES

Si f es una función continua en $I = [a,b]$, entonces, existe un número $c \in I$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁULCULO INTEGRAL

Teorema: (Primer teorema del cálculo integral)

Si f es una función continua en el intervalo $I = [a,b]$ y $\mathcal{F}$ es la función definida por $\mathcal{F}(x) = \int_a^x f(t)dt,\ x \in I$, se tiene $\mathcal{F}'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x), \forall x \in I$

Observación: Este teorema establece un enlace entre los conceptos de integral definida e indefinida. Ello prueba que una función continua en I admite una primitiva dada por la integral $\mathcal{F}(x) = \int_a^x f(t)dt$, pues $\mathcal{F}'(x) = f(x), \forall x \in I$. Este es un teorema de existencia porque para f continua en I existe $\mathcal{F}(x) = \int_a^x f(t)dt$ tal que $\mathcal{F}'(x) = f(x), \forall x \in I$. Como $\mathcal{F}'(a) = 0$, $\mathcal{F}$ es la antiderivada de f en I tal que $\mathcal{F}'(a) = 0$, $\mathcal{F}$ es la antiderivada de f en I tal que $\mathcal{F}'(a) = 0$, es decir pasa por el punto $(a,0)$.

Teorema: (Segundo teorema fundamental del cálculo integral)

Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y F es cualquier antiderivada de f en el intervalo esto es F'(x) = f(x) $\forall x \in I$, entonces se tiene

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Investigue: INTEGRALES IMPROPIAS

I. Calcular las siguientes integrales definidas.

1. $\int_0^2 (x+\sqrt{x}^5 - \frac{3}{x^4} + \ln 3)\,dx$
2. $\int_0^2 \frac{dx}{3+5x}$
3. $\int_0^1 e^x dx$
4. $\int_2^4 \frac{2dx}{x^2+x-1}$
5. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x-1}$
6. $\int_1^4 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$
7. $\int_1^3 \frac{4dx}{(x-2)(x+5)^2}$
8. $\int_2^4 \frac{xdx}{(x+1)^2}$
9. $\int_1^3 \frac{(x+1)dx}{(x-2)(x^2+x+1)}$
10. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{14} dx$

II. Hallar las intersecciones de los siguientes:y = x +2 y y = 3x – 4

1. $y = x^2$ y $y = 2x - 1$
2. y = $\sqrt{2x}$ y y = 4x
3. y = x y $y = (3x - 1)^3$
4. $y = x^3$ y y = 3
5. $y = 3x^3$ y y = 2x +1
6. y = -2x + 1 y y = (x + 2

III. Hallar el área de las regiones siguientes:

1. Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función $y = x^2$ por el eje x y las rectas verticales x = 1, x = 4.
2. Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función $y = -x^3$, por el eje x y las rectas verticales x = -2, x = 0
3. Hallar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = -x^3 + 1$, por el eje x y las rectas verticales x = 1, x = 4.

CALCULAR EL VALOR DE LAS SIGUIENTES INTEGRALES

1. $\int_{1}^{e} \ln x dx$

Solución:

$u = \ln x \qquad \int dv = \int dx$

$du = \frac{dx}{x} \qquad v = x$

Reemplazando

$$x \ln x \Big/_{1}^{e} - \int \frac{dx}{x} x = x \ln x \Big/_{1}^{e} - x \Big/_{1}^{e}$$

$= e \ln e - \ln 1 - e + 1$

$= e - e + 1 = 1$

2. $\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+|x|}$

Solución:

analizamos el valor absoluto $|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{x}{1-x} dx + \int_{0}^{1} \frac{x}{1+x} dx \Rightarrow \int_{0}^{1} \frac{x}{x+1} dx + \int_{-1}^{0} \frac{x}{x-1} dx$$

$\boxed{\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}} \qquad \boxed{\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}}$

$$= \int_{0}^{1} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx - \int_{-1}^{0} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) dx$$

$$= \int_{0}^{1} dx - \int_{0}^{1} \frac{dx}{x+1} - \int_{-1}^{0} dx - \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x-1}$$

$$= x \Big/_{0}^{1} - \ln|x+1| \Big/_{0}^{1} - x \Big/_{-1}^{0} - \ln|x-1| \Big/_{-1}^{0}$$

$=$ (1-0)-(ln2-ln1)-(0+1)-(ln1-ln2)

$=$ 1- ln2-1 + ln2 = 0

3. $\int_{0}^{\pi} |\cos x| dx$

Solución:

$$= \int_0^{\pi/2} \cos x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx$$

$$= senx \Big/_0^{\pi/2} - senx \Big/_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= sen\,\pi/2 - sen0 - sen\pi + sen\,\pi/2$$

= 1-0-0+1 = 2

4. $\displaystyle\int_3^5 \left|\frac{5x-20}{(2-x)(x^2+1)}\right| dx$

Solución:

$$= 5\int_3^5 \left|\frac{x-4}{(2-x)}\right| \cdot \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$\left|\frac{x-4}{2-x}\right| = \begin{cases} \dfrac{x-4}{2-x};\ \dfrac{x-4}{2-x} \geq 0;\ \dfrac{x-4}{x-2} \leq 0;\ x \in \langle 2,4] = A \\ \dfrac{x-4}{x-2};\ \dfrac{x-4}{2-x} < 0;\ \dfrac{x-4}{x-2} > 0;\ x \in \langle -\infty, 2\rangle U \langle 4, \infty\rangle = B \end{cases}$$

el conjunto solución lo interceptamos con el dominio de la integral

$A = \langle 2,4] \wedge [3,5] = [3,4]$

$B = \langle -\infty, 2\rangle U\langle 4,\infty\rangle \cap [3,5] = \langle 4,5]$

$$= 5\int_3^4 \frac{x-4}{(2-x)(x^2+1)} dx + 5\int_4^5 \frac{x-4}{(x-2)(x^2+1)} dx$$

$$= 5\int_4^5 \frac{x-4}{(x-2)(x^2+1)} dx - 5\int_3^4 \frac{x-4}{(x-2)(x^2+1)} dx$$

Integrando como indefinido (fracciones parciales).

$$\frac{x-4}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$x - 4 = Ax^2 + A + Bx^2 + cx - 2Bx - 2C$

A+B = 0 A = -B

C-2B =1 C = 1+2B

A –2C = -4 -5B = -1

A= -2/5

B = 2/5

C = 9/5

$$= 5\frac{2}{5}\int_4^5 \frac{dx}{x-2} + 5\frac{1}{5}\int_4^5 \frac{2x+1}{x^2+1} dx + 5\frac{2}{5}\int_3^4 \frac{dx}{x-2} - 5\frac{1}{5}\int_4^5 \frac{2x+9}{x^2+1}$$

$$= -2\ln|x-2| \Big/_4^5 + \int_4^5 \frac{2x}{x^2+1} dx + 9\int_4^5 \frac{dx}{x^2+1} + 2\ln|x-2| \Big/_5^4 - \int_3^4 \frac{2x}{x^2+1} dx - 9\int_3^4 \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= -2\ln|x-2| \Big/_{4}^{5} + \ln|x^2+1| \Big/_{4}^{5} + 9artgx \Big/_{4}^{5} + 2\ln|x-2| \Big/_{3}^{4} - \ln|x^2+1| - 9artgx \Big/_{3}^{4}$$

$$= -2(\ln 3 - \ln 2) + (\ln 26 - \ln 17) + 9(arctg 5 - arctg 4) + 2(\ln 2 - \ln 1) -$$
$$- (\ln 17 - \ln 10) - 9(arctg 4 - arctg 3)$$

$$= -2\ln 3 + 2\ln 2 + \ln 26 - \ln 17 + 9arctg 5 - 9arctg 5 - 9arctg 4 + 2\ln 2 - 0 -$$
$$- \ln 17 + \ln 10 - 9arctg 4 + 9arctg 3$$

$$= -2\ln(2/3) + \ln(26/17) + 9arctg 5 - 18arctg 4 + 9arctg 3 + 2\ln 2 + \ln(10/17)$$
$$= 2\ln(4/3) + \ln(260/289) + 9arctg 5 - 18arctg 4 + 9arctg 3$$

5. $\int_{-1}^{3} \|x\| dx$

Solución:

Por definición de mayor entero

$\|x\| = n \Leftrightarrow n \le x < n+1$

$n = -1 \quad -1 \le x < 0$
$n = 0 \quad 0 \le x < 1$
$n = 1 \quad 1 \le x < 2$
$n = 2 \quad 2 \le x < 3$

$$= -\int_{-1}^{0} dx + 0\int_{0}^{1} dx + \int_{1}^{2} dx + 2\int_{2}^{3} dx$$
$$= -x \Big/_{-1}^{0} + x \Big/_{1}^{2} + 2x \Big/_{2}^{3}$$

= (0-1)+(2-1)+(6-4) =2

6. $\int_{-1}^{3} \left\| x + \frac{1}{2} \right\| dx$

Solución:

u = x+1/2 x = -1 u = -1/2
du = dx x = 3 u = 7/2; La nueva Integral es:

$= \int_{-1/2}^{7/2} \|u\| du$; por definición de mayor entero

$\|u\| = n \Leftrightarrow n \le u < n+1$

$n = -1 \quad -1 \le u < 0$
$n = 0 \quad 0 \le u < 1$
$n = 1 \quad 1 \le u < 2$
$n = 2 \quad 2 \le u < 3$
$n = 3 \quad 3 \le u < 7/2$

$$= -\int_{-1/2}^{0} dx + 0\int_{0}^{1} dx + \int_{1}^{2} dx + 2\int_{2}^{3} dx + 3\int_{3}^{7/2} dx$$
$$= -x \Big/_{-1/2}^{0} + x \Big/_{1}^{2} + 2x \Big/_{2}^{3} + 3x \Big/_{3}^{7/2}$$

$= 0 - ½ + 2 – 1 + 6 – 4 + 21/2 –9$
$= 4$

7. $\int_{-1}^{2} \|2x\| dx$

Solución:

Definición de mayor entero

$$\|2x\| = n \Leftrightarrow n \le 2x < n+1$$
$$\frac{n}{2} \le x < \frac{n+1}{2}$$

$n = -2 \quad -1 \le x < -1/2$
$n = -1 \quad -1/2 \le x < 0$
$n = 0 \quad 0 \le x < 1/2$
$n = 1 \quad 1/2 \le x < 1$
$n = 2 \quad 1 \le x < 3/2$
$n = 3 \quad 3/2 \le x < 2$

$$= -2\int_{-1}^{-1/2} dx - \int_{-1/2}^{0} dx + 0\int_{0}^{1/2} dx + \int_{1/2}^{1} dx + 2\int_{1}^{3/2} dx + 3\int_{3/2}^{2} dx$$

$$= -2x \Big/_{-1}^{-1/2} - x \Big/_{-1/2}^{0} + x \Big/_{1/2}^{1} + 2x \Big/_{1}^{3/2} + 3x \Big/_{3/2}^{2}$$

$=(1-2)-(0+1/2)+(1-1/2)+(3-2)+(6-9/2) = 3/2$

8. $\int_{-1}^{2} \|-x\| dx$

Solución:
Por mayor entero

$$\|-x\| = n \Leftrightarrow n \le -x < n+1$$
$$-(n+1) \le x < -n$$

$n = 0 \quad -1 \le x < 0$
$n = -1 \quad 0 \le x < 1$
$n = -2 \quad 1 \le x < 2$

$$= 0\int_{-1}^{0} dx - \int_{0}^{1} dx - 2\int_{1}^{2} dx$$

$$= -x \Big/_{0}^{1} - 2x \Big/_{1}^{2}$$

$-(1-0)-(4-2) = -3$

9. $\int_{0}^{2} \|T^2\| dt$

Solución:

Por mayor entero

$$\|t^2\| = n \Leftrightarrow n \le t^2 < n+1$$

$$\sqrt{n} \le t < \sqrt{n+1}$$

$$\begin{array}{ll}
n = 0 & 0 \le t < 1 \\
n = 1 & 1 \le t < \sqrt{2} \\
n = 2 & \sqrt{2} \le t < \sqrt{3} \\
n = 3 & \sqrt{3} \le t < 2
\end{array}$$

$$= 0\int_0^1 dt + \int_1^{\sqrt{2}} dt + 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx + 2\int_{\sqrt{3}}^{2} dx$$

$$= t \Big/_{1}^{\sqrt{2}} + 2t \Big/_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} + 3t \Big/_{\sqrt{3}}^{2}$$

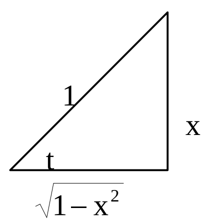
$$= \sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 6 - 3\sqrt{3} \;=\; 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

10. $\displaystyle\int_0^1 x^4(1-x^2)^{3/2}dx$

Solución

x = sent

dx = cost.dt



T = arcsenx

$$= \int sen^4 t.\cos^3 t.\cos t.dt$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 . \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(1-\cos^2 2t\right)^2$$

$$= \frac{1}{16}\int dt - \frac{1}{8}\int \cos^2 2tdt + \frac{1}{16}\int \cos^4 2tdt$$

$$= \frac{t}{16} - \frac{1}{8}\int\left[\frac{1+\cos 4t}{2}\right]dt + \frac{1}{16}\int\left[\frac{1+\cos 4t}{2}\right]^2$$

$$= \frac{t}{16} - \frac{1}{16}\int dt - \frac{1}{16}\int \cos 4tdt + \frac{1}{16}\int\left[\frac{(1+2\cos 4t + \cos^2 4t)}{4}\right]dt$$

$$= \frac{t}{16} - \frac{t}{16} - \frac{2sen4t}{64.2} + \frac{1}{64}\int \cos^2 4tdt$$

$$= -\frac{2sen4t}{128} + \frac{2t}{128} + \frac{sen4t}{128} + \frac{1}{64}\int \frac{1+\cos 8t}{2}$$

$$= -\frac{sen4t}{128} + \frac{2t}{128} + \frac{t}{128} + \frac{sen8t}{1024}$$

$$= \frac{3t}{128} - \frac{sen4t}{128} + \frac{sen8t}{1024}$$

$$= \frac{3t}{128} - \frac{2sen2t.\cos 2t}{128} + \frac{2sen4t.\cos 4t}{1024}$$

$$= \frac{3t}{128} - \frac{4sent\cos t(\cos^2 t - sen^2 t)}{128} + \frac{8sent\cos t(\cos^2 t - sen^2 t)(\left[\cos^2 t - sen^2 t\right]^2 - 4sen^2 t.\cos^2 t)}{1024}$$

$$= \frac{3arcsenx}{128} - \frac{(x\sqrt{1-x^2})(1-x^2-x^2)}{32} + \frac{(x\sqrt{1-x^2})(1-x^2-x^2)\left[(1-x^2-x^2)^2 - 4x^2(1-x^2)\right]}{128}$$

$$= \frac{3arcsenx}{128}\Big/_0^1 - \frac{(x\sqrt{1-x^2})(1-2x^2)}{32}\Big/_0^1 + \frac{(x\sqrt{1-x^2})(1-2x^2)\left[(1-8x^2+8x^4)\right]}{128}\Big/_0^1$$

$$= \frac{3arcsen1}{128} - \frac{3arcsen0}{128} \longleftarrow \quad arcsen1 = \pi/2 \qquad arcsen = 0$$

$$= \frac{3\pi}{2-128} - \frac{3(0)}{128} = \frac{3\pi}{256}$$

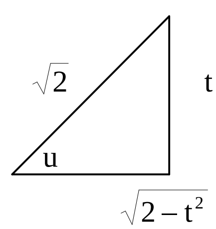
11. $\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{2-x}dx$

Solución

Hacemos $x = t^2$

$dx = 2tdt$

la integral queda $2\int_0^1 t^2\sqrt{2-t^2}dt$



hacemos $t = \sqrt{2}senu$

$dt = \sqrt{2}\cos udu$

$u = arcsen\frac{t}{\sqrt{2}}$

como indefinida:

$$= 2\int 2sen^2u\sqrt{2-2sen^2u}\sqrt{2}\cos udu$$

$$= 8\int sen^2u.\cos^2 udu$$

$$= 8\int\left(\frac{1-\cos 2u}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2u}{2}\right)du$$

$$= 2\int(1-\cos 2u)du = 2\int du - 2\int\cos^2 2udu = 2u - 2\int\left(\frac{1+\cos 4u}{2}\right)du$$

$$= 2u - \int du - \int\cos 4udu = 2u - u - \frac{sen4u}{4} = u - \frac{sen4u}{4} = u - \frac{4senu\cos u(\cos^2 u - sen^2u)}{4}$$

a su estado original

$$= arcsen\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - \frac{t\sqrt{2-t^2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\left[\frac{2-t^2}{2} - \frac{t^2}{2}\right] = arcsen\left[\frac{t}{\sqrt{2}}\right] - \frac{(t\sqrt{2-t^2})(1-t^2)}{2}$$

lo llevamos a la variable x

$$= arcsen\sqrt{\frac{x}{2}} - \frac{(\sqrt{x}\sqrt{2-x})(1-x)}{2}$$

evaluamos

$$= arcsen\sqrt{\frac{x}{2}}\Big/_0^1 - \frac{(\sqrt{x}\sqrt{2-x})(1-x)}{2}\Big/_0^1$$

$$= arcsen\frac{1}{\sqrt{2}} - arcsen0 \qquad \text{sabemos:} \quad arcsen0 = 0 \quad arcsen\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

12. $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}}dx$

Solución

Por cambio de variable

$$t^2=\frac{1-x}{2-x}=1-\frac{1}{2-x}$$

$$\frac{2tdt}{(1-t^2)^2}=dt$$

$$=2\int\frac{t2}{(1-t^2)^2}dt \quad ; \qquad \text{La Nueva Integral es:}$$

u = t

du = dt

$$dv=\frac{t}{(1-t^2)^2}dt$$

$$=2\left[\frac{t}{2(1-t^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(1-t^2)}\right] \longleftarrow \qquad v=\frac{t}{2(1-t^2)}$$

$$=\frac{t}{(1-t^2)}+\int\frac{dt}{t^2-1} \longrightarrow \qquad \int\frac{dt}{t^2-1^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$

$$=\frac{t}{1-t^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$

la regresamos a su estado original

$$=\frac{\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}}{1-\frac{1-x}{2-x}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}+1}\right|$$

$$=\frac{\sqrt{1-x}(2-x)}{\sqrt{2-x}}\Big/_0^1+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x}}\right|\Big/_0^1$$

$$=0-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\left[\ln(1)-\ln\left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right|\right]$$

$$=-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right|$$

13. $\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$

Solución

Por cambio de variable:

$u = e^x$ $\quad\quad\quad$ $\int dv = \int \frac{x}{(1+x)^2}$

$du = e^x dx$ $\quad\quad\quad$ $\frac{x}{(1+x)^2} = \frac{A}{(1+x)^2} + \frac{B}{1+x}$

$x = A + Bx + B$

A = -1

B = 1

$-\int \frac{dx}{(1+x)^2} + \int \frac{dx}{1+x}$

$v = \frac{1}{1+x} + \ln|x+1|$; La integral es:

$$= e^x \ln|x+1| + \frac{e^x}{1+x} - \int e^x \ln|x+1| dx - \int \frac{e^x}{1+x} dx$$

$u = \ln|x+1|$ $\quad\quad\quad$ $\int dv = \int e^x dx$

$du = \frac{dx}{x+1}$ $\quad\quad\quad$ $V = e^x$

$$= e^x \ln|x+1| + \frac{e^x}{1+x} - e^x \ln|x+1| + \int \frac{e^x}{x+1} dx - \int \frac{e^x}{1+x} dx$$

$$= \frac{e^x}{1+x} \Big/_0^1 = \frac{e}{2} - 1$$

14. $\int_{-2}^{4} \left| \frac{x+1}{x+6} \right| dx$

Solución

Analizando el valor absoluto

$$\left| \frac{x+1}{x+6} \right| \begin{cases} \frac{x+1}{x+6}; \frac{x+1}{x+6} \geq 0; \langle -\infty, -6 \rangle \cup [-1, \infty] \cap [-2, 4] = [-1, 4] \\ -\frac{x+1}{x+6}; \frac{x+1}{x+6} < 0; \langle -6, -1 \rangle \cap [-2, 4] = [-2, -1 \rangle \end{cases}$$

$$= -\int_{-2}^{-1} \left(\frac{x+1}{x+6} \right) dx + \int_{-1}^{4} \left(\frac{x+1}{x+6} \right) dx \quad \text{sabemos que} \quad \frac{x+1}{x+6} = 1 - \frac{5}{x+6}$$

$$= \int_{-1}^{4} dx - 5 \int_{-1}^{4} \frac{dx}{x+6} - \int_{-2}^{-1} dx + 5 \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x+6}$$

$$= x \Big/_{-1}^{4} - 5 \ln|x+6| \Big/_{-1}^{4} - x \Big/_{-2}^{-1} + 5 \ln|x+6| \Big/_{-2}^{-1}$$

= (4+1)-5(ln10-ln5)-(-1+2)+5(ln5-ln4) = 5-5ln2-1+5ln5/4

= 4 + 5ln5/8

15. $\int_{-1}^{2} (\|-2x\| + 4) dx$

Solución:

$$= \int_{-1}^{2} \|-2x\| dx + 4\int_{-1}^{2} dx$$

redefiniendo el máximo entero

$$\|-2x\| = n \Rightarrow n \le -2x < n+1$$

$$-\frac{(n+1)}{2} \le x < -\frac{n}{2}$$

$n = 1 \Rightarrow -1 < x \le -1/2$

$n = 0 \Rightarrow -1/2 < x \le 0$

$n = -1 \Rightarrow 0 < x \le 1/2$

$n = -2 \Rightarrow 1/2 < x \le 1$

$n = -3 \Rightarrow 1 < x \le 3/2$

$n = -4 \Rightarrow 3/2 < x \le 2$

la integral queda igual a:

$$= \int_{-1}^{-1/2} dx - 0\int_{-1/2}^{0} dx - \int_{0}^{1/2} dx - 2\int_{1/2}^{1} dx - 3\int_{1}^{3/2} dx - 4\int_{3/2}^{2} dx + 4\int_{-1}^{2} dx$$

$$= x \Big/_{-1}^{-1/2} - x \Big/_{0}^{1/2} - 2x \Big/_{1/2}^{1} - 3x \Big/_{1}^{3/2} - 4x \Big/_{3/2}^{2} + 4x \Big/_{1}^{2}$$

=(-1/2 +1)-(1/2-0)-(2-1)-(9/2-3)-(8-6)+(8+4) = 15/2

16. $\int_{0}^{4} \|2x-3\| dx$

Solución:

Por cambio de variable

u = 2x-3 x = 0 u = -3

du = 2dx x = 4 u = 5

redefiniendo el valor absoluto

$$\|u\| \begin{cases} \|u\|; \|u\| \ge 0 \Rightarrow u \ge 0 \\ \\ -\|u\|; \|u\| < 0 \Rightarrow u < 0 \end{cases}$$

obtenemos

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{5} \|u\| du - \frac{1}{2}\int_{-3}^{0} \|u\| du$$

Redefinimos máximo entero

$$\|u\| = n \Rightarrow n \le u < n+1$$

$n = -3 \Rightarrow -3 < u \le -2$

$n = -2 \Rightarrow -2 < u \le -1$

$n = -1 \Rightarrow -1 < u \le 0$

$n = 0 \Rightarrow 0 < u \le 1$

$n = 1 \Rightarrow 1 < u \le 2$

$n = 2 \Rightarrow 2 < u \le 3$

$n = 3 \Rightarrow 3 < u \le 4$

$n = 4 \Rightarrow 4 < u \le 5$

$$= \frac{1}{2}\left[0\int_{0}^{1} dx + 1\int_{1}^{2} dx + 2\int_{2}^{3} dx + 3\int_{3}^{4} dx + 4\int_{4}^{5} dx + 3\int_{-3}^{-2} dx + 2\int_{-2}^{-1} dx + \int_{1}^{0} dx \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\Big/_{1}^{2} + 2x\Big/_{2}^{3} + 3x\Big/_{3}^{4} + 4x\Big/_{4}^{5} + 3x\Big/_{-3}^{-2} + 2x\Big/_{-2}^{-1} + x\Big/_{1}^{0} \right]$$

$$=\frac{1}{2}[2-1+6-4+12-9+20-16-6+9-2+4+0+1] \ = \ 8$$

17. $\int_{1}^{4} \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\,dy$

Solución

$$=\int_{1}^{4} \frac{1}{y^2}\,dy+\int_{1}^{4} \frac{\sqrt{y}}{y^2}\,dx$$

$$=-\frac{1}{y}\Big/_{1}^{4}-\frac{2}{\sqrt{y}}\Big/_{1}^{4}=(-1/4+1)-(1-2) \qquad = \ 7/4$$

18. $\int_{-2}^{2}\left(\left|1-x^2\right|+\left\|5-x^2\right\|\right)dx$

Solución:

$$\int_{-2}^{2}(\left|1-x^2\right|+\left\|5-x^2\right\|)dx=\underbrace{\int_{-2}^{2}\left|1-x^2\right|dx}_{A} \quad +\underbrace{\int_{-2}^{2}\left\|5-x^2\right\|dx}_{B}$$

En A:

$$\left|1-x^2\right|\begin{cases}1-x^2;(1-x)(x+1)\geq 0=(x-1(x+1)\leq 0=[-1,1]\cap[-2,2]\Rightarrow[-1,1]\\ x^{2-1};(1-x)(x+1)<0=(x-1)(x+1)>0=\langle-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,\infty\rangle\cap[-2,2]\Rightarrow[-2,-1)\cup(1,2]\end{cases}$$

$$\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx-\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx+\int_{1}^{2}(x^2-1)dx \ =$$

$$=\int_{-2}^{-1}x^2dx-\int_{-2}^{-1}dx-\int_{-1}^{1}x^2dx+\int_{-1}^{1}dx+\int_{1}^{2}x^2dx-\int_{1}^{2}dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{-1}-x\Big|_{-2}^{-1}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}+x\Big|_{-1}^{1}+\frac{x^3}{3}\Big|_{1}^{2}-x\Big|_{1}^{2}$$

$$= -\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{3}\right)-(-1+2)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+(1+1)+\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)-(2-1)$$

$$=\frac{7}{3}-1-\frac{2}{3}+2+\frac{7}{3}-1 \ = \ \frac{14}{3}-\frac{2}{3}=\frac{12}{3}=4$$

En B: $\int_{-2}^{2}\left\|5-x^2\right\|dx=5\int_{-2}^{2}dx+\underbrace{\int_{-2}^{2}\left\|-x^2dx\right\|}_{v}$

Analizamos v si es par:

f (x) $= \left\|-x^2\right\|$

f (-x) = $\left\|-x^2\right\|$

$\Rightarrow v=2\int_{0}^{2}\left\|-x^2\right\|dx$

Analizamos el máximo entero: $\|-x^2\| = n \;\; ; \;\; n \le -x^2 < n+1$

$$-(n+1) < x^2 \le -n$$

$$\sqrt{-(n+1)} < x \le \sqrt{-n}$$

$n = -1 \quad 0 < x \le 1$

$n = -2 \quad 1 < x \le \sqrt{2}$

$n = -3 \quad \sqrt{2} < x \le \sqrt{3}$

$n = -4 \quad \sqrt{3} < x \le 2$

$$\Rightarrow B = 5\int_{-2}^{2} dx - 2\int_{0}^{2} dx - 4\int_{1}^{\sqrt{2}} dx - 6\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx - 8\int_{\sqrt{3}}^{2} dx$$

$$B = 5x\Big|_{-2}^{2} - 2x\Big|_{0}^{1} - 4x\Big|_{1}^{\sqrt{2}} - 6x\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} - 8x\Big|_{\sqrt{3}}^{2}$$

$$B = 10 + 10 - 2 + 0 - 4\sqrt{2} + 4 - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{2} - 16 + 8\sqrt{3}$$

$$B = 20 - 2 - 4\sqrt{2} + 4 - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{2} - 16 + 8\sqrt{3}$$

$$B = 6 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$$

$$B = 6 + 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow I = A + B$$

$$I = 10 + 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$$

19. $\displaystyle\int_{-3/2}^{5/2} \left| x - \|x\| \right| dx$

Solución:

redefinimos máximo $\|x\| = n \quad n \le x < n+1$

n =-2 $\quad -\frac{3}{2} \le x < -1$

n =-1 $\quad -1 \le x < -0$

n = 0 $\quad 0 \le x < 1$

n = 1 $\quad 1 \le x < 2$

n = 2 $\quad 2 \le x < \frac{5}{2}$; Reemplazo en la integral

$$= \int_{-3/2}^{-1} |x+2| dx + \int_{-1}^{0} |x+1| dx + \int_{0}^{1} |x| dx + \int_{1}^{2} |x-1| dx + \int_{2}^{5/2} |x-2| dx$$

$$= \int_{-3/2}^{-1} (x+2) dx + \int_{-1}^{0} (x+1) dx + \int_{0}^{1} (x) dx + \int_{1}^{2} (x-1) dx + \int_{2}^{5/2} (x-2) dx$$

$$=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-3/2}^{-1}+\left.2x\right|_{-3/2}^{-1}+\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{0}+\left.x\right|_{-1}^{0}+\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{1}+\left.\frac{x^2}{2}\right|_{1}^{2}-\left.x\right|_{1}^{2}+\left.\frac{x^2}{2}\right|_{2}^{5/2}+\left.2x\right|_{2}^{5/2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{9}{8}\right)+(-2+3)+\left(0-\frac{1}{2}\right)+(0+1)+\left(\frac{1}{2}-0\right)+\left(2-\frac{1}{2}\right)-(2-1)+\left(\frac{25}{8}-2\right)-(5-4)$$

$$-\frac{5}{8}+1-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-1+\frac{9}{8}-1$$

$$\frac{9}{8}-\frac{5}{8}+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$$

20. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\left|\frac{x^2-4}{x^2-25}\right|dx$

Solución

Redefinimos valor absoluto:

$$\left|\frac{x^2-4}{x^2-25}\right|\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2-25};\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-5)(x+5)}\geq 0=\langle-\infty,-5\rangle\cup[-2,2]\cup\langle 5,\infty\rangle\cap[-3,3]\\ [-2,2]\ \}+\\ -\dfrac{x^2-4}{x^2-25};\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-5)(x+5)}<0=\langle-5,-2\rangle\cup\langle 2,5\rangle\cap[-3,3]\\ [-3,-2)\cup(2,3]\ \}-\end{cases}$$

$$I=-\int_{-3}^{-2}\frac{x^2-4}{x^2-25}dx+\int_{-2}^{2}\frac{x^2-4}{x^2-25}dx-\int_{2}^{3}\frac{x^2-4}{x^2-25}\ \text{sabemos que}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2-4}{x^2-25}=1+\frac{21}{x^2-25}\qquad\text{; haciendo}$$

$$A=\int dx+21\int\frac{dx}{x^2-25}$$

$$=x+\frac{21}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|\quad;\qquad\text{Ahora en I}$$

$$I=-\left.x\right|_{-3}^{-2}-\left.\frac{21}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|\right|_{-3}^{-2}+\left.x\right|_{-2}^{2}+\left.\frac{21}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|\right|_{-2}^{2}-\left.x\right|_{2}^{3}-\left.\frac{21}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|\right|_{2}^{3}$$

$$=(2-3)-\frac{21}{10}\left(\ln\left|\frac{-7}{3}\right|-\ln\left|\frac{-8}{2}\right|\right)+(2+2)+\frac{21}{10}\left(\ln\left|\frac{-3}{7}\right|-\ln\left|\frac{-7}{3}\right|\right)-(3-2)-\frac{21}{10}\left(\ln\left|\frac{-2}{8}\right|-\ln\left|\frac{-3}{7}\right|\right)$$

$$=-1-\frac{21}{10}\ln\left|\frac{7}{12}\right|+4+\frac{21}{10}\ln\left|\frac{9}{49}\right|-1-\frac{21}{10}\ln\left|\frac{7}{12}\right|$$

$$= 2 + \frac{21}{10}\ln\left|\frac{9}{49}\right| - \frac{21}{10}\ln\left|\frac{49}{144}\right|$$

$$= 2 + \frac{21}{10}\ln\left|\frac{(9).144}{(49).49}\right|$$

21. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x^2-4}{|x^2-16|}dx$

Solución:

analizando el valor absoluto

$$|x^2-16| = \begin{cases} x^2-16; (x-4)(x+4) > 0; \langle -\infty,-4\rangle \cup \langle 4,\infty\rangle \cap [-3,3]\phi \\ \\ -(x^2-16); (x-4)(x+4) < 0; \langle -4,4\rangle \cap [-3,3] = [-3,3\ \ ] \end{cases}$$

$$-\int_{-3}^{3} \frac{x^2-4}{x^2-16}dx$$

sabemos que: $\dfrac{x^2-4}{x^2-16} = 1 + \dfrac{12}{x^2-16}$

entonces tenemos:

$= -\displaystyle\int_{-3}^{3} dx - 12\int_{-3}^{3}\frac{dx}{x^2-16}$ sabemos que: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-16} = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|$

$$= -x\Big/_{-3}^{3} - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|\Big/_{-3}^{3}$$

$$= (-3-3) - \frac{3}{2}\left(\ln\frac{1}{7} - \ln 7\right)$$

$$= -6 - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{1}{49}\right)$$

22. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{e^{senx}.dx}{e^{\cos x} + e^{senx}}$

Solución

Sea $Z = \dfrac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -dz$

Para $x = 0$; $Z = \pi/2$

$x = \pi/2$; $Z = 0$

Reemplazando se tiene:

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{e^{senx}.dx}{e^{\cos x} + e^{senx}} = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{e^{sen(\frac{\pi}{2}-z)}dz}{e^{sen(\pi/2-z)} + e^{\cos(\pi/2-z)}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{e^{\cos z}.dz}{e^{senz} + e^{\cos z}} = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{\cos x}.dx}{e^{senx} + e^{\cos x}} \quad ; \qquad (Z = x)$$

Luego $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\cos x}.dx}{e^{senx} + e^{\cos x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{\cos x}.dx}{e^{senx} + e^{\cos x}}$ sumamos

A ambos miembros de la ecuación la integral

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{e^{senx}.dx}{e^{senx} + e^{\cos x}} \Rightarrow decir$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{e^{senx}.dx}{e^{senx} + e^{\cos x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{senx}.dx}{e^{senx} + e^{\cos x}} + \int_0^{\pi/2} \frac{e^{\cos x}.dx}{e^{senx} + e^{\cos x}}$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{e^{senx}.dx}{e^{senx} + e^{\cos x}} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{e^{senx} + e^{\cos x}}{e^{senx} + e^{\cos x}}dx = \int_0^{\pi} dx$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \frac{e^{senx}dx}{e^{senx} + e^{\cos x}} = \frac{\pi}{2}$$

23. $\int_{-3}^{4} |2x-4|$ dx

Solución

$$|2x-4| = \begin{cases} + \; ; & 2x - 4 \geq 0 \quad ó \quad x \geq 2 \\ - \; ; & 2x - 4 < 0 \quad ó \quad x < 2 \end{cases}$$

$$I = -\int_{-4}^{2} (2x-4)dx + \int_{2}^{4} (2x-4)dx$$

$$I = -2\int_{-3}^{2} xdx + 4\int_{-3}^{2} dx + 2\int_{2}^{4} xdx - 4\int_{2}^{4} dx$$

$$I = \left[-x^2 + 4x\mathrm{I}_{-3}^{2}\right] + x^{2-4x}\mathrm{I}_{2}^{4}$$

I= -4+8+9+12+16-16-4+8 = 29

24. Hallar el valor de M

M= $\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sgn}(\cos x).dx$

Solución:

$$\mathrm{Sgn}\,(\cos x) \begin{cases} 1 \; ; \; \mathrm{Cos}\ x > 0; \; x\varepsilon \left[0, \pi/2\right] \\ 0 \; ; \; \mathrm{Co}\quad \mathrm{s}\ x = 0; \; x = \pi/2 \\ -1 \; ; \; \mathrm{Cos}\ x < 0 \; \; x\varepsilon \left[\pi/2, \pi\right] \end{cases}$$

$$M = \int_0^{\pi/2} x.dx + \int_{\pi/2}^{\pi} x(-1).dx$$

$$M = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi/2} - \left.\frac{x^2}{2}\right|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$M = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{4}$$

25. $M = \int_0^6 \|x\| sen(\frac{\pi\chi}{6})dx$ Hallar el valor de M

Solución

$$M = \int_0^1 \|x\| sen(\frac{\pi\chi}{6})dx + \int_1^2 \|x\| sen(\frac{\pi\chi}{6})dx + \int_2^3 \|x\| sen(\frac{\pi\chi}{6})dx$$

$$+ \int_3^4 \|x\| sen(\frac{\pi\chi}{6})dx + \int_4^5 \|x\| sen(\frac{\pi\chi}{6})dx + \int_5^6 \|x\| sen(\frac{\pi\chi}{6})dx$$

$$M = \int_1^2 sen\frac{\pi\chi}{6}\,dx + 2\int_2^3 sen\frac{\pi\chi}{6}\,dx + 3\int_3^4 sen\frac{\pi\chi}{6}\,dx + 4\int_4^5 sen\frac{\pi\chi}{6}\,dx + 5\int_5^6 sen\frac{\pi\chi}{6}\,dx$$

$$M = -\frac{6}{\pi}\left(\cos\frac{\pi\chi}{6}\Big|_1^2 + 2\cos\frac{\pi\chi}{6}\Big|_2^3 + 3\cos\frac{\pi\chi}{6}\Big|_3^4 + 4\cos\frac{\pi\chi}{6}\Big|_4^5 + 5\cos\frac{\pi\chi}{6}\Big|_5^6 \right)$$

$$M = -\frac{6}{\pi}\Big[\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{2} - 2\cos\frac{\pi}{3} + 3\cos\frac{2\pi}{3} - 3\cos\frac{\pi}{2}$$

$$+ 4\cos\frac{5\pi}{6} - 4\cos\frac{2\pi}{3} + 5\cos\pi - 5\cos\frac{5\pi}{6}\Big]$$

M = 20/π

26. $\int_{1-\sqrt{2}}^{3} \frac{dx}{3 + \|(x-1)^2 - 2\|}$

Solución:

Calculo del dominio de la función

$$\|(x-1)^2 - 2\| = n \Leftrightarrow n \le (x-1)^2 - 2 < n+1$$

n *entero* ; $n \ge -2$

$\Rightarrow$ n +2 ≤ (x-1)^2 < n + 3

$\Rightarrow$x ε < 1- $\sqrt{n+3}$, 1- $\sqrt{n+2}$] $\cup$ $[1+\sqrt{n+2}$, $1+\sqrt{n+3}\rangle$

De lo anterior, evaluamos la función:

$$\|(x-1)^2-2\| = n = \begin{cases} -2 \;;\; x\varepsilon \;\langle 0,1] \cup [1,2\rangle \\ -1 \;;\; x\varepsilon \;\langle 1-\sqrt{2},0] \cup [2,1+\sqrt{2}\rangle \\ 0 \;;\; x\varepsilon \;\langle 1-\sqrt{3},1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2},1+\sqrt{3}\rangle \\ 1 \;;\; x\varepsilon \;\langle -1,1-\sqrt{3}] \cup [1+\sqrt{3},3\rangle \end{cases}$$

Desdoblamos la integral para reemplazar valores:

$$II = \int_{1-\sqrt{2}}^{3} \frac{dx}{3+\|(x-1)^2-2\|} + \int_{0}^{2} \frac{dx}{3+\|(x-1)^2-2\|} + \int_{2}^{1+\sqrt{2}} \frac{dx}{3+\|(x-1)^2-2\|}$$

$$+\int_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{3}} \frac{dx}{3+\|(x-1)^2-2\|} + \int_{1+\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{3+\|(x-4)^2-2\|}$$

$$II = \int_{1-\sqrt{2}}^{0} \frac{dx}{3+(-1)} + \int_{0}^{2} \frac{dx}{3+(-2)} + \int_{2}^{1+\sqrt{2}} \frac{dx}{3+(-1)} + \int_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{3}} \frac{dx}{3+0} + \int_{1+\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{3+(1)} =$$

$$II = \frac{3}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}$$

27. $\int_0^4 \|3x^2+11\| dx$

Solución

Por definición : $\|3x^2+11\| = n$; n ≤ $3x^2$ + 11< n +1

n valor entero.

- Aserción: $\frac{n-11}{3} \le x^2 < \frac{n-10}{3}; n \ge 11, entero.$

$\Rightarrow$ x ε < - $\left\langle \sqrt{\frac{n-10}{3}}, -\sqrt{\frac{n-11}{3}} \right] \cup \left[\sqrt{\frac{n-11}{3}}, \sqrt{\frac{n-10}{3}} \right\rangle \cdots (3)$

- De (3), evaluamos la función:

$$\|3x^2+11\| = n = \begin{cases} 11 \;;\; x\varepsilon \;\langle -\sqrt{1/3},0] \cup [0,\sqrt{1/3}\rangle \\ 12 \;;\; x\varepsilon \;\langle -\sqrt{2/3},-\sqrt{1/3}] \cup [\sqrt{1/3},\sqrt{2/3}\rangle \\ 13 \;;\; x\varepsilon \;\langle -1,-\sqrt{2/3}] \cup [\sqrt{2/3},1\rangle \end{cases}$$

- Desdoblamos la integral:

$$II = \int_0^1 \|3x^2+11\|dx = \int_0^{\sqrt{\frac{1}{3}}} \|3x^2+11\| dx + \int_{\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \|3x^2+11\| dx + \int_{\sqrt{2/3}}^{1} \|3x^2+11\|dx$$

$$II = \int_0^{\sqrt{1/3}} 11dx + \int_{\sqrt{1/3}}^{\sqrt{2/3}} 12dx + \int_{\sqrt{2/3}}^{1} 13dx$$

$$II = 13 - \sqrt{1/3} - \sqrt{2/3}$$

28. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^3}dx$

Solución

Por artificio aplico derivada:

$Dx\ (1-x^3)^{3/2} = 3/2 (1-x^3)^{1/2}(-3x^2)$

$Dx\left[-2/9 (1-x^3)^{3/2}\right] = x^2\sqrt{1-x^3}$

Por el segundo teorema fundamental:

$= \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^3}dx = -2/9 (1-x^3)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{9}$

29. $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{sen^2 x}dx$

Solución:

$\int_0^{\pi/2} x\csc^2 x.dx$; por integración por partes

x = u Δ $\csc^2 x.dx = dv$

dx = du Δ - cotg x = v

I = x ctg x + $\int_0^{\pi/2} ctgx.dx$

I = x ctg x + $\int_0^{\pi/2} d\,\frac{(senx)}{senx}$

I = x ctg x + ln (sen x)$\Big|_0^{\pi/2}$

I = $\frac{\pi}{2}ctg\frac{\pi}{2} + \ln\left|sen\frac{\pi}{2}\right| - 0\cot 0 - \ln|sen 0|$

I = $\frac{\pi}{2}ctg\frac{\pi}{2} + 0 - \ln 0$

I = -ln0

30. $\int_{-1}^{2}\sqrt{|2x-1| - \|x\|}dx$

Solución

- Para el caso de funciones combinadas de valor absoluto y máximo entero, se procede siempre al análisis inicial de la función valor absoluto, por tener tan solo dos opciones de desdoblamiento.
- Por definición:

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1; si\, 2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \in \left[\tfrac{1}{2}, \infty\right) \\ -(2x-1); si\, 2x-1 < 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, \tfrac{1}{2}\right] \end{cases}$$

- Primer desdoblamiento (de lo anterior):

$$\text{I} = \int_{1}^{2} \sqrt{|2x-1| - \|x\|}\,dx = \int_{-1}^{1/2} \sqrt{|2x-1| - \|x\|}\,dx + \int_{1/2}^{2} \sqrt{|2x-1| - \|x\|}\,dx$$

$$\text{I} = \int_{-1}^{1/2} \sqrt{-(2x-1) - \|x\|}\,dx + \int_{1/2}^{2} \sqrt{(2x-1) - \|x\|}\,dx$$

- Por definición:

$\|x\| = n$; $n \leq x < n+1$, n entero

- Evaluamos lo anterior, en los límites de la integral:

$$\|x\| = \begin{cases} -1; x \in [-1,0) \\ 0; x \in [0,1) \\ 1; x \in [1,2) \end{cases}$$

- Segundo desdoblamiento de la integral:

$$\text{I} = \int_{-1}^{0} \sqrt{-(2x-1) - \|x\|}\,dx + \int_{0}^{1/2} \sqrt{-(2x-1) - \|x\|}\,dx + \int_{1/2}^{4} \sqrt{(2x-1) - \|x\|}\,dx +$$

$$\int_{1}^{2} \sqrt{(2x-1) - \|x\|}\,dx$$

$$\text{I} = \int_{1}^{0} \sqrt{-(2x-1) - (-1)}\,dx + \int_{0}^{1/2} \sqrt{-(2x-1) - (0)}\,dx + \int_{1/2}^{1} \sqrt{(2x-1) - (0)}\,dx +$$

$$\int_{1}^{2} \sqrt{(2x-1) - (1)}\,dx$$

$$\text{I} = \int_{-1}^{0} \sqrt{2-2x}\,dx + \int_{0}^{1/2} \sqrt{1-2x}\,dx + \int_{1/2}^{1} \sqrt{2x-1}\,dx + \int_{1}^{2} \sqrt{2x-2}\,dx = \frac{10}{3}$$

31. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{|x^2-2x-3|}{\|x^2+1\|}(x-1)\,dx$

Solución

- Analizando el valor absoluto:

$$|x^2-2x-3| = \begin{cases} (x^2-2x-3); x \in (-\infty,-1] \cup [3,\infty) \\ -(x^2-2x-3); x \in \langle -1,3 \rangle \end{cases}$$

- Desarrollamos la integral en el dominio determinado:

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{\left|x^2-2x-3\right|}{\left\|x^2+1\right\|}(x-1)dx + \int_{-1}^{2} \frac{\left|x^2-2x-3\right|}{\left\|x^2+1\right\|}(x-1)dx$$

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{\left(x^2-2x-3\right)(x-1)}{\left\|x^2+1\right\|}dx - \int_{-1}^{2} \frac{\left(x^2-2x-3\right)(x-1)}{\left\|x^2+1\right\|}dx$$

- También tenemos que:

$$\left\|x^2+1\right\| = n \Leftrightarrow x \in \left(-\sqrt{n}, -\sqrt{n-1}\right] \cup \left[\sqrt{n-1}, \sqrt{n}\right)$$

- Evaluamos la función $\| \;\|$ para los limites de la integral:

$$\left\|x^2+1\right\| = \begin{cases} 1; x \in (-1,0] \cup [0,1) \\ 2; x \in \left(-\sqrt{2}, -1\right] \cup \left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right) \\ 3; x \in \left(-\sqrt{3}, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right) \\ 2; x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, 2\right) \end{cases}$$

- Desarrollamos la integral para los valores hallados:

$$I = \int_{-2}^{-\sqrt{3}} \frac{\left(x^2-2x-3\right)(x-1)}{(4)}dx + \int_{-\sqrt{3}}^{-\sqrt{2}} \frac{\left(x^2-2x-3\right)(x-1)}{(3)}dx +$$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} \frac{\left(x^2-2x-3\right)(x-1)}{(2)}dx - \int_{-1}^{-1} \frac{\left(x^2-2x-3\right)(x-1)}{(1)}dx -$$

$$\int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{\left(x^2-2x-3\right)(x-1)}{(2)}dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{\left(x^2-2x-3\right)(x-1)}{(3)}dx$$

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\left(x^2-2x-3\right)(x-1)}{(4)}dx$$

$$I = \frac{14}{8}\int_{-2}^{-\sqrt{3}} \left(x^2-2x-3\right)d\left(x^2-2x-3\right) + \frac{1}{6}\int_{-\sqrt{3}}^{-\sqrt{2}} \left(x^2-2x-3\right)d\left(x^2-2x-3\right) +$$

$$\frac{1}{4}\int_{+1/4}^{-1} \left(x^2-2x-3\right)d\left(x^2-2x-3\right) - \cdots \qquad \cong -5.8$$

32. $\int_{-1}^{1} \sqrt{|x|-x}\,dx$

Redefinimos valor absoluto $|x| = \begin{cases} x; x \geq 0 \\ -x; x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ la integral que queda $\int_{-1}^{0} \sqrt{-2x}\,dx + \int_{0}^{1} \sqrt{x-x}\,dx = \int_{-1}^{0} \sqrt{-2x}\,dx =$

$$= -\left.\frac{\left(\sqrt{-2x}\right)^3}{3}\right|_{-1}^{0} \left[0 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right] = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

33. $\int_{0}^{3} \operatorname{sgn}\left(x - x^3\right)dx$

Solución:

Redefiniendo signo:

$$\operatorname{sgn}(x-x^3)\begin{cases} 1;\ x-x^3>0;\ x^3-x<0;\ x(x-1)(x+1)<0\ ;\ x\varepsilon\langle-\infty;-1\rangle\cup\langle 0,1\rangle\cap[0;3] \\ \qquad x\varepsilon\ (0;1] \\ 0;\ x-x^3=0;\ x^3-x=0;\ x(x-1)(x+1)=0;\ x=\{0,1,-1\}\cap[0;3] \\ \qquad x=\{0;1\} \\ -1;\ x-x^3<0=x^3-x>0=x(x-1)(x+1)>0=\langle-1;0\rangle\cup\langle 1;\infty\rangle\cap[0;3] \\ \qquad x\varepsilon\ (1,3] \end{cases}$$

La integral es:

$$= 0\int_0^0 dx + 0\int_1^1 dx + \int_0^1 dx - \int_1^3 dx$$

$$= x\Big|_0^1 - x\Big|_1^3$$

= 1- 0 – 3 + 1 = -1

34. $\int_0^4 \dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$ **dx**

Solución

Haciendo cambio de variables

$U^2 = 1+ 3X^2$

$2\ U\ du = 6x\ dx$

$x\ dx = \dfrac{u\ du}{3}$

para x = 0 $\Rightarrow u = 1$; reemplazando en la Integral

para x = 4 $\Rightarrow u = 7$

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}dx = \int_1^7 \frac{u.du}{3u} = \frac{1}{3}\int_1^7 du$$

$$= \frac{u}{3}\Big|_1^7 \quad \text{; Reemplazando los valores}$$

$$= \frac{1}{3}[7-1] = 2$$